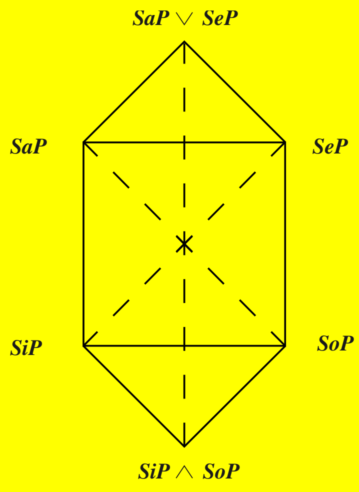
Logische Philosophie

Horst Wessel

Logik



λογος

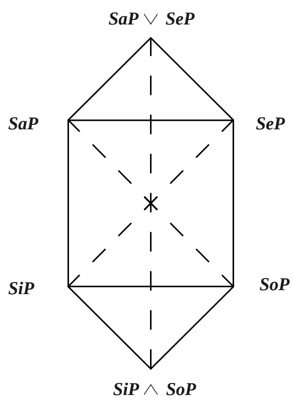
Die Open-Access-Stellung der Datei erfolgte mit finanzieller Unterstützung des Fachinformationsdiensts Philosophie (https://philportal.de/)

FACHINFORMATIONSDIENST
PHILOSOPHIE

DOI: https://doi.org/10.30819/057

Horst Wessel

Logik



Logische Philosophie
Herausgeber:
H. Wessel, U. Scheffler, Y. Shramko, M. Urchs

λογος

Herausgeber der Reihe Logische Philosophie

Horst Wessel

Unter den Linden 61
14621 Schönwalde
Deutschland

Uwe Scheffler

Institut für Philosophie
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
Deutschland

SchefflerU@philosophie.hu-berlin.de

Yaroslav Shramko

Lehrstuhl für Philosophie
Staatliche Pädagogische Universität
UA-50086 Krivyj Rih
Ukraine
shramko@rocketmail.com

Max Urchs

Fachbereich Philosophie
Universität Konstanz
D-78457 Konstanz
Deutschland
max.urchs@uni-konstanz.de

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Wessel, Horst
Logik/ Horst Wessel. - Berlin : Logos-Verl., 1998
(Logische Philosophie ; Bd. 2)
ISBN 3-89722-057-1

ISSN 1435-3415
ISBN 3-89722-057-1

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier

Logos Verlag Berlin
Gubener Str. 47, 10243 Berlin, Tel.: 030 - 42851090
INTERNET: http://www.logos-verlag.de/

Dem Logiker, Schriftsteller, Maler und Soziologen
Alexander Alexandrowitch Sinowjew
zum 75. Geburtstag

Vorwort zur vierten Auflage

Die ersten drei Auflagen dieses Buches erschienen 1984, 1986 und 1989 im Deutschen Verlag der Wissenschaften Berlin und waren relativ schnell vergriffen. Die vorliegende vierte Auflage wurde grundlegend überarbeitet. Die Zielstellung des Buches ist aber gleichgeblieben, es soll in erster Linie als Einführung in die Logik für Philosophiestudenten dienen. Das Lehrbuch ist jedoch auch als Grundlage für die Logikausbildung in anderen Wissenschaftsdisziplinen, insbesondere im geistes- und sozialwissenschaftlichen Bereich, und für ein Selbststudium der Logik geeignet. Sowohl in der Konzeption als auch im Umfang und der Art des dargestellten Stoffes unterscheidet sich das Buch grundlegend von mathematisch orientierten Einführungen in die Logik. Der Konzeption liegt eine Logikauffassung zugrunde, die seit den 70er Jahren von der Logikarbeitsgruppe am Institut für Philosophie der Humboldt-Universität - kritisch anknüpfend an die Arbeiten von A. A. Sinowjew - entwickelt wurde. Diese Auffassung orientiert auf den allgemeinen und philosophischen Charakter der Logik, versteht logische Regeln als universelle Sprachregeln und bemüht sich, die Logik den Bedürfnissen empirischer Wissenschaften besser anzupassen. Wäre es kein Pleonasmus, hätten wir dem Buch den Titel „Philosophische Logik" gegeben.

Ausführlich wird die klassische Aussagen- und Quantorenlogik behandelt. Bei den Beweisen von Metatheoremen haben wir aus didaktischen Gründen die einfachsten und nicht die elegantesten ausgewählt. Philosophische Probleme der Logik, die Problematik der logischen Folgebeziehung, die intuitionistische Logik, die Konditionallogik, Grundlagen der Terminitheorie, modale Prädikate und ausgewählte Probleme der Wissenschaftslogik gehen über die üblichen Einführungen in die Logik hinaus. Der Leser wird hier mit neuen Ergebnissen und Problemen der philosophisch orientierten Logikforschung vertraut gemacht. Das Buch stützt sich auf langjährige Vorlesungen und Seminare an der Berliner Humboldt-Universität. Wer die hier vertretene Logikkonzeption gründlicher kennenlernen möchte, sei auf Sinowjew/Wessel „Logische Sprachregeln", Berlin 1975, sowie auf die im Literaturverzeichnis angegebenen Arbeiten von Krampitz, Scheffler, Sinowjew, Wessel und Wuttich verwiesen. Die Geschichte der Logik wird im vorliegenden Buch nicht behandelt. Der interessierte Leser sei auf Kneale/Kneale (1986), Bocheński (1956) und Schenk (1973) hingewiesen. Den an philosophischen Problemen der Logik Interessierten verweisen wir auf Seebohm (1984) und Wessel (1976). Die Darstellung des Stoffes erfolgt unter didaktischen Gesichtspunkten. Das Buch setzt keine mathematischen Vorkenntnisse voraus, die über einige Grundbegriffe der Schulmathematik hinausgehen. Obwohl auch philosophische Fragen der Logik behandelt werden, deren volles Verständnis gute philosophische Kenntnisse voraussetzt, wird der Stoff so dargeboten, daß auch ein Anfänger sich die Grundlagen der Logik aneignen kann und zu einem ersten Verständnis ihrer philosophischen Bedeutung gelangt. Großer Wert wird in der Darstellung darauf gelegt, daß sich der Studierende gewisse elementare Methoden der Logik bis zur aktiven Beherrschung aneignet. Dies geschieht einmal durch die Auswahl solcher Logiksysteme, die für den Anfänger am leichtesten zu beherrschen sind (Systeme des natürlichen Schließens), zum anderen enthält das Buch eine Anzahl von Übungen. Wir haben nicht nur relativ abgeschlossene Bereiche der Logik behandelt, sondern auch Gebiete dargestellt, die erst in den Grundzügen ausgearbeitet und von einer Vollendung weit entfernt sind. Dies betrifft die Kapitel 13 bis 16, in denen wir vorwiegend unsere Konzeption zur Diskussion stellen. Neben der Korrektur von Druckfehlern und der Berichtigung von kleineren Ungenauigkeiten wird in der neuen Auflage stärker auf den universellen

Charakter logischer Regeln orientiert, die logische Terminitheorie wird unter einem konzeptionell neuen Ansatz dargestellt, die Konditionallogik wurde unter Mithilfe meines Mitarbeiters Uwe Scheffler grundlegend überarbeitet, und die Existenzproblematik spielt eine wichtige Rolle. Für die Hilfe bei der Fertigstellung des Manuskripts und für viele kritische Hinweise danke ich meinen Studenten, meinen Mitarbeitern K.-H. Krampitz, U. Scheffler und K. Wuttich, meinen studentischen Mitarbeitern T. Hoke, S. Köhler, D. Ullrich, M. Winkler und M. Zühlke. Für die Hilfe bei der Überwindung aller Tücken der computermäßigen Textbearbeitung danke ich meinem Sohn Niels Wessel, besonderer Dank gilt B. Christiansen, die technisch die Endfassung des Manuskrips bewältigt hat. Die Überarbeitung des Lehrbuches erfolgte zum großen Teil im Rahmen des DFG-Projektes „Komplexe Logik“ während eines Forschungssemesters, das mir die Humboldt-Universität im Sommer 1995 gewährte. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Humboldt-Universität gilt mein herzlicher Dank für die gewährten guten Arbeitsbedingungen.

Berlin, den 29. Oktober 1997

Inhaltsverzeichnis

1. Kapitel
Gegenstand und Methoden der Logik

1.1 Bestimmung des Gegenstandes der Logik

Die Logik untersucht Termini, Sätze und logische Operatoren unter bestimmten Aspekten. Termini, Sätze und logische Operatoren sind vom Menschen für bestimmte Zwecke geschaffene sprachliche Gebilde, die wahrnehmbar und in bestimmter Weise in Raum und Zeit angeordnet sind.

Termini sind Worte, Wortgruppen oder andere sprachliche Zeichen, die die Aufgabe haben, Gegenstände zu bezeichnen oder Merkmale auszudrücken. Beispiele für Termini sind etwa: „Aristoteles“, „Tisch“, „laufen“, „durch 3 teilbar“, „rundes Quadrat“, „die Tatsache, daß Metalle elektrischen Strom leiten“, „H_2O“, „Bruder und Schwester“. Keine Termini sind die folgenden sprachlichen Ausdrücke: „Die Erde dreht sich um die Sonne“, „und“, „alle“, „bei“, „oder“. Von den verschiedenen Satzarten (Aussage-, Frage-, Befehls-, Wunschsätzen usw.) untersucht die Logik in erster Linie Aussagesätze, die wir kurz *Aussagen* nennen.

Aussagen sind Sätze einer beliebigen Sprache, in denen etwas behauptet oder verneint wird. Beispiele für Aussagen: „Das Fenster ist geöffnet“, „Der Hund bellt nicht“, „Alle Menschen sind sterblich“, „Wenn eine Leitung nicht von einem Magnetfeld umgeben ist, so fließt kein Strom durch diese Leitung“, „$2 + 2 = 5$“, „Ein Perpetuum mobile ist möglich“, „$s = v \cdot t$“. Keine Aussagen sind folgende sprachlichen Gebilde: „die Tatsache, daß das Fenster geöffnet ist“, „die Aussage ‚Der Hund bellt‘“, „Ist das Fenster geöffnet?“, „Schließe bitte das Fenster!“.

Logische Operatoren sind Wörter, Wortgruppen oder andere sprachliche Mittel wie Satzzeichen, die grammatikalischen Formen usw., die für sich genommen keine Bedeutung haben, d. h., die als solche keine Gegenstände bezeichnen oder Merkmale ausdrücken. Beispiele für logische Operatoren sind etwa die Worte: „ist“, „und“, „nicht“, „oder“, „wenn ..., so ...“, „alle“, „einige“, „die Tatsache, daß ...“ usw. Mit Hilfe von logischen Operatoren werden in der Sprache aus gegebenen Termini und Aussagen neue zusammengesetzte Termini und Aussagen gebildet. So wird z. B. aus den Termini „Bruder“ und „Schwester“ mit Hilfe des terminibildenden Operators „und“ der zusammengesetzte Terminus „Bruder und Schwester“ gebildet, während aus den beiden Aussagen „Metalle leiten den Strom“ und „5 ist eine Primzahl“ mit Hilfe des aussagenbildenden Operators „und“ die zusammengesetzte Aussage „Metalle leiten den Strom, und 5 ist eine Primzahl“ gebildet wird. Aus den Termini „ein Elektron“ und „positiv geladen“ erhält man die Aussage „Ein Elektron ist positiv geladen“, wobei „ist“ als logischer Operator auftritt. Aus den Termini „Quadrat“ und „rund“ erhält man den zusammengesetzten Terminus „rundes Quadrat“, in dem das Nebeneinanderschreiben der Termini und ihre grammatikalische Form die Rolle eines logischen Operators spielen, oder den Terminus „Quadrat, das rund ist“, in dem die Worte „das ... ist“ den gleichen logischen Operator darstellen. Aus der Aussage „Die Erde dreht sich um die Sonne“ erhält man mit Hilfe des terminibildenden Operators „die Tatsache, daß ...“ den Terminus „die Tatsache, daß sich die Erde um die Sonne dreht“.

Die Logik führt - wie jede andere Wissenschaft - bei der Untersuchung ihres Gegenstandes Abstraktionen und Verallgemeinerungen durch, d. h., sie beachtet nicht alle Eigenschaften spezieller Termini und Aussagen, sondern wählt nur bestimmte ihrer Eigenschaften (oder Seiten) aus und macht sie zu ihrem Untersuchungsgegenstand.

Wie bereits gesagt, haben logische Operatoren für sich genommen keine selbständige Bedeutung, sondern nur als Bestandteile in einer Struktur von Termini und Aussagen. Ihre Eigenschaften werden dadurch bestimmt, daß man die Eigenschaften der sie enthaltenden sprachlichen Gebilde bestimmt. Deshalb sind logische Operatoren keine Termini, obwohl auch sie Wörter sind. Sie sind eine spezielle Art sprachlicher Gebilde.

Eine abgeschlossene Definition der Termini „Aussage", „Terminus" und „logischer Operator" ist aus prinzipiellen Gründen nicht möglich. Aussagestrukturen, Terministrukturen und logische Operatoren werden von den Menschen zusammen mit der Sprache geschaffen, und es gibt keine apriorische Schranke für die Einführung neuer logischer Operatoren sowie neuer Aussage- und Terministrukturen. Deshalb wurden hier die betreffenden Termini auch nur an Beispielen erläutert. In jedem Bereich der Logik wird hingegen genau bestimmt, welche logischen Operatoren, Aussage- und Terministrukturen untersucht werden.

1.2 Logische Abstraktionen

Termini, Aussagen und die in ihnen enthaltenen logischen Operatoren sind immer Elemente einer konkreten Sprache - etwa der deutschen, französischen, englischen oder der russischen Sprache, einer Umgangssprache oder der Sprache der Mathematik, der Physik, der Biologie, der Soziologie, der Rechtswissenschaft usw. Die Logik betrachtet jedoch nicht die Besonderheiten dieser Sprachen. Sie untersucht nur solche Eigenschaften von Termini, Aussagen und der in ihnen enthaltenen logischen Operatoren, die unabhängig von der jeweiligen Sprache sind, in der sie verwendet werden. Für die Logik sind alle Sprachen in einem bestimmten Sinne nur Bestandteile einer einzigen (summarischen) Sprache. Auf Grund ihrer eigenen Zielsetzung stellt die Logik also keine Regeln auf, die für eine Nationalsprache tauglich sind und für eine andere nicht, oder die für die Sprache der einen Wissenschaft verwendbar sind und für die anderen Wissenschaften nicht.

Betrachten wir die drei Sätze: 1. „Alle Menschen sind sterblich"; 2. „All dogs bark"; 3. „Alle Metalle leiten Strom". Der erste und der dritte Satz sind Sätze in deutscher, während der zweite ein Satz in englischer Sprache ist. Im ersten kommen die Termini „Menschen" und „sterblich", im zweiten die Termini „dogs" und „bark" und im dritten die Termini „Metalle" und „leiten Strom" vor. Die drei Sätze haben aber eine gleichartige Struktur, die man durch ein Symbol der Form „$\forall s(s \leftarrow P)$" wiedergeben kann, wobei „$\forall$" die gleichartigen logischen Operatoren „alle" und „all" darstellt, „s" die gleichartigen Termini „Menschen", „dogs" und „Metalle", „P" die gleichartigen Termini „sterblich", „bark" und „leiten Strom" und der Pfeil „$\leftarrow$" die gleichartigen logischen Operatoren darstellt, mit deren Hilfe aus den Termini „s" und „P" eine Aussage gebildet wird (im ersten Satz ist das das Wort „sind", während im zweiten und dritten Satz das Nebeneinanderschreiben der Termini und deren grammatikalische Form die Rolle dieses logischen Operators spielen). Die Logik untersucht die allgemeinen Eigenschaften von Aussagen mit einer solchen Struktur, die nicht davon abhängig sind, welche Form die Termini „s" und „P" haben und durch welche sprachlichen Mittel die logischen Operatoren „$\forall$" und „$\leftarrow$" ausgedrückt werden.

Die Aufgliederung eines speziellen sprachlichen Textes und einer gesprochenen Rede in Termini, Aussagen und logische Operatoren (sagen wir, der logische Aufbau eines speziellen sprachlichen Fragmentes) ist durchaus nicht immer klar, scharf abgegrenzt und offensichtlich. Sogar in relativ einfachen Fällen ist eine gewisse Gewohnheit erforderlich, um den logischen Aufbau eines gegebenen sprachlichen Textes zu ermitteln. Eine solche Gewohnheit der Menschen ist eine notwendige Bedingung für eine bewußte Verwendung logischer Regeln beim Operieren mit der Sprache. Es sei vermerkt, daß sich diese Gewohnheit ziemlich schnell herausbildet, wenn es erforderlich ist.

Betrachten wir den Satz „Alle ungeraden Zahlen sind nicht ohne Rest durch 2 teilbar“. Er besteht aus zehn Wörtern (wenn wir die Ziffer „2“ als Wort ansehen), und jedes Wort ist aus einer Anzahl von Buchstaben zusammengesetzt, die in bestimmter Weise angeordnet sind. Diese Tatsache interessiert die Logik nicht. In logischer Hinsicht besteht der Satz hingegen aus den zwei Termini „ungerade Zahlen“ und „ohne Rest durch 2 teilbar“ sowie den drei logischen Operatoren „alle“, „sind“ und „nicht“. Eine solche Analyse des vorliegenden Satzes läßt sich durch ein Symbol der Form „$\forall s{\sim}(s \leftarrow P)$“ wiedergeben, wobei in Ergänzung zu den bereits angeführten Bezeichnungen das Symbol „$\sim$“ den logischen Operator „nicht“ darstellt.

Wie wir sehen, wird zur Feststellung der logischen Struktur eines Satzes eine ganze Reihe von Operationen vorgenommen, die von der Aufgliederung des Satzes in seine logischen Bestandteile in einzelnen Fällen bis zur Einführung eines besonderen logischen Operators führt, der in dem betrachteten Satz gar nicht durch Worte ausgedrückt ist. Durch diese Operationen werden die am Ende des vorhergehenden Abschnitts erwähnten Abstraktionen durchgeführt. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine Darstellung von Sätzen, z. B. durch Symbole der Form „$s \leftarrow P$“, „$\forall s{\sim}(s \leftarrow P)$“, keineswegs als Vorschrift aufzufassen ist, Sätze gerade auf diese Weise aufzubauen (obwohl eine Standardisierung der Wissenschaftssprache in vielen Fällen wünschenswert wäre). Eine solche Darstellung ist nur eine abgekürzte und verallgemeinerte Schreibweise dafür, daß sich in einigen Sätzen Termini, Aussagen und logische Operatoren eines solchen Typs und in einer solchen Anordnung feststellen lassen. Wir haben hier eine ähnliche Situation wie beispielsweise mit den Symbolen der Chemie. Wenn ein Chemiker z. B. mit dem Symbol „H_2O“ Wasser darstellt, so behauptet er damit keineswegs, daß Wasser eine solche Form hat. Er betrachtet dieses Symbol vielmehr als eine kurze und verallgemeinerte Schreibweise der Tatsache, daß ein Molekül Wasser aus zwei Atomen Wasserstoff und einem Atom Sauerstoff besteht.

Wie bereits gesagt, spielen in der Sprache besondere Wörter und Symbole, Gruppen solcher Wörter und Symbole sowie andere sprachliche Mittel (insbesondere die Anordnung und die grammatikalische Form der Wörter) die Rolle von logischen Operatoren. Dabei sind die logischen Operatoren nicht immer standardisiert, gleichartig und eindeutig. Verschiedene sprachliche Mittel erfüllen manchmal die Rolle gleicher logischer Operatoren, während ein und dieselben sprachlichen Mittel die Rolle verschiedener logischer Operatoren spielen können. Einerseits können die Rolle des logischen Operators, mit dessen Hilfe Aussagen aufgezählt werden, beispielsweise die Wörter „und“, „aber“, „und gleichfalls“, verschiedene Satzzeichen (Komma, Semikolon, Punkt) sowie die Anordnung der Aussagen unmittelbar nacheinander spielen. Andererseits erfüllt das Wort „und“ der deutschen Sprache die Funktion zweier ganz unterschiedlicher logischer Operatoren, nämlich einmal die Rolle eines terminibildenden und zum anderen die Rolle eines aussagenbildenden Operators (vgl. die Beispiele in Abschnitt 1). Die Logik berücksichtigt diese Tatsachen nicht und wählt als logische Operatoren nur die Rollen (oder Funktionen) der erwähnten sprachlichen Ausdrücke aus. Sie untersucht nicht die speziellen Eigenschaften der Wörter „und“, „aber“ usw., sondern nur die Rolle in der Sprache, wo mit Hilfe dieser Wörter aus gegebenen Aussagen bzw. Termini neue Aussagen bzw. Termini mit genau definierten Eigenschaften gebildet werden. Wenn wir für dieses Ziel ein spezielles Symbol (sagen wir „$\wedge$“) einführen, so steht dieses Symbol für beliebige sprachliche Mittel, die die betreffende Rolle erfüllen können.

Es ergibt sich die Frage: Wenn wir von den Besonderheiten konkreter Sprachen generell abstrahieren, welche Eigenschaften der Termini und Aussagen verbleiben dann als Untersuchungsgegenstand der Logik?

1.3 Logische Aspekte der Sprache

In der Logik werden solche Eigenschaften von Termini und Aussagen betrachtet, die mit „Bedeutung eines Terminus“, „Sinn einer Aussage“, „Wahrheitswert einer Aussage“, „wahr“, „falsch“ usw. bezeichnet werden. Die Logik klärt nicht die Bedeutung dieser oder jener Termini (z. B. der Termini „Atom“, „Wert“ usw.) und stellt nicht die Wahrheitswerte dieser oder jener Aussagen fest (z. B. stellt sie nicht fest, ob die Aussage „Die Zahl 5 ist durch 2 ohne Rest teilbar“ wahr oder falsch ist). Sie beachtet nur, daß Termini und Aussagen diese Eigenschaften besitzen, und stellt für sie Regeln ausschließlich nach diesen Eigenschaften auf. Wir erklären kurz, wie dies geschieht.

Betrachten wir die Termini „Tisch“ und „ohne Rest durch 2 teilbar“. Die Bedeutung des ersten von ihnen besteht darin, daß mit diesem Terminus eine bestimmte Art von Dingen - nämlich Tische - benannt werden. Die Bedeutung des zweiten Terminus besteht darin, daß man mit ihm die Eigenschaft einer Zahl benennt, bei einer Teilung dieser Zahl durch 2 als Ergebnis eine ganze Zahl zu erhalten. Allgemein meint man, wenn man von der Bedeutung eines Terminus spricht, daß mit diesem Terminus irgendwelche Gegenstände bezeichnet (benannt) oder Merkmale ausgedrückt werden sollen. Akzeptiert man das Gesagte, so lassen sich bestimmte Beziehungen und Unterschiede der Termini bezüglich ihrer Bedeutung definieren. So ist z. B. der Terminus „Elementarteilchen“ ein Gattungsterminus bezüglich des Terminus „Elektron“, da man jedes Elektron ein Elementarteilchen nennen kann, aber nicht jedes Elementarteilchen ein Elektron.

Grundlegende Bedeutung für die Logik hat die Einteilung der Termini in Subjekte und Prädikate. Diese Einteilung berücksichtigt die unterschiedliche Rolle der Termini in Aussagen: *Subjekte* nennt man die Termini, die das bezeichnen, über das in den Aussagen gesprochen wird (die Objekte bezeichnen), während man die Termini *Prädikate* nennt, die das ausdrücken, was über die Objekte gesagt wird. So ist in der Aussage „Ein Elektron ist positiv geladen“ der Terminus „Elektron“ das Subjekt, während der Terminus „positiv geladen“ das Prädikat ist.

Wahrheitswerte der Aussagen nennt man die Eigenschaften der Aussagen, die mit „wahr“, „falsch“ usw. bezeichnet werden. So sieht man beispielsweise die Aussage „Ein Elektron ist positiv geladen“ als falsch an, da ein Elektron in Wirklichkeit eine negative Ladung besitzt, während man die Aussage „Alle geraden Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbar“ als wahr ansieht, da alle geraden Zahlen wirklich durch 2 teilbar sind. Allgemein sieht man Aussagen als wahr an, wenn es sich wirklich so verhält, wie in ihnen ausgesagt wird, und als unwahr (falsch), wenn es sich nicht so verhält, wie in ihnen behauptet wird. Die Wahrheitswerte „wahr“, „falsch“ usw. sind Prädikate, die Aussagen in genau bestimmten Fällen zugeschrieben werden. Man kann sagen, daß sie Eigenschaften von Aussagen darstellen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß sie nicht solche Eigenschaften von Aussagen sind, die man an den Aussagen als sprachlichen Gebilden für sich genommen wahrnehmen kann, wie etwa die Eigenschaft von Aussagen, aus bestimmten Termini und logischen Operatoren gebildet zu sein. Wenn man in der Sprachpraxis einer Aussage einen Wahrheitswert zuschreibt, so vergleicht man im allgemeinen diese Aussage mit etwas von ihr Verschiedenem, und im Ergebnis dieses Vergleiches spricht man ihr einen Wahrheitswert zu. In der Logik wird diese Vergleichsoperation für einfache Aussagen nicht betrachtet, sondern als gelöst vorausgesetzt, und es werden die Folgerungen untersucht, die sich aus der Tatsache, daß einfache Aussagen bestimmte Wahrheitswerte besitzen, für die Wahrheitswerte der aus ihnen gebildeten zusammengesetzten Aussagen ergeben.

Wie bereits gesagt, werden aus gegebenen Termini und Aussagen mit Hilfe von logischen Operatoren neue Termini und Aussagen gebildet. Dabei werden zwischen den Termini und Aussagen vollständig kontrollierbare Beziehungen bezüglich ihrer Bedeutung und ihres Wahrheitswertes festgelegt. Die logischen Operatoren werden in der Logik gerade so definiert, daß diese Beziehungen gelten (d. h., daß man auf Grund der Bedeutungen der einen Termini und der Wahrheitswerte der einen Aussagen die Bedeutung anderer Termini und die Wahrheitswerte anderer Aussagen feststellen kann).

Wir führen zwei Beispiele an, die den Stil logischer Untersuchungen ausreichend verdeutlichen. Der Operator „$\wedge$“, den man (insbesondere) als „und“ lesen kann, wird durch eine Gesamtheit von Behauptungen definiert, zu der auch die folgenden gehören:

1) Wenn „A“ und „B“ Aussagen sind, so ist auch „$(A \wedge B)$“ eine Aussage (die Buchstaben „A“ und „B“ stehen für beliebige Aussagen);
2) eine Aussage „$(A \wedge B)$“ ist wahr genau dann, wenn die beiden Aussagen „A“ und „B“ wahr sind.

Die erste Behauptung legt fest, welche sprachlichen Konstruktionen mit dem Operator „$\wedge$“ Aussagen sind, während die zweite eine Eigenschaft dieses Operators definiert. Als Folgerungen erhalten wir Behauptungen, die gleichfalls Eigenschaften des Operators „$\wedge$“ und Aussagen mit diesem Operator charakterisieren: Wenn „$(A \wedge B)$“ wahr ist, so ist „$(B \wedge A)$“ wahr; wenn „$(A \wedge (B \wedge C))$“ wahr ist, so ist „$((A \wedge B) \wedge C)$“ wahr.

Wir haben bisher Anführungszeichen verwendet, um aus einem Symbol einen Namen dieses Symbols zu bilden. Dies war erforderlich, um deutlich zu machen, daß das entsprechende Symbol an dieser Stelle nicht verwendet wurde, sondern daß über dieses Symbol gesprochen wurde. So verwendeten wir Ausdrücke wie: „der Operator „$\wedge$““, „die Aussage „A““, „„$\wedge$“ ist ein Operator“, „„A“ ist eine Aussage“ usw. Im weiteren lassen wir aus Einfachheitsgründen diese Anführungszeichen häufig weg, wenn offensichtlich ist, daß das betreffende Symbol nicht verwendet, sondern nur angeführt wird. Das ist insbesondere der Fall in Ausdrücken der Form wie „der Operator α“, „die Aussage α“, „der Terminus α“, „das Prädikat α“, „die Variable α“, „die Formel α“ usw. sowie in Formulierungen wie „α ist ein Operator (eine Aussage, ein Terminus, ein Prädikat, eine Variable, eine Formel, ein Wahrheitswert usw.)“.

Betrachten wir ein zweites Beispiel. Der Operator $\downarrow$, den man insbesondere als „derart, daß“ lesen kann, wird durch eine Gesamtheit von Behauptungen definiert, zu der die folgenden gehören:

1) Wenn a ein Terminus und A eine Aussage ist, so ist $a \downarrow A$ ein Terminus;
2) der Terminus $a \downarrow A$ schließt der Bedeutung nach den Terminus a ein (wir sagen, ein Terminus a schließt der Bedeutung nach den Terminus b ein genau dann, wenn jeder Gegenstand, der mit dem Terminus a bezeichnet werden soll, auch mit dem Terminus b bezeichnet werden soll).

Auch in diesem Beispiel legt die erste Behauptung fest, welche sprachlichen Gebilde mit dem Operator $\downarrow$ als Termini angesehen werden, während die zweite eine Beziehung der Termini $a \downarrow A$ und a bezüglich ihrer Bedeutung feststellt. In einem System anderer logischer Regeln kann man hieraus als Folgerung eine Regel erhalten, nach der eine Aussage, die für alle a wahr ist, auch für alle $a \downarrow A$ wahr ist.

Für die Logik ist es vollkommen gleichgültig, welche Bedeutung diese oder jene Termini und welchen Wahrheitswert diese oder jene Aussagen haben. So ist beispielsweise der Terminus „ein Quadrat, welches rund ist“ leer (ein rundes Quadrat ist unmöglich) und die Aussage „Die Erde hat die Form eines Würfels“ falsch. Sind aber die Bedeutungen der Termini „Quadrat“ und „rund“ bekannt und sind die Eigenschaften des Operators „welches ... ist“ in der Logik definiert, so ist auch die Bedeutung des Terminus „ein Quadrat, welches rund ist“ bekannt (dieser Terminus ist verständlich, obwohl er leer ist). Obwohl die angeführte Aussage falsch ist, besitzt sie eine bestimmte logische Struktur, und ihr Sinn ist bekannt, wenn die Bedeutung der in ihr vorkommenden Termini und die Eigenschaften ihres logischen Operators bekannt sind. Das bisher Gesagte charakterisiert natürlich nur einen geringen Teil der Logik. Es ist aber ausreichend, um den logischen Aspekt von Sprachuntersuchungen zu verdeutlichen.

1.4 Logische Regeln

Logische Regeln (logische Gesetze) sind Regeln zum Operieren mit Aussagen und Termini sowie mit den in ihnen vorkommenden logischen Operatoren. In der Logik werden Regeln verschiedenen Typs untersucht. Die wichtigsten Typen von Regeln sind Form- oder Bildungsregeln von Aussagen und Termini, Regeln der logischen Folgebeziehung der einen Aussagen aus anderen, Regeln über die Bedeutungsbeziehungen zwischen Termini sowie Definitionsregeln.

Die *Formregeln* legen in jedem Bereich der Logik fest, welche sprachlichen Gebilde jeweils als Aussagen oder Termini anzusehen sind. Durch solche Regeln wird festgelegt, wie man aus gegebenen Termini mit Hilfe von logischen Operatoren andere Termini oder aber Aussagen, bzw. wie man aus gegebenen Aussagen mit Hilfe von logischen Operatoren komplizierte Aussagen usw. erhält. Beispiele solcher Regeln sind etwa: Wenn „A“ und „B“ Aussagen sind, so ist „A *und* B“ eine Aussage; wenn „a“ und „b“ Termini sind, so ist „a *und* b“ ein Terminus; wenn „A“ eine Aussage ist, so sind die Wendungen „die Tatsache, daß A“ und „die Aussage A“ Termini.

Eine der wichtigsten Aufgaben der Logik ist es, Regeln der logischen Folgebeziehung aufzustellen. Manche Autoren beschränken den Gegenstand logischer Untersuchungen ausschließlich auf die Aufstellung von Regeln der logischen Folgebeziehung. Häufig nennt man solche Regeln auch *logische Schlußregeln*. Wir verdeutlichen an einem Beispiel eine solche Regel. Wenn die Mutter zu ihrem Sohn Fritz sagt: „Heute gibt es als Nachtisch Schokoladenpudding oder Blaubeeren“, der bei der Zubereitung des Mittagessens helfende Vater aber einwirft: „Pudding können wir heute nicht machen, da die Milch sauer ist“, und Fritz ausruft: „Dann gibt es heute also Blaubeeren“, so hat Fritz einen einfachen logischen Schluß vollzogen. Wir wollen uns die von Fritz hier durchgeführte Tätigkeit etwas näher ansehen. Dazu verwenden wir folgende Abkürzungen: Für die Aussage „Heute gibt es Schokoladenpudding“ schreiben wir A, für die Aussage „Heute gibt es Blaubeeren“ schreiben wir B, für „und“, „oder“, „nicht“ verwenden wir entsprechend die Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\sim$. Von seinen Eltern wußte Fritz, daß die Voraussetzung $(A \vee B) \wedge \sim A$ gilt, außerdem beherrschte er - sicher nur an Beispielen - die logische Regel „Aus $(A \vee B) \wedge \sim A$ folgt logisch B“, und durch Anwendung dieser Regel kam er zu dem Ergebnis, daß die Folgerung B gilt. Wenn wir für „folgt logisch“ das Zeichen $\vdash$ schreiben, so hat die angewendete Regel folgende Form:

$$(A \vee B) \wedge \sim A \vdash B.$$

Solch eine Regel der logischen Folgebeziehung besitzt folgende Eigenschaft: Ganz gleich, welche konkreten Aussagesätze wir für die Variablen A und B auch einsetzen, stets, wenn die Voraussetzung einer Regel der logischen Folgebeziehung gilt, so gilt auch die Folgerung. Dies bedeutet, daß die Korrektheit eines logischen Schlusses ausschließlich von der logischen Form der Voraussetzungen und Folgerungen, jedoch nicht vom konkreten Inhalt der betreffenden Sätze abhängt. Deshalb nennt man die Logik auch *formale Logik*.

Betrachten wir noch an einem Beispiel eine logische Regel eines anderen Typs, die die Bedeutungsbeziehungen von Termini betrifft: Wenn jeder Gegenstand, der mit dem Terminus a bezeichnet werden soll, auch mit dem Terminus b bezeichnet werden soll, und jeder Gegenstand, der mit dem Terminus b bezeichnet werden soll, auch mit dem Terminus c bezeichnet werden soll, so soll auch jeder Gegenstand, der mit dem Terminus a bezeichnet werden soll, mit dem Terminus c bezeichnet werden.

Wir sagten bereits: Anstelle des Ausdrucks „Jeder Gegenstand, der mit dem Terminus a bezeichnet werden soll, soll auch mit dem Terminus b bezeichnet werden“ wollen wir den kürzeren Ausdruck „Der Terminus a schließt der Bedeutung nach den Terminus b ein“ verwenden, und als Abkürzung dafür schreiben wir das Symbol „$ta \rightharpoondown tb$“ (t heißt Terminus). Die oben umgangssprachlich formulierte Regel läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$(ta \rightharpoondown tb) \wedge (tb \rightharpoondown tc) \vdash (ta \rightharpoondown tc).$$

Die Beziehung $\rightharpoondown$ wird in der Umgangssprache häufig als „ist“ gelesen. Eine Anwendung der eben formulierten Regel wäre etwa: Aus den beiden Aussagen „Ein Stichling ist ein Fisch“ und „Ein Fisch ist ein Lebewesen“ folgt logisch „Ein Stichling ist ein Lebewesen“.

Unsere beiden als Beispiel angeführten logischen Regeln haben recht unterschiedlichen Charakter. Um die erste Regel als gültig einzusehen, mußte man die innere logische Struktur der Aussagen A und B nicht berücksichtigen, während das bei der zweiten Regel durchaus erforderlich ist, denn ohne Berücksichtigung der inneren Struktur der in ihr vorkommenden Aussagen hätte sie die Form $A \wedge B \vdash C$ und wäre nicht gültig. Beide Regeln gehören zu verschiedenen Bereichen der Logik, die erste zur allgemeinen Theorie der logischen Folgebeziehung, die zweite zur allgemeinen Terminitheorie.

Von einer anderen Art logischer Regeln - den Definitionsregeln - haben wir eben schon stillschweigend Gebrauch gemacht. Definitionsregeln sind Regeln, mit deren Hilfe in eine Wissenschaft neue Termini mit Hilfe bereits bekannter Termini und logischer Operatoren eingeführt werden. Beispielsweise kann man den Terminus „Primzahl“ dadurch einführen, daß man festsetzt, ihn als bedeutungsgleiche Abkürzung für den zusammengesetzten Terminus „ganze Zahl, die nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist“ zu verwenden. Wir haben eben definitorisch festgesetzt, daß die Aussage „Der Terminus a schließt der Bedeutung nach den Terminus b ein“ eine bedeutungsgleiche Abkürzung für die Aussage „Jeder Gegenstand, der mit dem Terminus a bezeichnet werden soll, soll auch mit dem Terminus b bezeichnet werden“ ist.

Verschiedene Typen von logischen Regeln werden auf verschiedene Weise aufgestellt und verwendet. Im folgenden Abschnitt machen wir einige allgemeine Bemerkungen über den Charakter beliebiger logischer Regeln.

1.5 Beschreibung und Erfindung

Logische Regeln werden von den Menschen nicht in der uns umgebenden Welt entdeckt, sondern werden von ihnen zusammen mit der Herausbildung und Vervollkommnung der Gewohnheiten beim Aufbau von Termini und Aussagen und beim Operieren mit ihnen erfunden. Diese Gewohnheiten bilden sich spontan heraus, mit allen sich hieraus ergebenden Konsequenzen, wie Unklarheiten, Unbeständigkeiten, dem Vorhandensein von Variationen, fragmentarischem Charakter usw. Die Wissenschaft der Logik hat die Aufgabe, die erwähnten Regeln klar und unzweideutig zu gestalten, Verwechslungen verschiedener Formen von Termini und Aussagen auszumerzen sowie eine gewisse Standardisierung durchzuführen. Die Erfüllung dieser Aufgabe ist nicht ein bloßes Registrieren dessen, was allgemein akzeptiert und bekannt ist. Sie ist zwar eine Fortsetzung der spontanen Tätigkeit der Menschen beim Erfinden und Vervollkommnen der logischen Mittel der Sprache, aber bereits auf berufsmäßiger Ebene. Seit ihrer Existenz als Wissenschaft und selbst in ihren einfachsten Bereichen schafft die Logik etwas Neues im Vergleich zu dem, was in der Sprachpraxis bekannt ist. Das ist auch ein wesentlicher Unterschied der Logik zu einer allgemeinen Grammatik.

Die Logik als Einzelwissenschaft hat es zunächst mit einer bestimmten Art von empirisch gegebenen Termini und Aussagen (und der in ihnen enthaltenen Operatoren) sowie mit gewissen, schon funktionierenden Verwendungsregeln für sie zu tun. Von diesem Standpunkt aus haben die von der Wissenschaft der Logik aufgestellten Regeln eine Erfahrungsbasis. Gleichzeitig stellt die Logik aber fest, daß die Eigenschaften dieser oder jener Art von Termini, Aussagen oder Operatoren nur für gewisse Fälle ihrer Verwendung, nicht jedoch für beliebige mögliche Situationen bestimmt sind, daß diese Eigenschaften häufig nur für ganz spezielle Sprachformen und nicht in allgemeiner Form fixiert sind, daß die Beziehungen verschiedener Operatoren untereinander nicht festgelegt sind und daß die Regeln für Fälle unbestimmt sind, in denen die Operatoren in komplizierten Kombinationen in den einen oder anderen Strukturen von Termini und Aussagen vorkommen. Wenn die Logik diese Mängel beseitigt, muß sie die Eigenschaften der logischen Operatoren und der sie enthaltenden Termini und Aussagen schon unabhängig von dem sprachlichen Material bestimmen, von dem sie ausging.

Eine Beobachtung und Beschreibung der faktisch vorliegenden Situation in der Sprache spielt also für die Logik eine Rolle. Sie ist aber keine Methode der logischen Forschung. Die Logik untersucht ihren Gegenstand durchaus nicht durch empirische Beobachtung von Menschen, die die deutsche, russische oder französische Sprache sprechen, nicht durch Beobachtung von Mathematikern, Physikern, Geologen usw. Die Logik erforscht nicht die reale Sprachpraxis, sondern entwickelt logisch denkbare, logisch zulässige und logisch mögliche Situationen. Sie untersucht die denkbaren Möglichkeiten, die sich aus gewissen gegebenen oder angenommenen Voraussetzungen ergeben.

Betrachten wir folgende Situation: Gegeben seien zwei beliebige Aussagen; jede von ihnen kann wahr oder falsch sein; mit Hilfe von logischen Operatoren läßt sich aus ihnen eine neue Aussage bilden, die gleichfalls wahr oder falsch sein kann. Es sei nun zu ermitteln, wieviel Kombinationen hier möglich sind, bei denen der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der in ihr enthaltenen Aussagen bestimmt wird, und wieviel verschiedene logische Operatoren also möglich sind. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß hier sechzehn und nur sechzehn Fälle möglich sind, für die man entsprechend sechzehn verschiedene Operatoren einführen kann. Ohne Kenntnis dieser oder jener Sprache (insbesondere ohne Kenntnis der Situation in dieser oder jener Wissenschaft) kann der Logiker jetzt begründet sagen, daß diese Fälle in einer Sprache (insbesondere in einer beliebigen Wissenschaft) vorkommen können, während andere Möglichkeiten ausgeschlossen sind. Sie sind genauso unmöglich, wie ein Wirkungskoeffizient größer als hundert Prozent oder eine Wahrscheinlichkeit größer als 1 unmöglich sind. Die Logik ist nicht in erster Linie eine beobachtende und beschreibende, sondern eher eine konstruierende Wissenschaft. Ein gewisses Arbeitsmaterial sowie eine bestimmte Aufgabenstellung und Orientierung erhält sie durch Beobachtung sprachlicher Situationen. Dieser Kontakt der Logik mit konkreten Sprachen wird ständig aufrecht erhalten und ist keine einmalige und zeitweilige Erscheinung, die nur für die Herausbildung der Logik als Wissenschaft wichtig ist. Doch die eigentliche logische Forschung vollzieht sich schon unabhängig von diesem Material. Sie untersucht mögliche Fälle und stellt für sie entsprechende Regeln auf. Von diesem Standpunkt aus ist die Logik eine apriorische Wissenschaft, deren Ergebnisse für eine beliebige Sprache gelten, wenn in ihr nur Elemente vorkommen, die unter die in der Logik beschriebenen Typen fallen.

Im weiteren führen wir häufig Beispiele an, die das Gesagte bestätigen. Hier sei nur noch vermerkt, daß man erst vor vergleichsweise nicht allzu langer Zeit in der modernen Logik eine erschöpfende Aufzählung der Regeln für die Fälle gegeben hat, in denen die logischen Operatoren „und“, „oder“ und „nicht“ gemeinsam in Aussagen vorkommen, obwohl diese Operatoren schon jahrhundertelang verwendet werden. Bekannt sind die Regeln, nach denen man Aussagen mit den angegebenen Operatoren Wahrheitswerte in den Fällen zuschreibt, wo man sich auf die beiden Wahrheitswerte „wahr" und „falsch" beschränkt. An diese Regeln ist man gewöhnt und nimmt sie als etwas Selbstverständliches und Naturgegebenes hin. Man braucht aber nur den Fall zu betrachten, in dem die Aussagen drei und mehr Wahrheitswerte annehmen können, um festzustellen, daß es bis zur Entstehung der mehrwertigen Logik keinerlei selbstverständliche Regeln für diese Fälle außerhalb der Logik gab. Sie mußten erfunden werden, von den Logikern neu aufgestellt werden und eine mehr oder weniger weite Anerkennung finden. Es zeigt sich, daß dabei verschiedene Varianten solcher Regeln möglich sind. Für den Operator „nicht" sind im Falle von drei Wahrheitswerten der Aussagen mindestens drei verschiedene Varianten möglich. Und um dabei Verwechslungen zu vermeiden, müssen verschiedene logische Operatoren eingeführt werden, die diese Varianten berücksichtigen.

1.6 Logische Termini

Die oben gegebene Beschreibung des Gegenstandes der Logik umfaßt nur deren Grundlagen, d. h. nur ihre wichtigsten Bereiche. Die reale Situation in der modernen Logik ist aber so, daß die von ihr untersuchte Problematik in einem gewissen Sinne weiter ist als die von uns gegebene Definition. In der Logik werden Probleme des Aufbaus wissenschaftlicher Theorien, der axiomatischen Methode, der Analogie- und Induktionsmethode usw. untersucht. Außerdem werden in der Logik die Eigenschaften gewisser spezieller Termini betrachtet, nämlich Termini, die Klassen, Relationen („größer", „kleiner", „zwischen" usw.), Modalitäten („möglich", „notwendig", „zufällig" usw.), Normative („obligatorisch", „erlaubt", „verboten" usw.) und andere in den verschiedensten Wissenschaften anzutreffende Erscheinungen bezeichnen. Da diese Termini von der Logik und nicht von einer anderen Wissenschaft untersucht werden, nennen wir sie *logische Termini*.

Die in der Logik untersuchten speziellen Termini lassen sich in zwei Gruppen einteilen. Zur ersten Gruppe gehören solche Termini, deren Bedeutung sich allein im Rahmen und mit den Mitteln der Logik definieren läßt. Solche Termini sind etwa „wahr", „falsch", „folgt logisch", „logisch notwendig" usw. Bei diesen Termini handelt es sich um logische Termini im eigentlichen Sinne. Zur zweiten Gruppe gehören Termini, die zwar mit Mitteln und Methoden der Logik bearbeitet werden, deren vollständige Definition aber den Rahmen der Logik übersteigt und außerlogische Voraussetzungen erfordert. Zu dieser Gruppe gehören etwa die Termini „existiert", „faktisch notwendig", Raum- und Zeittermini, Ausdrücke wie „empirisches Individuum", „Anhäufung", „Bewegung", „Veränderung", „Entwicklung", „empirischer Zusammenhang", „Ursache", „Wirkung" usw. Solche und ähnliche Termini werden im Rahmen der Wissenschaftslogik untersucht; logischen Untersuchungen dieser Art sind keinerlei apriorische Grenzen gesteckt. Die Logik hat in den letzten Jahren ihren Aufmerksamkeitsbereich ständig erweitert und wird dies auch weiterhin tun.

2. Kapitel
Das Verhältnis der Logik zu anderen philosophischen Disziplinen

2.1 Logik, Sprache, Denken

Für ein richtiges Verständnis der Logik und ihrer Aufgaben in der Philosophie ist eine Klärung des Verhältnisses von Sprache und Denken erforderlich. In der traditionellen Logik wurden häufig die logischen Gesetze mit den sogenannten Denkgesetzen identifiziert. Diese Identifizierung hatte in doppelter Hinsicht negative Auswirkungen. Einerseits wurde die Logik mit psychologischem und erkenntnistheoretischem Beiwerk vermengt, und das wirkte sich hemmend auf ihre Entwicklung aus. Andererseits führte diese Identifizierung zu einer vereinfachten Deutung der Denkprozesse. Das menschliche Denken - wie man es im umgangssprachlichen Sinne versteht - ist ein komplexes soziales Phänomen, das von den verschiedensten Wissenschaften untersucht wird. So beschäftigen sich Psychologie, Physiologie der höheren Nerventätigkeit, Neurokybernetik, Erkenntnistheorie und eine Reihe anderer Disziplinen mit den Denkprozessen.

Wie verhält es sich nun mit der Logik? Untersucht auch sie das Denken unter bestimmten Aspekten? Die Antwort auf diese Frage fällt bei den Logikern recht unterschiedlich aus. Eine Identifizierung von Denkgesetzen und Gesetzen der Logik finden wir nicht nur in der psychologisch orientierten traditionellen Logik des vorigen Jahrhunderts, sondern auch in Arbeiten neueren Datums. In der philosophischen, methodologischen und mitunter in der logischen Literatur findet man auch in jüngster Zeit häufig noch Wendungen wie: „Die Sprache ist die Form des Gedankens“ oder „die Aufforderung als Denkform“ oder „Die Logik untersucht die Formen (Strukturen) des richtigen Denkens“ usw. Unseres Erachtens werden diese Wendungen häufig unkritisch und gedankenlos gebraucht. Wenn man versucht, den Sinn beispielsweise der Wendung „Die Sprache ist die Form des Gedankens“ zu erfassen, so stößt man sofort auf Schwierigkeiten. Um die Form eines Gedankens zu bekommen, müßten wir zunächst den Gedanken haben und ihm dann etwas entziehen. Wenn dabei der Anspruch auf Wissenschaftlichkeit erhoben wird, müßte dieser Vorgang außerdem intersubjektiv überprüfbar sein, da sonst allen möglichen subjektiven Spekulationen Tür und Tor geöffnet würden. Unseres Wissens hat bisher aber noch niemand einen Gedanken isoliert wahrgenommen. Einen Gedanken kann man nicht fühlen, sehen, riechen oder hören, er ist kein sinnlich wahrnehmbares Objekt. Wenn man solche Wendungen liest wie „Der Aussagesatz ist der materielle Ausdruck eines Gedankens“, so kann man sich des Eindrucks nicht erwehren, als sei ein Gedanke irgendeine geheimnisvolle, geistige, ausdehnungslose immaterielle Erscheinung, die irgendwo in unserem Kopf angesiedelt ist. Wie dessen Form allerdings ermittelt werden soll, ist zumindest rätselhaft. Die Autoren, die die oben genannten Wendungen publizieren, haben den Dualismus von Geist und Materie, von Gedanke und Sprache noch nicht restlos überwunden. Dieser Dualismus besteht darin, daß man den einheitlichen Menschen in zwei Sphären halbiert, in Körper und Seele (Geist), und sich anschließend abmüht, diese beiden Teile wieder zusammenzusetzen.

Die Postulierung von zwei Seinsbereichen und die unkontrollierbare Verwendung von sogenannten Geistestermini wurde schon von F. M. Voltaire verspottet, wenn er schreibt: „Ich möchte, wenn mein Wille Arme und Beine in Bewegung setzt, auch über die Federkraft Bescheid wissen, durch die mein Wille sie aus ihrer Lage bringt, denn vorhanden ist eine solche Federkraft doch sicherlich. Ich bin zuweilen ganz erstaunt, daß ich meine Augen heben und senken, meine Ohren aber nicht bewegen kann. Ich denke - und ich möchte meine Gedanken ein wenig kennenlernen, sie mit dem Finger berühren. Das müßte recht merkwürdig sein. Ich möchte herausfinden, ob ich selbst meine Gedanken hervorbringe oder ob Gott sie mir eingibt, ob meine Seele in sechs Wochen oder in einem Tag in meinen Körper gekommen ist und wie sie sich in meinem Hirn niedergelassen hat. Und dann möchte ich wissen, ob ich auch denke, wenn ich fest schlafe oder betäubt bin." (Voltaire 1959, S. 315)

In der französischen Aufklärung hat sich E. B. de Condillac am tiefgründigsten mit der Rolle der Sprache für unser Denken beschäftigt. Für ihn hat die Sprache eine konstitutive Funktion für das Denken. Er schreibt: „Es ist der Hauptvorteil meiner Erklärung der Seelenoperationen, daß man einleuchtend sieht, wie der gesunde Menschenverstand, der Geist, die Vernunft und ihre Gegenteile gleichermaßen aus demselben Prinzip hervorgehen, nämlich der Verknüpfung der Ideen untereinander; wenn man den Dingen noch weiter auf den Grund geht, erkennt man, daß diese Verknüpfung durch die Verwendung der Zeichen zustande kommt. Dies ist das Prinzip." (Condillac 1977, S. 133)

In Deutschland trugen die Arbeiten von J. G. Herder, W. v. Humboldt, G. Ch. Lichtenberg u. a. zur Erkenntnis der wesentlichen Rolle der Sprache bei der Überwindung des Dualismus bei. In unserem Jahrhundert vollzog sich durch die Philosophie Ludwig Wittgensteins und die Ausbreitung der analytischen Philosophie endgültig der „linguistic turn", und die fundamentale und konstitutive Rolle der Sprache wird von den meisten Philosophen und Logikern akzeptiert.

Wenn man hingegen sagt, die Sprache drücke die Gedanken aus oder sei die Form des Gedankens, so postuliert man damit implizit zwei verschiedene Seinsbereiche, und es fällt schwer, diesem Dualismus dann zu entfliehen. Mit den besagten Wendungen werden die wirklichen Verhältnisse umgekehrt. Anstatt zu erklären, wie das „Gespenst in die Maschine" kommt (mit dem Terminus „Gespenst in der Maschine" bezeichnet G. Ryle den bisher noch von niemandem wahrgenommenen körperlosen Geist), und ihm seinen gespenstischen Charakter zu nehmen, d. h. zu untersuchen, wie sich die Sprache genetisch herausbildete und sich damit geistige Fähigkeiten der Menschen gegenüber den hochentwickelten Tieren vervielfachten, nimmt man von vornherein den Gegensatz zwischen Körper und Geist an. Man versucht dann, die Sprache, mit deren Hilfe man allein das Denken erklären kann, durch solche Geistestermini wie „Gedanke" etc. zu erklären, die sich bei dieser Vorgehensweise selbst nicht korrekt einführen lassen.

Denken ist eine natürliche Fähigkeit (Eigenschaft) von Menschen, und als solche muß es auch betrachtet werden. Erklären läßt sich die Entstehung dieser Fähigkeit nur, wenn die Entwicklung der menschlichen Sprachfähigkeit berücksichtigt wird. In der Literatur und in der Umgangssprache werden aber Denken und Sprechen (Schreiben) nicht identifiziert, sondern auf verschiedene Art und Weise unterschieden. Eine für die logische Problematik wesentliche Unterscheidung liegt darin, daß wir nicht jedes Reden und Schreiben als bedacht oder durchdacht ansehen, sondern zwischen bedachter und unbedachter Rede, zwischen verworrenem und durchdachtem Schreiben unterscheiden.

Das Sprechen als eine menschliche Lebensäußerung erfüllt die verschiedensten Funktionen. Es reicht von der reinen Konversation bis hin zur strengen wissenschaftlichen Abhandlung. Den durchdachten, kontrollierten Sprachgebrauch, der sich Rechenschaft über die verwendeten Worte ablegt und sich bemüht, die realen Verhältnisse richtig wiederzugeben, kann man als Denken bezeichnen. Die hier angedeutete Unterscheidung ist natürlich sehr vage und auch nicht die einzig mögliche. Trotzdem sehen wir sie für unser Ziel als zweckmäßiger an, als die in der Literatur üblichen. Die Sprache ist eine Schöpfung der Menschen, und zwar nicht eines einzelnen Menschen, sondern ein Produkt der menschlichen Gesellschaft, und ihre Herausbildung ist kein einmaliger Schöpfungsakt, sondern ein langwieriger Prozeß und eine ständige Aufgabe der Gesellschaft. Mit jedem neuen Bereich der Wirklichkeit, den die Menschen sich praktisch erschließen, erweitern sie auch ihre Sprache. Zur Weiterentwicklung der Sprache tragen die Kunst und die verschiedensten Wissenschaften bei. Die Umgangssprache und die Wissenschaftssprachen sowie die in ihnen enthaltenen Regeln bilden die empirische Basis logischer Untersuchungen. Doch seit ihrer Herausbildung als Wissenschaft in der Antike beschränkte sich die Logik niemals auf eine Beschreibung des faktischen Sprachgebrauchs; von ihr wird vielmehr die ständige Aufgabe der Sprachverbesserung auf professioneller Ebene fortgesetzt. Die Logik ist mehr eine konstruierende als eine beschreibende Wissenschaft. Sie arbeitet Vorschläge für präzise sprachliche Regelsysteme aus, die dann, wenn sie zweckmäßig sind, mehr oder weniger in die allgemeine Sprachpraxis eingehen. Richtet man sich in seinem Sprechen und Schreiben nach den in der Logik aufgestellten Normen und Regeln, so spricht und schreibt man in dieser Hinsicht bedacht. Insofern in unserem Nachdenken logische Operatoren, logische Operationen mit Termini und Aussagen eine Rolle spielen, betrifft die Logik schon unser Denken, und man könnte die logischen Gesetze in diesem Sinne als Denkgesetze ansehen. Doch man kann sein Reden und Schreiben auch unter ganz anderen Gesichtspunkten bedenken. Und mit den Naturgesetzmäßigkeiten, die jene sich in unserem Hirn vollziehenden Prozesse charakterisieren, haben die logischen Gesetze gar nichts zu tun. Deshalb ist es unzweckmäßig und irreführend, logische Gesetze als Denkgesetze zu bezeichnen.

2.2 Logik und Ontologie

Ein Behauptungssystem, in dem logische Regeln fixiert werden, ist ein System von Behauptungen über Termini, Aussagen sowie logische Operatoren. Logische Regeln behaupten nichts über die Gegenstände und Sachverhalte, die mit Termini bezeichnet werden und über die in Aussagen gesprochen wird.

In vielen Fällen kann man logischen Regeln aber die Form von Behauptungen über die Gegenstände und Sachverhalte geben, worauf sich die Termini, logischen Operatoren und Aussagen beziehen, d. h. die Form ontologischer Behauptungen. Aus den beiden Aussagen „Alle Metalle leiten den Strom“ und „Kupfer ist ein Metall“ kann man nach der logischen Regel $\forall a(a \leftarrow P) \wedge (b \rightharpoonup a) \vdash (b \leftarrow P)$ die Aussage „Kupfer leitet den Strom“ erschließen. Dieser Regel kann man aber auch folgende ontologische Formulierung geben: Wenn alle Objekte a das Merkmal P haben und das Objekt b ein a ist (a genannt wird), so hat das Objekt b das Merkmal P. Der logischen Regel „Aus der Aussage $A \wedge B$ folgt logisch die Aussage $B \wedge A$“ ($A \wedge B \vdash B \wedge A$) läßt sich die Form folgender ontologischer Behauptung geben: „Wenn ein Sachverhalt $A \wedge B$ existiert, so existiert ein Sachverhalt $B \wedge A$“. Viele Behauptungen der Logik haben auch ohne sprachliche Umformungen die Form ontologischer Behauptungen, so beispielsweise die Behauptungen „entweder A oder $\sim A$“, „Es ist unmöglich, daß A und $\sim A$“, „a ist identisch mit a“, „wenn A, so $\sim\sim A$“, „Es ist nicht möglich, daß weder A noch $\sim A$“ usw. Eine solche Ontologisierung der Gesetze der Logik ergibt sich aber nicht aus der Natur dieser Gesetze, sondern hängt von anderen Umständen ab, insbesondere von unserer Bequemlichkeit im Sprachgebrauch und von der fast selbstverständlich gewordenen Gewohnheit, den Inhalt unserer Aussagen auf die mit den in ihnen vorkommenden Termini bezeichneten Gegenstände zu beziehen. Logische Gesetze werden durchaus nicht deshalb akzeptiert, weil die uns umgebende Welt so beschaffen ist, wie in ihnen ausgesagt wird. Sie sind keine Verallgemeinerungen von Beobachtungsresultaten, sondern sie werden ausschließlich deshalb akzeptiert, weil sie Teile der Definition der in ihnen vorkommenden logischen Operatoren oder Folgerungen aus solchen Definitionen sind. So werden die Operatoren „und“, „oder“, „nicht“ usw. gerade so in den Sprachgebrauch eingeführt, daß die Behauptungen „entweder A oder $\sim A$“, „wenn A, so $\sim\sim A$“ usw. für beliebige Aussagen gelten. Und wenn wir behaupten, daß wir in der Welt nirgendwo und nirgendwann eine Situation antreffen, für die eine Aussage der Form „$A \wedge \sim A$" wahr ist, so gründet sich unsere Überzeugung durchaus nicht darauf, daß wir die Welt zu allen Zeiten an allen Orten untersucht haben, sondern ausschließlich darauf, daß wir die Operatoren „und" und „nicht" für Aussagen gerade so verwenden, daß ein Akzeptieren der Möglichkeit einer Situation $A \wedge \sim A$ einfach nicht zulässig ist. Dies ist schon allein daraus ersichtlich, daß wir uns vollkommen sicher sind, einen Fehler begangen zu haben, wenn wir in unseren Überlegungen scheinbar gezwungen sind, eine Aussage der Form $A \wedge \sim A$ zu akzeptieren.

Kurz gesagt, den logischen Regeln liegen keine ontologischen Annahmen zugrunde. Das Bestreben, den logischen Regeln die Rolle ontologischer Gesetze zuzuschreiben oder irgendwelche ontologischen Gesetze zu suchen, um die logischen Gesetze zu begründen, führt nur zu vielen Schwierigkeiten und Ungereimtheiten in der Philosophie und verwirrt ziemlich einfache Dinge. Die logischen Regeln haben ihre Grundlage ausschließlich in der Rolle, die die Sprache im Leben und in der Tätigkeit der Menschen spielt. Wenn irgendwelche Gegenstände (die sprachlichen Zeichen) beginnen, im Leben der Menschen die Rolle von Termini, Aussagen und logischen Operatoren zu spielen, so ergibt sich aus dieser Rolle selbst, daß für sie die in der Logik fixierten Regeln gelten. Natürlich zwingt die Erkenntnispraxis die Menschen, eine bestimmte Art von logischen Operatoren und bestimmte Strukturen von Termini und Aussagen in den Gebrauch einzuführen. Man trifft praktisch bestimmte Situationen an, in denen die einen Gegenstände andere ausschließen, in denen Gegenstände nebeneinander existieren usw., und diese Situationen dienen als Ausgangspunkt für die Einführung der entsprechenden logischen Operatoren in den Gebrauch. Von dem Bereich der Welt, der mit Hilfe von Termini und Aussagen beschrieben wird, hängt es ab, welche logischen Operatoren und welche Typen von Termini und Aussagen für dieses Ziel ausgewählt werden. Dies hat jedoch keinerlei Einfluß auf das oben Gesagte, denn wir sprachen nur von den Regeln zum Operieren mit Termini, Aussagen und Operatoren und nicht darüber, warum sie auftreten und warum gerade sie und nicht andere verwendet werden.

Als Beispiel für eine ontologische Auffassung logischer Gesetze betrachten wir die Meinung B. Russells. Er wendet sich gegen die Auffassung logischer Gesetze als Denkgesetze und argumentiert wie folgt: „Der Name ‚Denkgesetze' ist ebenfalls irreführend; denn es kommt nicht darauf an, daß wir in Übereinstimmung mit ihnen denken, sondern es kommt darauf an, daß das Verhalten der Dinge ihnen entspricht, mit anderen Worten: der Punkt ist, daß wir *richtig* denken, wenn wir in Übereinstimmung mit ihnen denken." (Russell 1969, S. 65) Zur Begründung betrachtet er den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: „Nichts kann zugleich sein und nicht sein" oder genauer „Nichts kann gleichzeitig eine bestimmte Eigenschaft haben und nicht haben". Dieses Prinzip wird häufig deshalb ein Denkgesetz genannt, weil wir uns von seiner Notwendigkeit durch Denken und nicht durch Beobachtung der Außenwelt überzeugen. Wir führen ein längeres Zitat an, um die Argumentationsweise Russells für eine ontologische Auffassung logischer Gesetze zu verdeutlichen. „Wenn wir einmal gesehen haben, daß ein Baum eine Buche ist, brauchen wir nicht noch einmal hinzusehen, um sicher zu sein, daß er nicht auch gleichzeitig keine Buche ist; der Gedanke allein gibt uns zu erkennen, daß so etwas unmöglich ist. Trotzdem ist die Folgerung, daß der Satz vom Widerspruch ein Denkgesetz ist, falsch. Was wir glauben, wenn wir an den Satz vom Widerspruch glauben, ist nicht, daß unser Bewußtsein so konstruiert ist, daß es den Satz vom Widerspruch für wahr halten muß. Diese Ansicht ist erst das Ergebnis einer psychologischen Reflexion, die den Glauben an den Satz vom Widerspruch schon voraussetzt. Der Glaube an den Satz vom Widerspruch betrifft Dinge, nicht bloß Gedanken. Wir glauben z. B. nicht, daß wir nicht gleichzeitig denken könnten, ein Baum wäre eine Buche und auch keine Buche. Wir glauben, daß, wenn der Baum eine Buche ist, er nicht gleichzeitig keine Buche sein kann. Der Satz vom Widerspruch ist also ein Satz über Dinge und nicht bloß über Gedanken; und wenn auch der Glaube an den Satz vom Widerspruch ein

Gedanke ist, so ist doch der Satz vom Widerspruch selbst kein Gedanke, sondern ein Faktum, das die Dinge der Außenwelt betrifft. Wenn das, was wir glauben, wenn wir an den Satz vom Widerspruch glauben, nicht auf die Dinge der Außenwelt zuträfe, würde der Umstand, daß wir gezwungen sind, so zu denken, nicht garantieren, daß der Satz vom Widerspruch nicht falsch sein kann, und das zeigt, daß es sich bei diesem Satz nicht um ein Denkgesetz handeln kann.“ (Russell 1969, S. 78 f.)

Wir akzeptieren die Auffassung Russells, daß logische Gesetze keine Denkgesetze sind. Wir haben aber auch bereits gezeigt, in welchem Sinne logische Gesetze im Denken eine Rolle spielen. Die Auffassung Russells, nach der logische Gesetze Aussagen über die Dinge der Außenwelt darstellen, können wir allerdings nicht akzeptieren, und Russell liefert zum Teil selbst die Argumente gegen eine solche Auffassung. Russell sagt, daß man das Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch nicht durch Beobachtung der Außenwelt gewinnt. Wenn wir es aber als gültig einsehen können, ohne die Außenwelt zu beobachten, dann gibt es uns auch keine Information über die Außenwelt. Die Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch ergibt sich einzig und allein aus der Festlegung der Verwendungsweise der sprachlichen Zeichen „und“ und „nicht“. Diese Operatoren werden gerade so eingeführt, daß der Satz $\sim(A \wedge \sim A)$ gültig ist. Natürlich hat der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch und auch der Satz vom ausgeschlossenen Dritten $A \vee \sim A$ die Form einer ontologischen Behauptung. Wenn diese Sätze aber ontologische Feststellungen sein sollen, woher haben wir dann die Gewißheit ihrer uneingeschränkten Gültigkeit? Alle generellen Sätze über die Welt, die sich nicht aus sprachlichen Festlegungen ergeben, haben keine absolute Gewißheit. Es ist immer die Möglichkeit offen, daß in der Natur doch noch ein Gegenbeispiel auftritt, das den betreffenden generellen Satz widerlegt, mag die Wahrscheinlichkeit dieser Möglichkeit auch noch so gering sein. Die genannten logischen Gesetze können gerade deshalb nicht durch die Erfahrung widerlegt werden, weil sie eben keine echten Aussagen über die Realität sind. Sie haben nur die Form von Aussagen über die Welt, sind aber wahr allein auf Grund der Eigenschaften der in ihnen vorkommenden logischen Operatoren und liefern uns deshalb auch keine Informationen über die nichtsprachliche Außenwelt.

Neben der Auffassung der Logik als Lehre von den allgemeinen Gesetzmäßigkeiten des Seins wird auch noch eine andere ontologische Deutung logischer Gesetze vertreten. Man behauptet, es gäbe nicht nur eine Logik, die die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten des Seins beschreibe, sondern für verschiedene Bereiche der Wirklichkeit gäbe es verschiedene Logiken. So unterscheidet man etwa in der intuitionistischen Richtung der mathematischen Grundlagenforschung zwischen einer Logik für endliche und einer Logik für unendliche Bereiche, oder im Zusammenhang mit gewissen methodologischen Schwierigkeiten der modernen Physik spricht man von einer besonderen Logik der Mikrophysik im Unterschied zur üblichen Logik der Makrophysik. Neben den Ungereimtheiten, die sich bei jeder ontologischen Deutung logischer Gesetze ergeben, entstehen hier noch zusätzliche Schwierigkeiten. Wir verweisen hier nur auf folgendes Dilemma, das sich aus einem Akzeptieren von sogenannten bereichsspezifischen Logiken ergibt. Um einen Bereich der Wirklichkeit zu beschreiben, benötigt man eine Logik (Sprachform). Wenn aber die jeweilige Logik vom Charakter (der Beschreibung) des jeweiligen Bereiches abhängt, wie soll man dann die zur Beschreibung dieses Bereiches notwendige Logik auswählen? Es ergibt sich folgende ausweglose Situation: Zur Beschreibung muß man eine Logik haben, aber um zu wissen, welche Logik, muß man vorher eine Beschreibung des betreffenden Bereiches haben. Man kommt also weder zu einer Logik noch zu einer Beschreibung des betreffenden Bereiches. Ausführlicher betrachten wir diese Problematik im nächsten Abschnitt.

2.3 Die Universalität logischer Regeln

Wie wir bereits sagten, stellt die Logik solche Regeln für Termini, Aussagen und logische Operatoren auf, die nicht davon abhängen, zu welcher Sprache die Termini, Aussagen und Operatoren gehören. Es gibt keine spezielle Logik für Deutsche, Engländer, Russen usw. Es gibt auch keine spezielle Logik für Mathematiker, Physiker, Mikrophysiker, Makrophysiker, Politiker, Juristen usw., denn die Logik findet das, was sie sucht: Regeln, die unabhängig von der Form der Sprache und von dem Gegenstandsbereich sind, für den die Sprache ausgearbeitet wird. Auf Grund der Orientierung der Logik und der von ihr verwendeten Methoden sind also die von ihr formulierten Regeln (Gesetze) universal.

Wenn wir einen bestimmten logischen Operator α so eingeführt haben, daß nach seiner Definition eine gewisse Regel R für die ihn enthaltenen Termini und Aussagen gilt, so kann es keinen Fall geben, in dem der Operator α verwendet wird und die Regel R sich als fehlerhaft erweist. Angenommen, wir haben den Operator $\wedge$ so definiert, daß für beliebige Aussagen A, B und C die Regeln gelten:

1) aus $A \wedge B$ ist ableitbar $B \wedge A$;
2) aus $A \wedge B$ ist ableitbar A;
3) aus $A \wedge B$ ist ableitbar B;
4) aus $(A \wedge (B \wedge C))$ ist ableitbar $((A \wedge B) \wedge C)$ und umgekehrt.

Die Frage, welche Eigenschaften der Operator $\wedge$ hat, müssen wir im Falle dieser Definition wie folgt beantworten: Dieser Operator ist so beschaffen, daß für ihn die Regeln 1-4 gelten. Es ist vollkommen offensichtlich, daß es jetzt sinnlos ist, Fälle zu suchen, in denen eine der Regeln 1-4 fehlerhaft ist. Wenn wir entscheiden, daß eine dieser Regeln zu verwerfen ist, so bedeutet das nur: Entweder wir verwechseln den Operator $\wedge$ mit irgendeinem anderen, oder in der vorliegenden Situation ist ein neuer Operator nötig, der dem Operator $\wedge$ ähnlich ist, sich aber von ihm unterscheidet, oder wir haben implizit von der früher getroffenen Definition des Operators Abstand genommen. Es existiert jedoch die Meinung, daß die Gesetze der Logik nicht universal seien, d. h., es werden Fälle zugelassen, in denen ein und dasselbe Gesetz der Logik in einem Erkenntnisbereich zu richtigen und in anderen Erkenntnisbereichen zu falschen Resultaten führt. Mit anderen Worten, man läßt zu, daß die logischen Gesetze Ausnahmen haben und vom Gegenstandsbereich abhängen. So stammt noch aus dem vorigen Jahrhundert die Tradition, logische Widersprüche in bezug auf Übergangszustände von Objekten als berechtigt zuzulassen (hierbei wird zugelassen, daß Aussagen der Form „$A \wedge \sim A$“ für einige Aussagen A wahr sein können). In der modernen logisch-philosophischen Literatur kommen noch die Beschränkungen des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten und der Beseitigungsregel der doppelten Negation hinzu (hierbei wird zugelassen, daß Aussagen der Form $A \vee \sim A$ und „Wenn $\sim\sim A$, so A“ nicht immer wahr sind) sowie eine Einschränkung des Gesetzes der Kommutativität (hierbei wird angenommen, daß eine Umstellung von A und B in Aussagen der Form „A und B“ nicht immer berechtigt ist) und anderer logischer Gesetze.

In diesem Zusammenhang ergeben sich folgende Fragen: 1) Warum sieht man gerade diese logischen Gesetze („$A \vee \sim A$“, „Es ist unmöglich, daß A und $\sim A$“ usw.) als nichtuniversal an und nicht andere? 2) Können auch noch Fälle auftreten, wo sich zusätzlich noch andere logische Gesetze als nichtuniversal erweisen? 3) Gibt es trotzdem noch logische Gesetze, die universal gültig bleiben? 4) Wo liegt die Grenze zwischen universalen und nichtuniversalen logischen Gesetzen? Auf diese Fragen darf man keine vernünftigen Antworten erwarten, denn ein Akzeptieren der Nichtuniversalität logischer Regeln ist eine Frucht von Mißverständnissen. Logische Gesetze lassen ihrer eigenen Natur nach (der Methode ihrer Aufstellung nach) keine

Ausnahmen zu und hängen nicht von den Besonderheiten dieses oder jenes Erkenntnisbereiches ab. Von den Besonderheiten der Erkenntnisbereiche hängt nur ab, welche der bekannten und möglichen logischen Gesetze verwendet werden. Die „Fakten", auf die sich die Vertreter der Konzeption der Nichtuniversalität logischer Gesetze stützen, sind ein Ergebnis der Verwechselung verschiedener logischer Formen.

Es ist charakteristisch, daß unter den Vertretern der nichtuniversalen Logikkonzeption keine Einmütigkeit darüber besteht, welche logischen Gesetze als nichtuniversal anzusehen sind. Die einen verwerfen das Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch, lassen aber die Regel zur Beseitigung der doppelten Negation, die kommutativen Gesetze usw. gelten, während andere das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten verwerfen und das Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch gelten lassen.

Die Illusion, logische Regeln seien nichtuniversal, entsteht teilweise auch deshalb, weil die logischen Operatoren nicht ausreichend streng definiert sind, die entsprechenden sprachlichen Ausdrücke mehrdeutig und verschwommen sind (in verschiedenen Bedeutungen verwendet werden), oder weil den Personen, die sich mit den gegebenen logischen Operatoren beschäftigen, ihre strengen Definitionen nicht bekannt sind oder weil sie gar nicht die Möglichkeit solcher Definitionen sehen. Eine bedeutende Rolle spielt hier auch der Sensationsdrang und der Wunsch, in der Wissenschaft auch dort einen Umsturz zu vollziehen, wo ein solcher unsinnig und unmöglich ist. Die Position der Logik ist in allen diesen Fällen genau bestimmt: Sie hat die Aufgabe, die logischen Mittel der Sprache so zu bearbeiten, daß jeder Anlaß zum Zweifel an der Universalität logischer Regeln beseitigt wird.

2.4 Universalitäts- versus Toleranzprinzip

Die Gegner der Universalität logischer Regeln berufen sich oft auf das Toleranzprinzip in der Logik. Die prägnanteste Formulierung erhielt dieses Prinzip wohl durch R. Carnap in seiner Arbeit „Logische Syntax der Sprache" (Carnap 1934). Nachdem er einige negative Forderungen von Brouwer, Kaufmann und Wittgenstein beschrieben hat, durch die gewisse übliche Sprachformen - Ausdrucksweisen und Schlußweisen - ausgeschaltet werden sollen, gibt er seiner Einstellung zu solchen Forderungen allgemein folgenden Ausdruck: „Wir wollen nicht Verbote aufstellen, sondern Festsetzungen treffen. Einige der bisherigen Verbote haben das historische Verdienst, daß sie auf wichtige Unterschiede nachdrücklich aufmerksam gemacht haben. Aber solche Verbote können durch eine definitorische Unterscheidung ersetzt werden." (Carnap 1934, S. 44-45) Und weiter: „In der Logik gibt es keine Moral. Jeder mag seine Logik, d. h. seine Sprachform aufbauen wie er will. Nur muß er, wenn er mit uns diskutieren will, deutlich angeben, wie er es machen will, syntaktische Bestimmungen geben anstatt philosophischer Erörterungen." (ebenda, S. 45)

Carnap gab diesem Prinzip seinen eingängigen Namen *Toleranzprinzip*, weist aber darauf hin, daß es von Karl Menger zuerst formuliert wurde. In seinen „Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics" gibt dieser in einem einleitenden Abschnitt unter dem Titel „Logical Tolerance in the Vienna Circle" eine ausführlichere Charakteristik dieses Prinzips und skizziert kurz seine Geschichte. Menger hatte mehrere Jahre mit L. E. J. Brouwer zusammengearbeitet, und es ist offensichtlich, daß die Konkurrenzsituation zwischen der klassischen Logik, die im Grundlagenstreit der Mathematik vor allem von Hilbert und seiner Schule - den sogenannten Formalisten - vertreten wurde, und der intuitionistischen Logikkonzeption (von einer intuitionistischen Logik kann man ja zu dieser Zeit noch nicht sprechen) der Hauptgrund für die Formulierung des Toleranzprinzips war. Menger berichtet, daß er im Frühjahr 1927 am Schluß seines intuitionistisch-formalistischen Wörterbuches der Mengenlehre, in dem viele

Brouwersche Begriffsbildungen mit denen der klassisch orientierten Mengenlehre verglichen und Übersetzungsvorschläge gemacht wurden, hervorgehoben hat, daß das Wort „Konstruktivität“ wahrscheinlich auf verschiedene Weise und in verschiedenen Graden definiert werden kann. Diese Idee wurde von Menger in seinem Aufsatz „Der Intuitionismus“ weiter ausgebaut, und er faßt sie wie folgt zusammen:

1. Für jede der verschiedenen Versionen der Konstruktivität läßt sich eine korrespondierende Mathematik, lassen sich insbesondere auch Systeme, die noch stärker beschränkt sind als die intuitionistische Mathematik, entwickeln.

Die spätere Entwicklung der intuitionistischen Logik und Mathematik hat Mengers Voraussage in diesem Punkt bestätigt. Heute gibt es innerhalb des Intuitionismus und Konstruktivismus die verschiedensten Strömungen, sowohl bezüglich der verwendeten Logik als auch bezüglich des Konstruktivitätsbegriffs.

2. Das Beharren auf einer speziellen Idee der Konstruktivität, die Auszeichnung der entsprechenden Entwicklungen als sinnvoll und die Verwerfung von transzendierenden Ergebnissen als sinnlos haben nicht den geringsten kognitiven Inhalt und müssen von der Logik und Mathematik in die Biographie des Proponenten verwiesen werden.

Menger nennt diese Auffassung ein *Toleranzprinzip zweiter Ordnung,* das eine Toleranz durch doppelte Negation ausdrückt. Da man über keinen klaren Begriff von „sinnvoll“ verfügt, ist die Auszeichnung eines speziellen Konstruktivitätsbegriffs als allein sinnvoll dogmatisch und muß ihrerseits verworfen werden.

3. Sache der Mathematik und Logik ist ausschließlich die Frage nach den Aussagen, in die bestimmte andere Aussagen nach bestimmten Regeln umgeformt werden können, während die Begründung der Aussagen und Umformungsregeln durch einen Appell an die Intuition „nichts als leere Worte sind“. Menger nennt diese Auffassung den *implikationistischen Standpunkt.*

In seinem Artikel „Die neue Logik“ (1933) entwickelt er diese Ideen weiter und unterstreicht:

4. Die echte Aktivität des Mathematikers besteht in der Umformung von Aussagen, die auf verschiedenen Wegen ausgewählt sein können, aber klar angegeben sein müssen, in andere Aussagen mit Hilfe von Umformungsregeln, die auf verschiedenen Wegen ausgewählt werden können, aber klar angegeben sein müssen.

5. Diese einfache Tatsachenfeststellung ist alles, was Mathematik und Logik über diese Aktivität sagen können, die eine Begründung weder benötigt noch einer Begründung fähig ist.

Soweit die Formulierung des Mengerschen Toleranzprinzips. Bevor wir uns kritisch mit ihm auseinandersetzen, seien noch einige historische Anmerkungen gemacht, die sich im wesentlichen auch auf Mengers Ausführungen stützen. 1927 kam Menger als Professor für Geometrie nach Wien, nachdem er zwei Jahre lang als Dozent an der Universität Amsterdam zusammen mit Brouwer gearbeitet hatte. Er war stark von Brouwer beeinflußt, obwohl er in dieser Zeit dabei war, sich von dessen Auffassungen zu lösen. Er beteiligte sich an den Beratungen des Wiener Kreises um M. Schlick. Wohl unter dem Einfluß von L. Wittgenstein sprachen Schlick, Carnap, F. Waismann und auch H. Hahn ständig von der Sprache und der Logik. Menger, damals wohl einer der besten Kenner sowohl der intuitionistischen als auch der formalistischen und logizistischen Richtung im Grundlagenstreit der Mathematik, stellt diese Einheit der Sprache und der Logik in Frage und vertritt die Gedanken seines Toleranzprinzips. Anfangs waren alle Mitglieder des Wiener Kreises, mit Ausnahme von K. Gödel, der Mengers Ansichten mit „einem Kopfnicken“ unterstützte, gegen die Auffassung Mengers. Erst nach längeren Diskussionen setzt sich Mengers Ansicht durch und erhält 1934 in Carnaps „Logische Syntax der Sprache“ ihre oben angegebene klassische Formulierung. Doch Carnap schreibt in diesem Buch auch:

„Die hier genannte tolerante Einstellung dürfte, bezogen auf spezielle mathematische Kalküle, den meisten Mathematikern naheliegen, ohne daß man sie ausdrücklich auszusprechen pflegt." (Carnap 1934, S. 45)

Das ärgerte Menger natürlich, und er konterte 1937: „Ich wäre glücklich gewesen, wenn Carnap recht gehabt hätte, aber da die prominenten Mathematiker (Poincaré, die Pariser Schule zu Beginn unseres Jahrhunderts, Hilbert, Weyl, Brouwer), die sich mit den Grundlagen der Mathematik beschäftigt haben, explizit Meinungen äußerten, die - soweit sie auch sonst voneinander abweichen - alle dem oben genannten Prinzip diametral entgegengesetzt waren, bedaure ich, daß ich die Verantwortung alleine tragen muß." (Menger 1979, S. 13) Menger läßt es sich auch nicht nehmen, Carnaps schlechtes Gedächtnis in bezug auf das Toleranzprinzip hervorzuheben, da dieser 30 Jahre später in seiner „Intellectual Autobiography", im Abschnitt „The Beginning of my Work in Philosophy" das Toleranzprinzip erwähnt und hinzufügt, daß die in ihm ausgedrückte Haltung während seines ganzen Lebens die gleiche geblieben sei (Schilpp 1963, S. 18).

Leider hat sich die in dem Menger-Carnapschen-Toleranzprinzip ausgedrückte Haltung bei vielen Mathematikern, Logikern und Philosophen durchgesetzt. Toleranz ist eine lobenswerte menschliche Eigenschaft, Intoleranz ist unangenehm, zeugt von fanatischer und dogmatischer Haltung und ist deshalb abzulehnen. So trug die suggestive Namensgebung sicher zur weiten Verbreitung der in diesem Prinzip ausgedrückten Auffassung bei. Doch wie sind die Beziehungen von Toleranz und wissenschaftlicher Objektivität? Schließt Toleranz in der Wissenschaft Objektivität ein oder aus? In Lessings klassischer Ringparabel geht es darum, welche der drei großen Religionen die wahre sei. Da sich mit Argumenten keiner der Vertreter der verschiedenen Religionen von der Richtigkeit einer anderen Religion überzeugen läßt, lautet Lessings Botschaft, daß man sich wegen unterschiedlicher religiöser und weltanschaulicher Auffassungen nicht hassen und bekriegen soll, sondern auch in dem Andersdenkenden den Menschen achten und das Menschliche in dessen Religion und Weltanschauung sehen soll. Eine so aufgefaßte Toleranz schließt natürlich eine Argumentation über die unterschiedlichen Auffassungen ein und nicht aus. Unterbleibt die Kommunikation und Argumentation, so artet Toleranz in Gleichgültigkeit aus, d. h. wird zu einer schlimmen Form von Intoleranz. Wie jede Form der menschlichen Gemeinschaft erfordert auch die Wissenschaft Toleranz. Ohne eine gewisse Form der Toleranz ist eine sprachliche Kommunikation und so auch Wissenschaft nicht möglich. Wissenschaftliche Toleranz ist explizit dann erforderlich, wenn das vorhandene Wissen oder die technischen Möglichkeiten nicht ausreichen, um eine Entscheidung über die Richtigkeit von konkurrierenden Auffassungen herbeizuführen. Toleranz schließt hier immer das Akzeptieren von Tatsachen, die Bereitschaft zur Änderung der eigenen Meinung und das Offensein für Argumente des Andersdenkenden ein. Bei Wissenschaften, die abbildenden Charakter haben, den Natur- und Gesellschaftswissenschaften, hat das Tolerieren von anderen Auffassungen im allgemeinen nur zeitweiligen Charakter, so lange, bis eine Entscheidung über die Wahrheit oder Falschheit der konkurrierenden Auffassungen möglich ist. Da sich im Grundlagenstreit der Mathematik alle Vertreter bei sonst unterschiedlichen und gegensätzlichen Meinungen einig waren, daß Mathematik und Logik keinen abbildenden Charakter haben, lag hier die Problematik anders als in den Natur- und Gesellschaftswissenschaften. Sieht man sich die faktische Situation in der mathematischen Grundlagenforschung zur Zeit der Formulierung des Toleranzprinzips an, so ist es nicht verwunderlich, daß Menger und Carnap Toleranz predigten. Beide Richtungen im mathematischen Grundlagenstreit waren durch einen herausragenden Mathematiker repräsentiert. Auf der einen Seite stand Hilbert als Hauptvertreter des Formalismus und auf der anderen Brouwer als Hauptfigur des Intuitionismus. Beide Schulen erzielten hervorragende Ergebnisse in der mathematischen Forschung. Beide hatten philosophisch grundsätzlich verschiedene

Auffassungen, und ihre Logik unterschied sich wesentlich, sowohl im Konzept als auch in den akzeptierten Regeln. Das Toleranzprinzip lag faktisch in der Luft, zumal die Polemik zwischen beiden Richtungen zum Teil sehr scharfe Formen annahm.

Wenn wir auch das Toleranzprinzip in seiner ganzen Tragweite ablehnen, so enthalten die Auffassungen von Menger und Carnap, die in ihrer Gesamtheit das Toleranzprinzip bilden, doch viele richtige Gedanken. Zunächst ist Menger darin zuzustimmen, daß der Konstruktivitätsbegriff unklar ist und daß verschiedene Explikationen dieses Begriffes möglich sind. Einmal gab die faktische Entwicklung der konstruktiven Mathematik Menger in diesem Punkte recht, zum anderen sind mit diesem Begriff auch heute noch viele philosophische und mathematische Schwierigkeiten verbunden. Widersprechen möchten wir in diesem Zusammenhang aber der Mengerschen Auffassung, daß der weiteste Konstruktivitätsbegriff die Forderung nach bloßer Widerspruchsfreiheit sei und daß dieser Konstruktivitätsbegriff gegenüber den engeren durch ästhetische Eigenschaften der zugehörigen Mathematik ausgezeichnet sei. Wir teilen hier völlig die Meinung von Ch. Thiel, der schreibt: „... daß wir die von Menger hier genannte bloße Widerspruchsfreiheit nicht als konstruktiv in einem begreifbaren Sinne anerkennen können" (Thiel 1972, S. 172-173).

Würde man die Mengersche Auffassung akzeptieren, so würde damit die ganze Unterscheidung zwischen konstruktiven und nichtkonstruktiven Beweisen sinnlos und damit wäre der Konstruktivitätsbegriff selbst hinfällig.

Im weiteren beschränken wir unsere Überlegungen allein auf Probleme des Toleranzprinzips, die mit der Logikauffassung zusammenhängen. In bezug auf die Begründungsproblematik der Logik bin ich der Meinung, daß alle Begründungsversuche der Logik aus einem philosophischen Prinzip letztlich zirkulär und darum unzureichend sind. Es wird immer mehr vorausgesetzt als begründet. Weiter ist die Auffassung von Carnap natürlich richtig, daß jeder Logiker (und erst recht jeder Mathematiker) das Recht hat, beliebige logische (und mathematische) Kalküle aufzubauen, wobei er die Regeln für diese Konstruktionen korrekt anzugeben hat. Heute herrscht in dieser Hinsicht in der Logik gewiß kein Mangel. Wir sind auch der Meinung, daß diese zum Teil rein formalen Aufbauten keine bloßen Spielereien sind. Ein Teil dieser Kalküle findet sicher einmal vernünftige Anwendungen. Das bedeutet jedoch nicht, daß die vorhandenen oder möglichen logischen Kalküle gleichberechtigt sind und daß logische Regeln willkürlich wählbar und überhaupt nicht begründet werden können und müssen. In diesen Punkten halten wir die Auffassungen von Carnap und Menger für falsch und schädlich. Und sie verdienen nicht den Namen *Toleranzprinzip*, sondern eher den Namen *Indifferenz-* oder *Gleichgültigkeitsprinzip.*

In seinem Essay „The Prevalenz of Humbug" führt Max Black ein interessantes Beispiel für Humbug an. Eine amerikanische Journalistin sagte in einem Radiointerview über eine Schriftstellerin, daß jedes Wort, das jene schreibe, eine Lüge sei, einschließlich der Worte „and" und „the" (Black 1983, S. 117).

Wir wollen hier nicht die Humbugproblematik behandeln, doch unterbreiten wir M. Black den Vorschlag, für eine Neuauflage seines brillanten Essays das Toleranzprinzip als treffendes Beispiel für Humbug zweiter Ordnung (da wir im Deutschen kein passendes Wort für Humbug haben, können wir Humbug zweiter Ordnung nur mangelhaft mit Selbstbetrug erläutern) aufzunehmen. Denn es ist sicher, daß selbst die eifrigsten Vertreter des Toleranzprinzips natürlich der Auffassung sind, daß ihre eigene Logik zumindest in bestimmter Hinsicht die bessere sei. Doch kommen wir auf das Beispiel der Journalistin zurück. Abgesehen davon, daß einzelne Worte im allgemeinen keine Lüge sein können, außer als Antwort auf eine Frage oder wenn sie ein Befinden vortäuschen sollen, das man in Wirklichkeit nicht hat, macht der offensichtliche Humbug des Beispiels deutlich, daß jede Sprache Worte enthält, deren Gebrauch durch die Gemeinschaft so geregelt ist, daß man ihn nicht willkürlich abändern kann. Zu diesen Worten gehören solche logischen Worte (logischen Operatoren) wie „und“, „oder“, „nicht“, „alle“ usw. Die Untersuchung der Verwendungsweise solcher logischen Operatoren bildet den Ausgangspunkt jeder echten logischen Untersuchung. Wir wollen damit nicht sagen, daß die Logik als Wissenschaft die „inhärenten logischen Regeln“ der natürlichen Sprache abbildet und beschreibt. Diese Behauptung wäre wieder Humbug, und wir brauchten keine Logik als Wissenschaft. Der Logiker setzt vielmehr den eher spontanen Sprachbildungsprozeß in bestimmten Aspekten mit professionellen Mitteln fort. Er entdeckt Mehrdeutigkeiten in der Sprache, unvollständige sprachliche Regelungen, die er vervollständigt, er baut ganze Theorien auf. Die Entfernung seiner theoretischen Probleme und Konstruktionen von seiner empirischen sprachlichen Basis kann sehr groß sein. Aber ein Kontakt zur sprachlichen Basis muß immer vorhanden sein. Die Aufgabe des Logikers ist es, Systeme von logischen Regeln zu entwerfen, die universell gelten. Damit ist gemeint: Eine logische Regel muß so beschaffen sein, daß sie ohne Ausnahme (universell) stets von wahren Prämissen zu wahren Folgerungen führt, unabhängig davon, über welchen Gegenstandsbereich in den Prämissen und Folgerungen gesprochen wird. Diese Forderung kann man das *Universalitätsprinzip* nennen. Es ist keine moralische Feststellung, und insofern hat es einen anderen Charakter als das Carnapsche Toleranzprinzip. Wir stimmen Carnap zu: In der Logik gibt es keine Moral, und sein Toleranzprinzip gehört natürlich auch nicht zur Logik. Das Universalitätsprinzip ist aber auch keine faktische Feststellung in dem Sinne, daß alle Regeln und Theoreme, die in der Wissenschaft der Logik aufgestellt werden, diese Forderung erfüllen. Im Gegenteil, die faktische Situation in der Logik ist in dieser Hinsicht erschreckend, die Konzeption sogenannter bereichsspezifischer Logiken oder allgemeiner sogenannter alternativer Logiken ist sehr weit verbreitet. Ich bin mir bewußt, daß die Rede von „Logiken“ sprachwidrig ist, denn der Duden läßt den Plural von „Logik“ nicht zu. Das Universalitätsprinzip ist eine definitorische Festsetzung, was man unter einer logischen Regel zu verstehen hat. Wenn wir also eine Sprachregel haben, die in einem Erkenntnisbereich von wahren Voraussetzungen zu wahren Folgerungen führt und in einem anderen Erkenntnisbereich nicht, so ist diese Sprachregel keine logische. Bestreitet man die Universalität logischer Regeln und läßt man entsprechend dem Carnapschen Toleranzprinzip zu, daß jeder seine eigene Logik wählt, so führt das zu einer Zerstörung der Logik als Wissenschaft und degradiert sie zu einer reinen intellektuellen Spielerei. Deshalb muß man auch eine dem Universalitätsprinzip entsprechende moralische Forderung an die Logiker richten, die Einheit ihrer Wissenschaft anzustreben und zu hüten, denn nur eine einheitliche Logik kann auch praktisch nützliche Anwendung finden.

Die intuitionistische Logikkonzeption ist die einflußreichste von denen, die sogenannte bereichsspezifische Logiken fordern. In ihr wird zwischen einer Logik für finite und für infinite Bereiche unterschieden. Aber schon die Frage: Haben wir es mit einem finiten oder einem infiniten Bereich zu tun? setzt ja bereits eine Logik voraus (enthält den logischen Operator „oder“). Die Vertreter aller sogenannten bereichsspezifischen Logiken stehen vor dem im Abschnitt 2 beschriebenen Dilemma.

Faktisch haben wir folgende Situation vor uns: Sowohl die klassische Logik als auch die intuitionistische beanspruchen, ein korrektes Regelsystem für die logischen Operatoren „und“, „oder“, „nicht“, „alle“, „einige“ usw. der Sprache zu liefern. Ihre logischen Regelsysteme sind aber grundsätzlich verschieden. In einer solchen Situation ist es nicht Aufgabe des Logikers, Toleranz zu predigen, sondern die tieferen logischen Gründe für diese Meinungsverschiedenheit aufzuhellen.

Wir behandeln diese Problematik später bei der Darstellung und Kritik einzelner alternativer Logiken.

2.5 Panlogismus und die Universalität logischer Regeln

Unter *Panlogismus* versteht man eine philosophische Doktrin, dergemäß sich die Welt nach logischen Gesetzen entwickelt. Die logischen Gesetze werden als Weltgesetze (Logos) angesehen. Diese bestimmen nach dieser Doktrin die Gesetze des Seins. Der Panlogismus ist eine eindeutig idealistische Lehre, nach der die Welt von etwas Geistigem (dem Logos, der Vernunft etc.) beherrscht wird. In panlogistischen Auffassungen hat auch die These von der Identität von Denken und Sein ihren Ursprung. Am ausgeprägtesten findet sich der Panlogismus in der Philosophie Hegels (alles Wirkliche ist vernünftig). Zur Charakteristik der Hegelschen Philosophie wurde der Begriff des Panlogismus auch erstmals eingeführt (Erdmann).

Manchmal werden auch von materialistischen Philosophen panlogistische Auffassungen vertreten. Bei diesem materialistischen Panlogismus werden die logischen Gesetze als (allgemeinste) Gesetze der Realität angesehen (objektive Logik), die mehr oder weniger angenähert in den sogenannten Denkgesetzen (subjektive Logik) widergespiegelt werden. Doch ist auch diese Auffassung nicht akzeptabel, da eine unvoreingenommene Betrachtung der Problematik sofort deutlich macht, daß nur die allgemeine Sprachstruktur (die Logik) in die Realität hineinprojiziert und mit der Struktur der Welt identifiziert wird.

Die von uns vertretene Universalität logischer Regeln hat mit dem Panlogismus nichts gemein, sie ist ihm direkt entgegengesetzt. Logische Gesetze und Regeln geben uns keinerlei Information über die nichtsprachliche Wirklichkeit, sie betreffen ausschließlich bestimmte Aspekte der Sprache. Gerade eine Erkenntnis dieser Eigengesetzlichkeit der Sprache gestattet es uns, echte Erkenntnisse über die nichtsprachliche Wirklichkeit von rein logisch wahren Aussagen (von Aussagen, die allein aus logischen Gründen wahr sind) zu unterscheiden. Es ist philosophisch sehr wesentlich, diese beiden Arten von Erkenntnissen genau zu unterscheiden.

2.6 Anwendung der Logik in anderen philosophischen Disziplinen

Aus dem bereits Gesagten wird deutlich, daß der Anwendungsbereich der Wissenschaft der Logik die sichtbare und hörbare Sprache (insbesondere die Wissenschaftssprache und die Sprache der Philosophie) ist und daß ihr Anwendungsgebiet nicht die mit Hilfe von Termini und Aussagen einer Sprache fixierten Gegenstände sind oder irgendwelche idealen Wesenheiten („Gedanken“), die in sprachlichen Formen nur ihren stofflichen Ausdruck finden.

Die Behauptung, daß der Anwendungsbereich der Logik nicht die natürlichen Sprachen (darunter die Umgangs- und Wissenschaftssprachen), sondern nur künstliche oder idealisierte Sprachen seien, ist nicht richtig. Anwendungsgebiet der Logik sind beliebige Sprachen, wenn ausreichende Bedingungen für eine Anwendung der Logik vorhanden sind (d. h., wenn man in ihnen Arten von Termini, Aussagen und logischen Operatoren unterscheiden kann, für die sich Regeln aufstellen lassen). Idealisierungen und sogenannte künstliche Sprachen hingegen sind nur Mittel der Logik, um logische Gesetze aufzustellen.

Wenn man von Anwendungen der Logik auf irgendwelche speziellen Gegenstandsbereiche und nicht auf die Sprache der sie betreffenden Wissenschaften spricht, so läßt man damit eine Zweideutigkeit zu. Man versteht hierbei unter Logik nicht eine besondere Einzelwissenschaft mit bestimmten Aufgaben, sondern nur einzelne ihrer Bestandteile. Genauer gesagt, man meint hier nur einzelne logische Kalküle, die eine außerlogische Interpretation zulassen. Das ist für die Wissenschaft der Logik aber keine notwendige Erscheinung, zumindest macht es nicht das Wesen und die Hauptaufgabe der Logik aus. Um eine solche außerlogische Anwendung der Logik handelt es sich beispielsweise in der Schaltalgebra oder in der Theorie der Neuronennetze.

Aus dem oben Gesagten folgt weiter, daß die in der Literatur anzutreffende Auffassung von einer Annäherung der Logik an die natürliche Sprache eine Frucht von Mißverständnissen ist.

Es kommt nicht darauf an, die Logik der natürlichen Sprache oder den Wissenschaftssprachen anzunähern, d. h., die Logik zu nötigen, die Mehrdeutigkeit, Unbestimmtheiten und den verschwommenen Charakter dieser sprachlichen Mittel zu berücksichtigen, sondern die Wissenschaftssprachen sind eher der Logik anzunähern, indem man die Wissenschaftler mit wichtigen Ergebnissen der Logik vertraut macht. In Wirklichkeit verläuft die Entwicklung auch in dieser Weise, und Ergebnisse der Logik dringen ständig in die Wissenschaften und in alle philosophischen Disziplinen ein.

Was bisher in allgemeiner Form über die Anwendung der Logik gesagt wurde, gilt natürlich insbesondere auch für die Anwendung der Logik in der Philosophie. Überall, wo in der Philosophie Termini, Aussagen und logische Operatoren verwendet werden, kann und sollte dies nach in der Logik aufgestellten Regeln geschehen. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die Anwendung der Logik in philosophischen Disziplinen nicht von ihrer Anwendung in den Wissenschaften überhaupt. Doch gibt es auch eine Reihe von Faktoren, die eine Auswertung der Ergebnisse und Methoden der Logik in der Philosophie besonders nahelegen. Diese wachsende Bedeutung der Logik für philosophische Untersuchungen hat objektive Gründe. Als wichtigster Grund ist hier die Verwendung von logischen Methoden in einer Anzahl von Einzelwissenschaften zu nennen. Vor allem in den Grundlagenfragen der Mathematik und Physik, aber auch in einigen anderen Wissenschaftsdisziplinen ist die bewußte Verwendung der Logik zu einer Alltagserscheinung geworden. Damit nehmen aber auch die philosophischen Probleme dieser Disziplinen einen solchen Charakter an, daß sie ohne fundierte logische Kenntnisse gar nicht formuliert, geschweige denn gelöst werden können. Auch die Ausarbeitung einer ganzen Reihe von traditionellen Problemen der Philosophie erfordert neue präzise Methoden der Logik. Vor allem in unserem Jahrhundert begann man verstärkt, die Bedeutung der Sprache im Erkenntnisprozeß und insbesondere die Sprache der Philosophie zu untersuchen. Dabei zeigte sich, daß viele jahrhundertelang umstrittene philosophische Probleme rein sprachlogischen Charakter hatten. Doch auch solche philosophischen Fragen, die nicht mit Hilfe der Logik allein gelöst werden können, lassen sich durch eine Verwendung logischer Methoden präziser formulieren und lösen. Schließlich führte die Entwicklung der Logik selbst in den letzten Jahrzehnten wieder zu einer engeren Bindung von Logik und Philosophie. Seit den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts, vor allem aber nach dem zweiten Weltkrieg begann man in der Logik an Problemen zu arbeiten, die bisher in traditioneller Weise von der Philosophie untersucht wurden. Wir wollen hier nur einige solcher Probleme nennen: Die Beziehungen zwischen Normen, Wertungen und Aussagen werden traditionsgemäß in der Philosophie, insbesondere in der Ethik, untersucht. Diese Problematik wurde von Logikern aufgegriffen, und es bildeten sich zwei neue Bereiche der Logik heraus, nämlich die *Normenlogik* oder *deontische Logik* und die *Logik von Wertungen.* Raum, Zeit, Bewegungen, Veränderungen und Entwicklungen bestimmter empirischer Objekte werden von verschiedenen Einzelwissenschaften untersucht, aber die Begriffe „Raum“, „Zeit“, „Bewegung“, „Veränderung“, „Entwicklung“ etc. wurden zuerst in der Philosophie eingeführt, und die allgemeinen Eigenschaften dieser Begriffe bestimmt man in der Philosophie. Mit all diesen Termini sind in der Philosophie aber Schwierigkeiten verbunden, es traten Paradoxien und die verschiedensten Fehldeutungen von Termini auf. Viele dieser Paradoxa und Fehldeutungen haben rein sprachlogischen Charakter, d. h., sie beruhen auf einer Nichtbeachtung der logischen Technik zur Einführung einer korrekten Terminologie. In den letzten Jahren wurde von Logikern der Versuch unternommen, die genannten und ähnliche Termini logisch korrekt einzuführen. Aus diesen Untersuchungen entstanden neue Zweige der Logik - die *Zeitlogik*, die *Logik von Raumtermini*, eine *Logik der Veränderung*, *der Entwicklung* usw. Dabei wurden im einzelnen sehr interessante Ergebnisse erzielt, die von großer philosophischer Relevanz sind. Nehmen wir ein letztes Beispiel. In der Erkenntnistheorie spielen solche Termini wie „wahr“,

„falsch“, „glauben“, „wissen“, „meinen“, „behaupten“ eine große Rolle. Die logischen Eigenschaften der ersten beiden Termini werden in der *logischen Semantik* untersucht, die heute ein weit entwickelter Bereich der modernen Logik ist, während in der *epistemischen Logik* präzise Regeln für den Gebrauch der übrigen genannten Termini aufgestellt werden.

In der Logik knüpft man an die jeweilige traditionelle philosophische Problematik an und wählt sprachliche Aspekte aus, die dann untersucht werden. Die dabei entstehenden neuen Bereiche der Logik schöpfen aber in keinem der genannten Fälle die gesamte philosophische Problematik aus. In der Philosophie werden etwa ganz konkrete Normen und Wertungen aufgestellt, es werden inhaltliche Aussagen über die objektiven Eigenschaften von Raum und Zeit behauptet, es werden Aussagen über Wissen, Glauben, Meinen usw. formuliert, die nicht rein logisch begründet werden können und die die Kompetenz der Logik überschreiten. Die Logik arbeitet nur Vorschläge für Regeln des korrekten Sprachgebrauchs in diesen Bereichen der Philosophie aus. Doch dabei zeigt sich, daß schon der logisch korrekte Aufbau einer philosophischen Terminologie zu interessanten Ergebnissen führt. Einige jahrhundertealte Streitpunkte und Undurchsichtigkeiten lassen sich rein logisch als trivial oder als Scheinprobleme nachweisen, denn in einer korrekt aufgebauten Terminologie lassen sich einige Behauptungen aus rein terminologischen Gründen als wahr oder falsch nachweisen. Wenn wir nur diesen Aspekt der Sache betrachten, so scheint N. Goodman recht zu haben, wenn er schreibt: „Sich in der Philosophie um die Aufklärung des Undurchsichtigen zu bemühen, ist nicht besonders verlockend; denn als Strafe für Mißerfolg droht bloß Konfusion, als Lohn des Erfolgs winkt bloß Banalität. Jede Lösung, ist sie erst einmal gefunden, ist bald langweilig; und es bleibt nur die Bemühung übrig, das ebenso langweilig zu machen, was noch dunkel genug ist, um uns zu fesseln.“ (Goodman 1951, S. XV)

Es ist eine der Hauptaufgaben der Logik in der Philosophie, das Komplizierte und Schwerdurchschaubare einfach und durchsichtig zu gestalten, Wortmystifikationen als solche zu entlarven, die Diktatur der Sprache über den menschlichen Verstand zu brechen und die Sprache zu einem Mittel zur Bewältigung der menschlichen Probleme zu machen. Doch mit dieser kritischen oder analytischen Funktion sind die Aufgaben der Logik in der Philosophie nicht erschöpft.

Legt man die strengen Maßstäbe der modernen Logik an die großen philosophischen Systeme der Vergangenheit an, etwa an die Systeme von Aristoteles, Kant oder Hegel, so halten diese Systeme einer Kritik nicht stand. Ihre Termini werden nicht korrekt eingeführt und mehrdeutig verwendet, ihre Behauptungen sind unscharf formuliert, ihre Beweise und Widerlegungen sind häufig lückenhaft und angreifbar. Würde sich der Logiker mit dieser kritischen analytischen Tätigkeit zufriedengeben, so hätte er offenbar seine Aufgabe verfehlt. Er würde dann nämlich solche genialen Denker wie Aristoteles, dessen philosophische Auffassungen noch heute in unserem Wissenschaftsbetrieb nachwirken, wie Hegel und Kant in einen Topf mit philosophischen Scharlatanen, Mystikern und Irrationalisten werfen, deren Systeme natürlich erst recht logisch anfechtbar sind. Die Logik entwickelt sich wie jede andere Wissenschaft, und viele Stimuli für ihre Entwicklung kommen von den großen philosophischen Systemen der Vergangenheit. Viele Gedanken vergangener Philosophen sind gerade deshalb logisch nicht korrekt formuliert, weil die Ausdrucksmittel der damaligen Logik zu arm waren. Die Logik hat also auch eine synthetische Funktion, d. h., sie muß solche logischen Ausdrucksmittel entwerfen, die es gestatten, die richtigen, aber teilweise nur erahnten und unscharf formulierten Thesen vergangener philosophischer Systeme logisch korrekt zu formulieren. Damit leistet sie einen wesentlichen Beitrag zur Erhöhung des theoretischen Niveaus in der Philosophie selbst, weil es nur unter Verwendung von logischen Methoden möglich ist, von der Ebene allgemeiner und unverbindlicher Erörterungen auf die Ebene strenger Beweise und Widerlegungen überzugehen.

Wenn wir hier von einer wachsenden Bedeutung der Logik für andere philosophische Disziplinen und von einer Anwendung ihrer Ergebnisse in anderen Bereichen sprechen, so wollen wir damit keineswegs den Wunsch äußern, die Sprachen der Philosophie und der anderen Wissenschaften sollten eine solche Form annehmen, daß einzelwissenschaftliche und philosophische Artikel und Bücher in Zukunft wie eine Beispielsammlung für logische Normative aussehen. Eine solche idealisierte Logisierung der Wissenschaft und der Philosophie ist eine Utopie, und noch nicht einmal eine erstrebenswerte. Trotzdem wäre es wünschenswert und nützlich, wenn Philosophen und Einzelwissenschaftler die Ergebnisse der Logik zur Kenntnis nehmen und ihre Arbeitsergebnisse auch mit logischen Maßstäben messen würden. In der Logik selbst gibt es keine Sätze, die einen Wissenschaftler oder Philosophen zwingen würden, ihre Regeln einzuhalten, und es gab in der Geschichte der Philosophie immer einzelne Philosophen und ganze philosophische Strömungen, die die Einhaltung logischer Regeln bewußt ablehnten. Einen solchen Philosophen berührt natürlich eine logische Kritik an seinen Auffassungen nicht, er muß dann allerdings auch auf den Anspruch auf Wissenschaftlichkeit seiner Philosophie verzichten.

2.7 Logik, Dialektik, dialektische Logik

Zu den Beziehungen von Logik und Dialektik ist sehr viel geschrieben worden, und es werden die unterschiedlichsten Standpunkte vertreten. Doch zeichnen sich zu dieser Problematik zwei Richtungen ab, die wir die *konstruktive* und die *destruktive Richtung* nennen wollen. Die Vertreter der destruktiven Richtung gehen davon aus, daß Logik und Dialektik einen unversöhnlichen Gegensatz bilden und einander widersprechen. Die Gründe für diese Auffassung sind wieder sehr unterschiedlich, aber meist liegen sie darin, daß entweder die Logik oder die Dialektik oder aber beide philosophischen Lehren falsch verstanden werden. Faßt man etwa die Logik als allgemeine Ontologie auf und die Dialektik ebenso, so ist auf Grund der unterschiedlichen Aussagen beider Disziplinen ein Gegensatz unvermeidlich. Unter den Philosophen, die diese Auffassung vertreten, entscheiden sich dann die einen für die Logik (genauer: für eine bestimmte Gestalt der Logik) und werden zu Gegnern der Dialektik, die anderen entscheiden sich für die Dialektik und verwerfen die Logik. Eine ähnliche Situation entsteht, wenn man beide Disziplinen undifferenziert als Denklehren deklariert. Als Beispiele für solche einseitigen Entscheidungen auf Grund falscher philosophischer Voraussetzungen können etwa die Auffassungen von G. W. F. Hegel und H. Scholz dienen. Die Diskussionen über das Verhältnis von Logik und Dialektik mit destruktiver Tendenz halten wir für unfruchtbar. Faßt man die Dialektik hingegen als „die Wissenschaft von den allgemeinen Bewegungs- und Entwicklungsgesetzen der Natur, der Menschengesellschaft und des Denkens“ auf - wie viele Dialektiker es tun - und die Logik als eine Wissenschaft, die Termini, Sätze und logische Operatoren unter bestimmten Aspekten untersucht, so kann es auf Grund des verschiedenen Gegenstandes dieser beiden Disziplinen gar keinen Gegensatz zwischen ihnen geben. Das Verhältnis der Logik zur Dialektik ist ihrem Verhältnis zu anderen philosophischen Disziplinen analog. Eine konstruktive Bearbeitung der Beziehungen von Logik und Dialektik besteht darin, die Methoden und Verfahren der Logik beim Aufbau einer präzisen Terminologie der Dialektik zu nutzen und die logischen Beziehungen zwischen den verschiedenen Prinzipien zu ermitteln. In dieser Hinsicht ist noch eine Reihe von Problemen zu bewältigen. Erst durch einen logisch korrekten Aufbau einer Terminologie der Dialektik und eine präzise Formulierung ihrer Prinzipien wird eine Diskussionsebene erreicht, die zu verbindlichen Ergebnissen führen kann.

Der Terminus „*dialektische Logik*“ wird in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. Er wurde von Hegel geprägt. Meist verwendet man diesen Terminus zur Bezeichnung der Hegelschen Logikauffassung. Er wird auch als Synonym mit dem Terminus „Dialektik“ verwendet, manchmal werden nur bestimmte Bereiche oder Teile der Dialektik als „dialektische Logik“ bezeichnet. Sehr unterschiedliche Auffassungen zur dialektischen Logik wurden insbesondere in der sowjetischen Literatur vertreten, die wir hier allerdings nicht referieren und erörtern können. Die meisten dieser Arbeiten verwenden eine unklare Terminologie, und ihre Behauptungen sind meist unverständlich oder falsch.

Von einigen Autoren werden Regeln und Gesetze einer dialektischen Logik aufgestellt, die denen der formalen Logik analog sein sollen. Ein wesentlicher Unterschied dieser Regeln und Gesetze von den in der formalen Logik aufgestellten Regeln und Gesetzen besteht darin, daß es nach diesen Regeln und Gesetzen nicht möglich ist, aus gegebenen (formulierten) Voraussetzungen ohne zusätzliche Kenntnisse des betreffenden Sachgebietes bindende und zwingende Schlüsse zu ziehen. Wenn wir im weiteren von Logik sprechen, meinen wir immer die formale Logik.

2.8 Mathematische Logik

Wir sagten bereits, daß es keine logischen Regeln gibt, die für die eine Wissenschaft richtig und für eine andere unrichtig sind, d. h., die speziell für eine einzige Wissenschaft bestimmt sind. Deshalb gibt es auch keine logischen Regeln speziell für die Mathematik. Das Gesagte schließt jedoch nicht aus, daß bestimmte Bereiche der Logik speziell für die Erfordernisse irgendeiner Einzelwissenschaft ausgearbeitet werden können. Die Orientierung der Logik auf diese Wissenschaft kann dabei einen wesentlichen Einfluß auf die Form der logischen Theorie (auf die in ihr verwendete Terminologie, auf die Form der Definitionen, der Symbolik usw.) haben, ohne dabei die Universalität der hier aufgestellten logischen Regeln zu beeinträchtigen. So wurde die Logik in den letzten einhundert Jahren im wesentlichen für die Erfordernisse der Mathematik ausgearbeitet. *Mathematische Logik* nennt man deshalb auch vor allem die Wissenschaft der Logik in der Form, wie sie speziell für die Interessen der Mathematik ausgearbeitet wurde. Außerdem wird der Ausdruck „mathematische Logik“ noch in folgenden zwei Bedeutungen verwendet. Erstens nennt man den Bereich der Mathematik *mathematische Logik,* in dem neben den eigentlich logischen Kalkülen auch andere mathematische Disziplinen, beispielsweise die Algorithmentheorie, behandelt werden. Zweitens nennt man *mathematische Logik* ganz allgemein den modernen Zustand der Logik, der sich bei der Orientierung auf die Interessen der Mathematik und unter Verwendung mathematischer Methoden in der Logik herausgebildet hat. Wenn wir im weiteren von Logik sprechen, so meinen wir immer diesen modernen Zustand der Logik und lassen das Wort „mathematisch“ weg, da es auf Grund seiner Mehrdeutigkeit nicht zu einem klaren Verständnis der Natur logischer Regeln beiträgt. Dies entspricht vollkommen der Richtung in der modernen Logik, die bestrebt ist, die allgemein wissenschaftliche Bedeutung der Ergebnisse der mathematischen Logik zu zeigen und ihr die Form einer allgemeinen Logik zu geben, die logische Regeln im oben betrachteten Sinne aufstellt. Dieses Bestreben ist natürlich mit einer Kritik bestimmter Sätze der mathematischen Logik und mit einer gewissen Veränderung des existierenden logischen Apparates verbunden. Diese Fragen betrachten wir im weiteren im Zusammenhang mit konkreten Bereichen der Logik.

Die mathematische Logik erweiterte in radikaler Weise im Vergleich zu dem vorhergehenden Zustand der Wissenschaft der Logik den Umfang der untersuchten logischen Regeln, sie revolutionierte die Methoden der logischen Forschung, vor allem die Sprache der Logik und die Verfahren zum Aufbau und zur Untersuchung logischer Theorien, mit deren Hilfe logische Regeln aufgestellt werden.

3. Kapitel
Die Sprache der Logik

3.1 Syntaktischer, semantischer und pragmatischer Aspekt der Sprache

In der logischen und methodologischen Literatur unterscheidet man zwischen einem syntaktischen, semantischen und pragmatischen Aspekt der Sprache und unterteilt die Semiotik als allgemeine Theorie sprachlicher Zeichen entsprechend in die Teildisziplinen Syntaktik, Semantik und Pragmatik. In der Syntaktik werden die rein strukturellen oder formalen Beziehungen zwischen sprachlichen Zeichen untersucht, und man abstrahiert in ihr von der Bedeutung (dem Sinn) der Zeichen und vom Sprachbenutzer. Manchmal sagt man sogar, in der Syntaktik würden „sinnfreie Zeichen" untersucht (vgl. Klaus/Buhr 1969, S. 1057). In der Semantik werden die Beziehungen zwischen den sprachlichen Zeichen und ihrer Bedeutung (ihrem Sinn) untersucht, während man von ihren Beziehungen zu den Sprachbenutzern abstrahiert. In der Pragmatik werden schließlich die Beziehungen der Zeichen untereinander, zu ihren Bedeutungen und zu den Sprachbenutzern untersucht.

Bei der Unterscheidung des syntaktischen, semantischen und pragmatischen Aspekts der Sprache handelt es sich um eine theoretische Unterscheidung, die in der Geschichte der Logik und der Sprachwissenschaft eine wichtige Rolle gespielt hat und auch noch spielt. Man muß sich aber darüber klar sein, daß es sich dabei um eine theoretische Vereinfachung bei der Beschreibung und Erklärung des faktischen Sprachgebrauchs handelt, die ihre Grenzen hat und zu einer Reihe von Schwierigkeiten führt, wenn man sie falsch versteht. Diese Unterscheidung verleitet manchen zu einer verzerrten Vorstellung von der Sprache. Wenn man von dem faktisch gegebenen Sprechen und Schreiben der Menschen ausgeht und diese drei unterschiedlichen Aspekte herausgliedert und untersucht, besteht keine Gefahr für die erwähnten Mißverständnisse. Man erhält jedoch sofort ein falsches Bild der Sprache, wenn man sie sich aus den drei gesonderten Komponenten zusammengesetzt vorstellt. Natürlich besitzt alles Gesprochene und Geschriebene wie jeder physische Gegenstand eine bestimmte Struktur, und man kann in der Syntaktik die Struktur von sprachlichen Zeichen untersuchen, ohne die anderen Eigenschaften dieser sprachlichen Zeichen zu berücksichtigen und ohne überhaupt zu berücksichtigen, daß es sich um sprachliche Zeichen handelt. Doch wenn man anfängt, von „sinnfreien Zeichen" zu reden, so wird diese Rede selbst „sinnfrei". Ein physischer Gegenstand, der nichts bedeutet (keinen Sinn hat), ist eben kein Zeichen. Genauso ist es mit dem semantischen Aspekt. Termini und Aussagen bedeuten natürlich etwas. Und auf die ernstgemeinte Frage (etwa eines Ausländers) „Was bedeutet der Terminus ‚Tisch'?" kann man mit der Übersetzung dieses Terminus in eine andere Sprache antworten, man kann ihm einen Tisch oder ein Bild eines Tisches zeigen usw. Aber schon die Frage *nach der Bedeutung* des Terminus „Tisch" kann mißverstanden werden. Und sie wird mißverstanden, wenn man anfängt, die Bedeutung des Terminus „Tisch" als besonderen Gegenstand zu suchen, ganz gleich, ob man meint, sie in den mit dem Terminus „Tisch" bezeichneten Gegenständen zu finden (die Unsinnigkeit dieser Auffassung wird deutlich, wenn man die folgenden beiden Sätze vergleicht: „Müller geht spazieren" und „Die Bedeutung des Terminus ‚Müller' geht spazieren") oder aber in besonderen, idealen (manchmal sogar objektiv idealen) Gegenständen, die allerdings den Mangel haben, daß sie bisher noch niemand wahrgenommen hat. Auch die Gleichsetzung der Bedeutung eines Terminus mit seiner Verwendung ist nicht richtig. Bei logisch einfachen Termini wird die Frage nach ihrer Bedeutung dadurch beantwortet, daß man angibt, welche Gegenstände oder Eigenschaften sie bezeichnen bzw. ausdrücken sollen, d. h., man muß die Zuordnung erklären, die zwischen dem Terminus und dem mit ihm Bezeichneten besteht. Darin erschöpft sich die Antwort auf die Frage nach der Bedeutung eines logisch einfachen Terminus. Die Bedeutung von logisch zusammengesetzten Termini und von Aussagen ergibt sich aus der Bedeutung der in ihnen vorkommenden Termini und den Eigenschaften der in ihnen vorkommenden logischen Operatoren.

Manchmal wird gesagt, die Logik untersuche nur den syntaktischen und semantischen Aspekt der Sprache und sehe von ihrem pragmatischen Aspekt ab, oder die logische Syntax untersuche nur den syntaktischen Aspekt, während sie vom semantischen und pragmatischen abstrahiere. Diese Aussagen können wieder verschieden verstanden werden. Versteht man die logische Syntax als Lehre von sogenannten sinnfreien Zeichen und die logische Semantik als Lehre von sprecherfreien Zeichen, so liegt wieder ein Mißverständnis vor. In der Logik werden auf syntaktischer Ebene Regeln formuliert, die für beliebige Termini und Aussagen gelten. Dabei muß aber stets vorausgesetzt werden, daß Termini und Aussagen *für jemanden* etwas bedeuten, sonst handelt es sich nicht um Termini und Aussagen. Auf semantischer Ebene werden Regeln formuliert, die für beliebige Sprecher, die die Logik akzeptieren, gelten. Außerdem gilt die oben aufgestellte Behauptung selbst in diesem Verständnis nicht allgemein, da beispielsweise in der epistemischen Logik verschiedene logische Typen von Sprechern unterschieden werden. Wie bereits gesagt, hat die Unterscheidung des syntaktischen, semantischen und pragmatischen Aspekts der Sprache in bestimmten Grenzen ihre Berechtigung, sie darf jedoch nicht falsch verstanden und verabsolutiert werden.

3.2 Die Sprache der Logik und wichtige logische Symbole

Für die Darstellung von Termini, Aussagen, Wahrheitswerten von Aussagen und logischen Operatoren werden in der Logik spezielle Symbole verwendet. Sie lassen sich in Symbole für Variablen und Symbole für Konstanten einteilen.

Mit Hilfe von *Konstanten* werden in der Logik bestimmte logische Operatoren und bestimmte Wahrheitswerte von Aussagen sowie einige bestimmte (logische) Termini dargestellt. Mit Hilfe des Symbols $\wedge$ stellen wir beispielsweise einen logischen Operator dar, der gewöhnlich als „und“ gelesen wird, und mit Hilfe des Symbols v den Wahrheitswert „wahr“. Eine Besonderheit besteht hier darin, daß wir, wenn wir das Symbol verwenden, den logischen Operator selbst und nicht seine Bezeichnung verwenden. Prinzipiell ist eine Situation denkbar, in der die Menschen in einer gegebenen Sprache oder sogar in allen Sprachen für diesen Operator das Symbol und nur dieses Symbol verwenden, d. h., daß sie nicht die Wörter „und“, „aber“ usw. verwenden, wenn es erforderlich ist, irgend etwas aufzuzählen. Die Verwendung des Symbols $\wedge$ in der Logik hat eine Reihe von Vorzügen vor anderen sprachlichen Ausdrücken, die die gleiche Rolle spielen: eine Standardisierung der Ausdrücke, Eindeutigkeit, Kürze, Übersichtlichkeit usw. Analog verhält es sich mit dem Symbol v. Es spielt die gleiche Rolle wie die Wörter „wahr“, „richtig“, hat ihnen gegenüber aber eben die angegebenen Vorzüge.

Mit Hilfe von *Variablen* werden in der Logik nicht bestimmte Termini, Aussagen, Operatoren usw. dargestellt, sondern beliebige oder in mehr oder weniger weiten Grenzen variierbare (d. h., wenn es gleichgültig ist, welche Termini, Aussagen usw. überhaupt oder aber einer bestimmten Gruppe gemeint sind). In der Behauptung „Wenn A und B Aussagen sind, so ist $(A \wedge B)$ eine Aussage“ stellen die Buchstaben A und B beliebige Aussagen dar. Hier spielt es keine Rolle, welche konkrete Form diese Aussagen haben. Es reicht aus, daß sie Aussagen sind. Und in dem Ausdruck „X sei ein beliebiger zweistelliger aussagenbildender logischer Operator“ stellt der Buchstabe X einen beliebigen logischen Operator dar, mit dessen Hilfe man aus zwei gegebenen Aussagen eine neue bilden kann.

Variablen lassen sich ebenfalls in zwei Gruppen einteilen. Zur ersten Gruppe gehören die Fälle, in denen eine Aufzählung der Variablen nicht vorher explizit angegeben und durch nichts beschränkt ist. Hier wird aus dem Kontext klar, welche logischen Objekte diese Symbole darstellen. Solche Symbole verwendet man nach folgender Regel: Jedes von ihnen bezeichnet für sich genommen ein beliebiges logisches Objekt der gegebenen Art (Aussage, Terminus usw.), während der Unterschied gemeinsam verwendeter Variablen bedeutet, daß diese Objekte sich unterscheiden können. So ist in der Behauptung „Wenn A und B Aussagen sind, so ist $(A \wedge B)$ eine Aussage“ jeder der Buchstaben A und B für sich genommen eine beliebige Aussage, während der Unterschied dieser Buchstaben bedeutet, daß in diesem Paar verschiedene Aussagen figurieren können (es ist aber auch möglich, daß A und B gleich sind - das ist ein Spezialfall).

Zur zweiten Gruppe von Variablen gehören die Fälle, in denen ein Verzeichnis dieser Symbole speziell angegeben wird. Bei der Angabe der Symbole eines bestimmten Bereiches der Logik trifft man beispielsweise eine solche Feststellung: „Die Buchstaben p, q, r mit und ohne Indizes sind Aussagenvariablen.“ Wenn man gewöhnlich von Variablen spricht, so meint man Variablen dieser Gruppe. Auch wir verfahren im weiteren so. Während bei der ersten Gruppe der Wertbereich der Symbole aus dem Kontext der Darstellung klar wird (d. h. klar wird, welche logischen Objekte sie bezeichnen), sind in der zweiten Gruppe spezielle Verabredungen bezüglich des Wertbereichs der Variablen erforderlich.

Logische Symbole lassen sich auch in syntaktische (Symbole für Termini, Aussagen und logische Operatoren) und semantische (Symbole für Wahrheitswerte) einteilen. Die letzteren sind im Unterschied zu den logischen Operatoren logische Termini.

Die Symbole der Wahrheitswerte und alle Termini, die in die Logik durch Definitionen mit Hilfe von Wahrheitswerten eingeführt werden, gehören zu den sogenannten semantischen Termini. Durch die Definition „Eine Aussage A nennt man *erfüllbar* genau dann, wenn es eine Kombination von Wahrheitswerten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \geq 1)$ für die in A vorkommenden Aussagen $B_1, \ldots, B_m$ gibt, bei der A den Wert v hat“ wird beispielsweise der neue Terminus „erfüllbar“ eingeführt. In dem definierenden Teil kommen die semantischen Symbole v, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vor, so daß dieser Terminus ein semantischer ist. Termini der Logik, in deren Definitionen keine semantischen Termini vorkommen, gehören zu den syntaktischen. So wird beispielsweise der syntaktische Terminus „aussagenlogische Formel“ wie folgt definiert: „Eine endliche Folge von Symbolen nennt man eine *aussagenlogische Formel* in folgenden und nur folgenden Fällen:

1) Alleinstehende Aussagenvariablen sind aussagenlogische Formeln;
2) wenn A und B aussagenlogische Formeln sind, so sind $(A \wedge B)$ und $(A \vee B)$ aussagenlogische Formeln;
3) wenn A eine aussagenlogische Formel ist, so ist $\sim A$ eine aussagenlogische Formel.“

Aus den betrachteten Symbolen werden nach bestimmten Regeln Komplexe von Symbolen (logische Formeln) gebildet. Ein Beispiel für solche Formeln und Regeln zu ihrem Aufbau haben wir eben angeführt. Die Aufgabe der Regeln besteht in einer Angabe derjenigen Kombinationen von Symbolen, die in diesem oder jenem Bereich der Logik als Formel angesehen werden. Diese Regeln sind nichts anderes als Regeln zum Aufbau bestimmter Arten von Termini und Aussagen.

Im weiteren verwenden wir u. a. folgende logische Operatoren:

1) $\wedge$ - Konjunktionsoperator (gelesen als „und“ oder „jedes von“);
2) $\vee$ - Adjunktionsoperator (gelesen als „oder“, „oder/und“ oder als „mindestens eines von“);
3) $\sim$ - Negationsoperator (gelesen als „nicht“, „Es ist nicht so, daß ...“);
4) $\rightarrow$ - Konditionalitätsoperator („wenn ..., so ...“);
5) $\forall$ - Generalisator, Alloperator, Allquantor („alle“);

6) $\exists$ - Partikulisator, Einsoperator, Einsquantor („einige“, „mindestens ein“);
7) $\downarrow$ - terminibilbender Operator, der in Abhängigkeit vom Typ der Termini gelesen wird als „welcher (welche)“, „derart, daß ...“, „die Tatsache, daß ...“ u. a.;
8) $\leftarrow$ - Prädikationsoperator des Zusprechens, mit dessen Hilfe aus Termini Aussagen gebildet werden (gelesen als „ist“, „hat“ usw.);
9) $\not\leftarrow$ - Prädikationsoperator des Absprechens, mit dessen Hilfe aus Termini Aussagen gebildet werden (gelesen als „ist nicht“, „hat nicht“ usw.).

Einige der angeführten Operatoren werden sowohl als aussagenbildende wie auch als terminibildende Operatoren verwendet, wobei ihre unterschiedliche Funktion jeweils aus dem Kontext deutlich wird.

3.3 Einfache und zusammengesetzte Aussagen und Termini

Es lassen sich einfache und zusammengesetzte Aussagen unterscheiden. Unter *einfachen* Aussagen verstehen wir solche, die keine anderen Aussagen als Bestandteile enthalten, während *zusammengesetzte* Aussagen mit Hilfe von logischen Operatoren aus anderen Aussagen gebildet werden.

Einfache Aussagen bestehen aus (logischen) Subjekten, Prädikaten und einem Prädikationsoperator. Unter den *logischen Subjekten* einer einfachen Aussage versteht man die Termini, die das bezeichnen sollen, worüber in der Aussage gesprochen wird, während die *logischen Prädikate* die Termini sind, die das ausdrücken, was über die Subjekte ausgesagt wird. Beispiele für einfache Aussagen sind: „Ein Elektron ist negativ geladen“, „Sokrates läuft“, „Anton liebt Gerda nicht“, „Berlin liegt zwischen Rostock und Leipzig“. Die logischen Subjekte sind in diesen Aussagen entsprechend: „Ein Elektron“, „Sokrates“, „Anton“ und „Gerda“, „Berlin“, „Rostock“ und „Leipzig“. Als Symbole für logische Subjekte verwenden wir die Buchstaben s, s_1, $s_2 \ldots$ Die logischen Prädikate sind entsprechend die Termini „negativ geladen“, „läuft“, „liebt“, „liegt zwischen“. Für Prädikate verwenden wir die Symbole P, Q, P_1, $P_2 \ldots$ Man unterscheidet Prädikate in ein-, zwei- und allgemein n-stellige Prädikate, je nachdem, mit wieviel Subjekttermini sie zu Aussagen verknüpft werden. So haben wir in unseren ersten beiden Beispielsätzen einstellige Prädikate, im dritten ein zweistelliges und im vierten ein dreistelliges Prädikat. Im weiteren möge s für eine beliebige Gruppe von Subjekttermini $s_1, \ldots, s_n$ mit $n \geq 1$ und P für ein entsprechend n-stelliges Prädikat stehen.

Die Prädikationsoperatoren werden in der Umgangssprache auf die verschiedenste Weise ausgedrückt, durch die Worte „ist“ und „ist nicht“, durch „hat“ und „hat nicht“, durch einfaches Aneinanderreihen von Subjekt und Prädikat bzw. Aneinanderreihen von Subjekt, Prädikat und ein Hinzufügen des Wortes „nicht“. Wir verwenden für das Zusprechen eines Prädikates zu einem Subjekt das Symbol $\leftarrow$ und für das Absprechen das Symbol $\not\leftarrow$.

Wenn wir für ein gegebenes Subjekt s feststellen können, daß es die Eigenschaft P besitzt, so können wir die Aussage bilden „s besitzt die Eigenschaft P“ (symbolisch: $s \leftarrow P$). Damit sind aber noch nicht alle Möglichkeiten erschöpft, obwohl man sich in der klassischen und intuitionistischen Logik auf sie beschränkt. Es ist nämlich noch der Fall möglich, daß weder $s \leftarrow P$ noch $s \not\leftarrow P$ gilt, d. h. $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$. Dies wird durch eine Aussage der Form $?(s \leftarrow P)$ abgekürzt (? ist das Unbestimmtheitszeichen).

Zusammenfassend können wir einfache Aussagen auf folgende Weise definieren:

D1.

1) Wenn P ein einstelliges Prädikat und s ein Subjekt ist, so sind $(s \leftarrow P)$ und $(s \not\leftarrow P)$ einfache Aussagen;

2) wenn P ein n-stelliges Prädikat ist und $s_1, \ldots, s_n$ $(n \geq 2)$ Subjekte sind, so sind $((s_1, \ldots$ $\ldots, s_n) \leftarrow P)$ und $((s_1, \ldots, s_n) \not\leftarrow P)$ einfache Aussagen;
3) eine einfache Aussage liegt nur vor, wenn es auf Grund der Punkte 1 und 2 der Fall ist.

Aus einfachen Aussagen lassen sich mit Hilfe von logischen Operatoren zusammengesetzte Aussagen bilden. Wir geben eine induktive Definition der wichtigsten von uns betrachteten Aussagen an.

D2.

1) Einfache Aussagen sind Aussagen;
2) wenn A eine Aussage ist, so ist $\sim A$ eine Aussage;
3) wenn A und B Aussagen sind, so sind $(A \wedge B)$ und $(A \vee B)$ Aussagen;
4) wenn A und B Aussagen sind, so ist $(A \rightarrow B)$ eine Aussage;
5) wenn A eine Aussage und y ein Terminus ist, so sind $(\forall y)A$ und $(\exists y)A$ Aussagen;
6) etwas ist eine Aussage nur auf Grund der Punkte 1-5 und in den Fällen, wo wir vereinbaren, einen bestimmten sprachlichen Ausdruck als Aussage anzusehen, der der Bedeutung nach mit einem der in den Punkten 1-5 angegebenen Ausdrücke identisch ist.

Der Punkt 6 ist hier nicht so zu verstehen, als ob keinerlei andere Strukturen von Termini und Aussagen möglich sind. Er bedeutet bloß, daß wir hier nur die in den Punkten 1-5 angegebenen Formen von Aussagen und die mit ihrer Hilfe definierbaren betrachten. Beispielsweise sehen wir den Ausdruck $(A \supset B)$ als Aussage an, wenn wir vereinbaren, ihn als mit der Aussage $(\sim A \vee B)$ der Bedeutung nach identisch anzusehen. Dies heißt hier folgendes: Die Aussage $(A \supset B)$ besagt dasselbe wie die Aussage $(\sim A \vee B)$.

Beispiele für einfache Aussagen haben wir bereits angegeben. Umgangssprachliche Beispiele für Aussagen der in den Punkten 2-5 angegebenen Struktur formulieren wir etwas ungewöhnlich in einer Form, die den dort angeführten Symbolen nahekommt:

2) „Es ist nicht so, daß ein Elektron positiv geladen ist.“
3) „Berlin ist eine Großstadt, und Berlin liegt an der Spree.“
   „Heute abend gehen wir ins Kino, oder wir gehen ins Theater.“
4) „Wenn es regnet, so wird die Straße naß.“
5) „Alle Metalle sind derart, daß Metalle den Strom leiten.“
   „Einige Studenten sind derart, daß Studenten durch die Prüfung fallen.“

Einfache Termini nennen wir solche Termini, die sich nicht in Termini, Aussagen und logische Operatoren zergliedern lassen. Sie sind in gewisser Weise logische Atome, aus denen sich das gesamte menschliche Wissen aufbaut. Vorausgesetzt, die einfachen Termini sind gegeben, treffen wir folgende Definition eines Terminus:

D3.

1) Einfache Termini sind Termini;
2) wenn a ein Terminus ist, so ist $\sim a$ ein Terminus;
3) wenn a und b beide Subjekttermini oder beide Prädikattermini sind, so sind $(a \wedge b)$ und $(a \vee b)$ Termini;
4) wenn a ein Terminus und A eine Aussage ist, so ist $a \downharpoonleft A$ ein Terminus;
5) wenn A eine Aussage ist, so ist $\downharpoonleft A$ ein Terminus;
6) ein Terminus liegt nur vor, wenn es auf Grund der Punkte 1-5 der Fall ist, oder wenn vereinbart wurde, einen sprachlichen Ausdruck als Terminus anzusehen, der einem nach den Punkten 1-5 gebildeten Terminus bedeutungsgleich ist.

Punkt 6 bedeutet wiederum nicht, daß nicht noch Termini anderer Struktur möglich sind; er besagt nur, daß wir uns hier auf eine Betrachtung von Termini der angegebenen Struktur beschränken. Wir geben Beispiele für die in den Punkten 2-5 definierten Termini an:

2) „Nichtschwimmer";
3) „Musiker und Maler", „Partei- oder Gewerkschaftsmitglied";
4) „ein Elementarteilchen derart, daß das Teilchen positiv geladen ist";
5) „die Tatsache, daß sich die Erde um die Sonne dreht".

Die Frage, wie man feststellt, ob ein Terminus einfach ist oder nicht, wird nicht von der Logik beantwortet und hat außerlogischen Charakter. Wir setzen die Fähigkeit zu dieser Unterscheidung voraus, ebenso wie wir voraussetzen, zwischen Subjekt- und Prädikattermini unterscheiden zu können.

Die in einem Terminus oder einer Aussage vorkommenden einfachen Termini und einfachen Aussagen sind die Bedeutungseinheiten des gegebenen Terminus bzw. der gegebenen Aussage. Die Bedeutungseinheiten der Aussage „Kupfer ist ein Metall" sind beispielsweise die einfachen Termini „Kupfer" und „Metall"; die Bedeutungseinheiten der Aussage „Kupfer ist ein Metall, während Porzellan kein Metall ist" sind die einfachen Termini „Kupfer", „Metall" und „Porzellan" sowie die einfachen Aussagen „Kupfer ist ein Metall" und „Porzellan ist kein Metall" (das Wort „während" ist ein logischer Operator). Weitere Symbole und mit ihnen verknüpfte Definitionen von Termini, Aussagen und Operatoren geben wir später an.

3.4 Logische Kalküle

Einen wesentlichen Beitrag zur Weiterentwicklung der Wissenschaft der Logik leistete die mathematische Logik durch die Ausarbeitung logischer Kalküle. Logische Kalküle sind bequeme und äußerst effektive Hilfsmittel zur Aufstellung logischer Regeln. Da im ganzen folgenden Text logische Kalküle dargestellt und ihre Eigenschaften untersucht werden, beschränken wir uns hier auf einige kurze vorbereitende Bemerkungen.

In der Logik werden logische Kalküle folgender Form verwendet:

1) *Semantische Kalküle.* Sie sind Gesamtheiten von Definitionen logischer Operatoren, in denen semantische Termini (Termini der Wahrheitswerte) benutzt werden, manchmal nennt man solche Kalküle *logische Algebren.*
2) *Syntaktische Kalküle.* Sie sind Gesamtheiten von akzeptierten syntaktischen Symbolkombinationen und von Regeln, nach denen man aus diesen neue Symbolkombinationen erhält; meist handelt es sich hier um axiomatische Systeme. Manchmal werden nur die syntaktischen als *logische Kalküle* bezeichnet.
3) *Gemischte Kalküle* sind Kalküle, die teilweise semantisch und teilweise syntaktisch aufgebaut sind.

Logische Kalküle werden entweder in logischer Terminologie aufgebaut oder mit Hilfe ungedeuteter Symbole. Im ersten Falle stehen die Symbole für Termini, Aussagen, logische Operatoren und Wahrheitswerte. Die logischen Kalküle sind hier Theorien, die die Eigenschaften von Termini und Aussagen der entsprechenden Art definieren. Im zweiten Fall wird den Symbolen, mit deren Hilfe der Kalkül aufgebaut wird, keinerlei Bedeutung zugeschrieben. Wird dabei ein Wertbereich der Variablen angegeben, so ist das wiederum eine Menge von Symbolen, die ungedeutet sind. Die logischen Kalküle sind dabei formale Systeme. Diese sind keine logischen Theorien, sie sind auch keine Theorien irgendeiner anderen Wissenschaft. Um aus ihnen Theorien zu erhalten, muß man sie interpretieren, d. h., man muß den in ihnen vorkommenden

Symbolen mit Hilfe von Termini dieser oder jener Wissenschaft eine Bedeutung zuschreiben. Geschieht dies mit Hilfe einer logischen Terminologie, so erhält man aus formalen Systemen logische Theorien. Geschieht dies hingegen mit Hilfe einer außerlogischen Terminologie, so haben wir es mit einer außerlogischen Interpretation formaler Systeme zu tun. Zum Beispiel sind Interpretationen formaler Systeme der Aussagenlogik in der Terminologie der Schaltalgebra und der Theorie der Nervennetze bekannt.

Die Vielfalt logischer Kalküle in der modernen Logik und ihre Unterschiedlichkeit wird manchmal als ein Argument für die These von der Nichtuniversalität logischer Gesetze benutzt. Dieses Argument ist aber nicht stichhaltig. Wir lassen hier die unterschiedlichen Standpunkte, Fähigkeiten und Interessen der Logiker, die Unterschiede bei der Interpretation logischer Kalküle, den Unterschied der Richtungen in der Logik, den historischen Fortschritt und ähnliche allgemein bekannte Dinge außer acht. Wir betrachten nur folgenden für uns interessanten Fall: Es existieren zwei logische Kalküle; sie werden beide als logische Theorien interpretiert, die den Anspruch erheben, die Eigenschaften der gleichen logischen Zeichen zu beschreiben; die Mengen der in ihnen beweisbaren Formeln (und folglich auch die Mengen der in ihnen zugelassenen logischen Regeln) fallen jedoch nicht zusammen. Aus einer solchen Situation gibt es nur eine richtige Schlußfolgerung: Diese Systeme definieren verschiedene Komplexe von logischen Operatoren; sie unterscheiden sich zumindest durch einen logischen Operator.

Ein Beispiel für derartige logische Systeme sind der klassische und der intuitionistische Aussagenkalkül. Sie erheben beide den Anspruch, die Eigenschaften der Operatoren „und", „oder" und „nicht" zu definieren. In ihnen werden jedoch faktisch verschiedene Negationen definiert. Für die intuitionistische Negation gilt nicht alles, was für die klassische Negation gilt (sie ist enger als die klassische). Es ist falsch anzunehmen, es gäbe eine naturgegebene Negation, die man mit verschiedenem Genauigkeitsgrad und unterschiedlicher Vollständigkeit erkennen könnte, ähnlich, wie man die Atome, die Gesellschaft, die Lebewesen usw. erkennt, und deren Eigenschaften die „Intuitionisten" besser erfaßt hätten als die „Klassiker" (oder umgekehrt). Ein Fortschritt liegt hier vor. Er besteht jedoch darin, daß für einige Erfordernisse der Erkenntnis die Negation differenziert wurde und man für ihre verschiedenen Formen logische Systeme konstruierte, die ihre Eigenschaften definieren.

Der Unterschied logischer Systeme zeugt (falls es sich nicht bloß um Variationen des gleichen Systems handelt) von einer Erweiterung und Bereicherung des Apparates der Logik, vom Auftreten neuer logischer Mittel (insbesondere durch Differenzierung und Einschränkung der schon vorhandenen). Es läßt sich jedoch keineswegs daraus folgern, daß die gleichen Gesetze der Logik in einem Bereich der Wissenschaft richtig sind und in einem anderen nicht.

Eine wesentliche Rolle spielt in der logischen Forschung die intuitive Auffassung der Eigenschaften logischer Operatoren und der sie enthaltenden Aussage- und Terministrukturen. Wenn man von Intuition spricht, so meint man damit gewöhnlich eine verworrene, unklare und unbestimmte Vorstellung von irgendwelchen Gegenständen. Diese Art der Intuition spielt natürlich auch in der Logik, wie in jeder wissenschaftlichen Forschung, eine gewisse Rolle. Hier meinen wir mit Intuition aber etwas anderes. Wir versuchen, es an einem Beispiel zu erklären:

Angenommen, es sei erforderlich, die Eigenschaften der Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\sim$ mit Hilfe eines logischen Kalküls zu definieren. Diesen Kalkül kann man nicht vollständig willkürlich auswählen. Die Auswahl hängt vom Verständnis dieser Operatoren ab, das vor dem Aufbau oder der Auswahl des Kalküls, zumindest unabhängig von ihm, vorhanden ist. Diese Auffassung von den Operatoren läßt sich streng formulieren etwa durch Behauptungen wie: Aus $A \wedge B$ ist sowohl $B \wedge A$ als auch A als auch B ableitbar; aus $A \wedge (B \wedge C)$ ist $(A \wedge B) \wedge C$ ableitbar und umgekehrt; aus A ist $A \vee B$ ableitbar; aus B ist $A \vee B$ ableitbar; aus $A \vee B$ ist $B \vee A$ ableitbar usw. Auf diese Weise läßt sich eine ziemlich vollständige Aufzählung von Behauptungen angeben. Sie bildet die intuitive Auffassung der Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\sim$ bezüglich des logischen Kalküls, der für die Definition der Eigenschaften dieser Operatoren aufgebaut oder aus den vorhandenen Kalkülen ausgewählt wird. Die intuitive Auffassung dieses oder jenes logischen Objekts ist also etwas Relatives. Sie ist eine Aufzählung von Behauptungen über diese Objekte. Diese Behauptungen werden dabei unabhängig von dem logischen Kalkül, der die Eigenschaften der gleichen logischen Objekte definieren soll, akzeptiert und mit diesem Kalkül verglichen.

Logische Kalküle, die die Eigenschaften gegebener logischer Objekte definieren, entsprechen nicht immer vollständig der intuitiven Auffassung dieser Objekte. In diesem Falle spricht man von *Paradoxien* in den betreffenden Kalkülen. Die Beziehungen zwischen Intuition und logischen Kalkülen und die Paradoxienproblematik betrachten wir später anhand konkreter Beispiele. Doch aus dem bereits hierzu Gesagten wird schon deutlich, daß sich die Logik nicht auf Kalküle reduzieren läßt.

Wiederholungsfragen:

1. Geben Sie Beispiele für Aussagen, Termini und logische Operatoren an!
2. Geben Sie Beispiele für einfache und zusammengesetzte Aussagen und Termini an!
3. Warum ist die häufig anzutreffende Definition einer Aussage als einem sprachlichen Gebilde, das die Eigenschaft hat, wahr oder falsch zu sein, unkorrekt?
4. Warum ist die häufig anzutreffende Definition einer Aussage als einem sprachlichen Gebilde, das einen Sachverhalt widerspiegelt, unkorrekt?
5. Welche Abstraktionen werden bei logischen Untersuchungen der Sprache vorgenommen?
6. Erläutern Sie den logischen Aspekt der Sprache!
7. Bestimmen Sie den Gegenstand logischer Untersuchungen!
8. Geben Sie Beispiele für logische Regeln an!
9. Erläutern Sie das Verhältnis von Beobachtung, Beschreibung und Erfindung bei logischen Untersuchungen!
10. Warum ist die Bestimmung der Logik als Wissenschaft von den allgemeinen Gesetzen des richtigen Denkens unkorrekt?
11. Widerlegen Sie die ontologische Auffassung logischer Gesetze!
12. Warum haben logische Regeln und Gesetze universalen Charakter?
13. Wodurch unterscheidet sich die Auffassung von der Universalität logischer Regeln vom Panlogismus?
14. Welche Bedeutung hat die Logik für andere philosophische Disziplinen?
15. Erläutern Sie den syntaktischen, semantischen und pragmatischen Aspekt der Sprache!
16. Charakterisieren Sie die Sprache der Logik!
17. Was versteht man unter einem logischen Kalkül?

4. Kapitel
Wahrheitsfunktionaler Aufbau der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik (zweiwertige Aussagenalgebra)

4.1 Verschiedene Methoden beim Aufbau der Aussagenlogik

Den Bereich der Logik, in dem die Eigenschaften von Aussagen mit den logischen Operatoren „nicht“, „und“, „oder“, „weder ... noch ...“ und anderen mit ihrer Hilfe definierbaren Operatoren sowie die Eigenschaften dieser Operatoren selbst untersucht werden, nennt man *Aussagenlogik*. In der Aussagenlogik werden einfache Aussagen als gegeben angesehen, d. h., ihre innere logische Struktur wird nicht berücksichtigt. Es werden nur die logischen Eigenschaften von Aussagen untersucht, die sich aus der Verknüpfung einfacher Aussagen mit Hilfe der genannten logischen Operatoren ergeben.

Die Aussagenlogik kann auf verschiedene Weise aufgebaut werden. Wir behandeln zunächst den semantischen oder wahrheitsfunktionalen Aufbau, danach geben wir ein System des natürlichen Schließens und einen axiomatischen Aufbau der Aussagenlogik an. Wichtigstes logisches Ziel der Aussagenlogik ist es, ein adäquates System von Schlußregeln (von Regeln der logischen Folgebeziehung) für Aussagen des hier betrachteten Typs zu bekommen. Wir stellen zunächst den wahrheitsfunktionalen Aufbau der Aussagenlogik dar und erläutern erst im Anschluß daran, wie er für die Gewinnung eines solchen Systems von Schlußregeln genutzt werden kann. Der wahrheitsfunktionale Aufbau der Aussagenlogik hat nämlich eigenständige wissenschaftliche Bedeutung und ist in gewisser Hinsicht nicht abhängig von dem Ziel, ihn in der Logik zu verwenden. Er kann auch in ganz anderen Bereichen der Wissenschaft (Schaltalgebra, Theorie der Neuronennetze) genutzt werden.

Wahrheitsfunktionale (semantische) Aufbauten der Aussagenlogik nennen wir *Aussagenalgebren*. Mit dem Terminus „*Aussagenalgebra*“ bezeichnen wir nicht nur einzelne Systeme dieses Typs, sondern auch den ganzen Bereich der Aussagenlogik, in dem mögliche Systeme dieser Art, ihre Eigenschaften und Beziehungen untersucht werden. Je nach der Anzahl der zugelassenen Wahrheitswerte unterscheidet man zwischen zwei-, drei- und allgemein n-wertigen Aussagenalgebren. Wir behandeln hier nur die zweiwertige Aussagenalgebra mit den beiden Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ („unwahr“).

4.2 Die Sprache der Aussagenalgebra

Beim Aufbau der Aussagenalgebra werden vor allem folgende Arten von Symbolen (Grundzeichen) verwendet:

1) *Aussagenvariablen*; da wir in diesem Bereich der Logik keine anderen Variablen verwenden, sprechen wir der Kürze halber einfach von Variablen;
2) *logische Operatoren* (oder logische Konstanten oder logische Junktoren); die im vorliegenden Bereich der Logik verwendeten Operatoren nennen wir *aussagenlogische Operatoren* (*Konstanten*, *Junktoren*);
3) *Wahrheitswerte*; da wir hier nicht von anderen Werten sprechen, verwenden wir der Kürze

halber einfach das Wort „Wert“;
4) Hilfszeichen (Klammern, Kommata).

Die beim Aufbau eines Kalküls verwendeten Symbole nennt man das *Alphabet* dieses Kalküls.

Als Variablen verwenden wir die Buchstaben p, q, r mit und ohne Indizes. Als Indizes benutzen wir die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... Die Zahl der Variablen ist unendlich. Unter der *alphabetischen Ordnung der Variablen* verstehen wir folgendes:

1) Die alphabetische Ordnung der Variablen p, q, r ist die Ordnung, in der sie hier angegeben sind;
2) A sei eine beliebige der Variablen p, q, r; A_i geht in der alphabetischen Ordnung A_k voran genau dann, wenn $i < k$ $(i = 1, 2, 3 \ldots;\ k = 1, 2, 3 \ldots)$;
3) A und B seien ein beliebiges Paar der Variablen p, q, r; A geht in der alphabetischen Ordnung B_i voran, wobei $i = 1, 2, 3 \ldots$;
4) A und B seien ein beliebiges Paar der Variablen p, q, r, in dem A in der alphabetischen Ordnung vorangeht; in diesem Falle geht A_i in der alphabetischen Ordnung B_i voran $(i = 1, 2, 3 \ldots)$; und wenn $i < k$, so geht B_i in der alphabetischen Ordnung A_k voran $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.
   Beispielsweise gehen p_5 der Variablen p_{12}, p_5 der Variablen r_5, r der Variablen p_3 und q_3 der Variablen p_5 in der alphabetischen Ordnung voran.

Wir verwenden folgende aussagenlogischen Operatoren:

1) $\sim$ - Negation;
2) $\wedge$ - Konjunktion;
3) $\vee$ - Adjunktion;
4) $\supset$ - Subjunktion;
5) $\equiv$ - Bisubjunktion;
6) $|$ - Negatadjunktion (oder Konjunktionsnegat);
7) $\dagger$ - Negatkonjunktion (oder Adjunktionsnegat).

Weitere aussagenlogische Operatoren und ihre Anzahl betrachten wir später. Als Wahrheitswerte verwenden wir:

1) v - wahr;
2) f - falsch (unwahr).

Aus Aussagenvariablen und Operatoren werden nach bestimmten Regeln aussagenlogische Formeln gebildet. Es sei hervorgehoben, daß nicht jede aus diesen Symbolen gebildete Zeichenkombination eine aussagenlogische Formel ergibt, sondern nur die Kombinationen, die nach den in der gegebenen Aussagenalgebra akzeptierten Regeln gebildet sind. Die Angabe dieser Regeln ist gleichzeitig eine Definition des Ausdrucks „aussagenlogische Formel“. Bei der folgenden Definition handelt es sich um eine induktive Definition. Im ersten Punkt der Definition wird festgelegt, welche einfachen Gebilde aussagenlogische Formeln sind, während die folgenden Punkte bestimmen, welche zusammengesetzten Zeichenreihen als aussagenlogische Formeln anzusehen sind. Der letzte Punkt besagt, daß keine außer den in den vorhergehenden Punkten genannten Zeichenreihen aussagenlogische Formeln sind.

D1. Aussagenlogische Formel:

1. Alleinstehende Aussagenvariablen sind aussagenlogische Formeln;
2. wenn A eine aussagenlogische Formel ist, so ist $\sim A$ eine aussagenlogische Formel;

3. wenn A und B aussagenlogische Formeln sind, so sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$, $(A \mid B)$ und $(A \dagger B)$ aussagenlogische Formeln;
4. eine aussagenlogische Formel liegt nur vor, wenn es auf Grund der Punkte 1-3 der Fall ist.

Die Formeln $\sim A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$, $(A \mid B)$ und $(A \dagger B)$ bezeichnen wir entsprechend den vorkommenden Operatoren als eine *Negation, Konjunktion, Adjunktion, Subjunktion* usw.

Wir werden später sehen, daß man beim Aufbau der Aussagenalgebra mit weniger als den oben angegebenen sieben Operatoren auskommt. Beispielsweise kann man die zweiwertige Aussagenalgebra nur mit den Operatoren $\sim$, $\wedge$ und $\vee$ aufbauen. Dann nimmt die Formeldefinition folgende Form an: Die Punkte 1, 2 und 4 lauten wie in *D1*, und der Punkt 3 von *D1* wird ersetzt durch:

3) wenn A und B aussagenlogische Formeln sind, so sind $(A \wedge B)$ und $(A \vee B)$ aussagenlogische Formeln.

Da wir in diesem Bereich der Logik nur aussagenlogische Formeln verwenden, lassen wir das Wort „aussagenlogisch" weg und sprechen einfach von Formeln. Die Formeldefinition dient als Handlungsanweisung, nach der man aus einfachen Formeln kompliziertere aufbauen kann. Nach Punkt 1 von *D1* wissen wir, daß p, q, r, p_1, q_1, r_1 Formeln sind. Setzen wir die ersten drei Formeln für A in Punkt 2 ein, so erhalten wir, daß entsprechend $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$ Formeln sind. Nach Punkt 3 erhalten wir dann, daß beispielsweise $(p \wedge \sim q)$, $(p_1 \supset \sim p)$, $(r \equiv q_1)$ und $(\sim r \dagger r_1)$ Formeln sind. Durch nochmalige Anwendung von Punkt 3 sind dann auch $((p \wedge \sim q) \vee (p_1 \supset \sim p))$ und $((r \equiv q_1) \mid (\sim r \dagger r_1))$ Formeln. Nach der Formeldefinition können wir also beliebig lange Formeln aufbauen und von einer beliebigen vorgegebenen Zeichenreihe entscheiden, ob es sich bei ihr um eine aussagenlogische Formel handelt oder nicht. So sind die Zeichenreihen $(p \vee q$, $(p \mid s)$, $\sim (p \vee q) \wedge$, $\sim \supset p$ nach der Definition keine Formeln, während die Zeichenreihen $((p \wedge q) \wedge \sim r)$, p_5, $(\sim (p \mid q) \wedge (p \vee \sim r))$ aussagenlogische Formeln sind.

D2. Wir sagen, daß eine Formel in einer anderen **vorkommt** (oder ein **Vorkommen** in einer anderen hat) genau dann, wenn sie ein graphischer Teil der anderen ist.

So kommt beispielsweise die Formel $(p \vee q)$ in der Formel $((p \vee q) \wedge r)$ vor, und die Formeln p und q kommen in beiden Formeln vor. Wir weisen schon hier darauf hin, daß es nicht in allen Bereichen der Logik möglich ist, ein Vorkommen einer Formel in einer anderen als deren graphischen Teil zu definieren. In bestimmten Bereichen der Logik (z. B. in der modalen Logik oder in der epistemischen Logik) ist es erforderlich, zwischen einem Vorkommen als Terminus bzw. Aussage und einem Vorkommen als bloßem graphischen Teil zu unterscheiden. Deshalb muß in jedem Bereich der Logik gesondert definiert werden, was unter einem Vorkommen einer Formel in einer anderen zu verstehen ist. Die Definition *D2* gilt für die Aussagenlogik. Wir verwenden gleichfalls den Ausdruck „Teilformel" im folgenden Sinne. Eine Formel ist eine *Teilformel* einer anderen genau dann, wenn sie in dieser anderen Formel vorkommt. Wir vereinbaren weiter, daß eine Formel in sich selbst vorkommt (eine Teilformel von sich selbst ist). Von einer *echten Teilformel* einer Formel A sprechen wir, wenn diese eine Teilformel von A und zugleich von A verschieden ist.

Nicht jeder graphische Teil einer Formel ist eine Teilformel von ihr. So ist der Ausdruck $(p \vee$ ein graphischer Teil von der Formel $(p \vee q)$, er ist aber keine Teilformel von ihr, da dieser Ausdruck definitionsgemäß keine Formel ist.

Neben den oben angegebenen Symbolen, die die Grundlage der Sprache der Aussagenalgebra bilden, verwenden wir noch Symbole zur Bezeichnung beliebiger Formeln und Werte. Diese Symbole geben wir vorweg nicht durch ein Verzeichnis an. Sie werden in dem Maße herangezogen, wie es notwendig ist, und ihr Sinn wird aus dem Kontext klar. Beispielsweise kann folgender Text in der Darstellung vorkommen: „Angenommen, die Formel A habe den Wert α, während die Formel B einen anderen Wert hat." In diesem Satz stehen die Buchstaben A und B offensichtlich für Formeln und α für einen Wahrheitswert. Die Art der Formeln ist dabei gleichgültig, und es spielt auch keine Rolle, welchen Wahrheitswert α darstellt. Der Vorteil solcher Symbole besteht darin, daß sie es ermöglichen, über eine ganze Klasse von Formeln oder sogar über beliebige Formeln zu reden. Solche Symbole nennt man manchmal auch *Metasymbole* (*Metavariablen*).

Die Aussagenalgebra ist eine Gesamtheit von Behauptungen über Werte von Formeln und über die Beziehungen von Formeln unter dem Gesichtspunkt ihrer Werte. Solche Behauptungen sind etwa: „Die Formel $(p \vee \sim p)$ kann nicht den Wert f annehmen", „Der Formel p kann man einen der Werte v oder f zuschreiben", „Die Formeln $(p \vee q)$ und $(q \vee p)$ haben stets den gleichen Wert" usw. Um die Schreibweise solcher Behauptungen kürzer und übersichtlicher zu gestalten, verwenden wir folgende Abkürzungen:

1) $A = i$ - für Ausdrücke der Form „A hat den Wert i" (oder „A wird der Wert i zugeschrieben");
2) $A = B$ - für „A hat den gleichen Wert wie B".

Diese Symbole gehören nicht zum Alphabet der Aussagenalgebra. Sie sind vielmehr Mittel unserer Umgangssprache, ohne die wir in der Logik (wie auch in jeder anderen Wissenschaft) nicht auskommen.

Darüber hinaus verwenden wir noch andere Hilfsmittel. Einerseits benutzen wir Abkürzungen für komplizierte Formeln, andererseits lassen wir zur Vereinfachung der Schreibweise bestimmte Symbole einfach weg. Insbesondere dienen der Ausdruck $(A \supset B)$ als Abkürzung für $(\sim A \vee B)$ und der Ausdruck $(A \subset B)$ als Abkürzung für $(A \vee \sim B)$. Wenn dabei ein Ausdruck A als Abkürzung für eine Formel B benutzt wird, so ist A ebenfalls eine Formel. A ist hier nur eine besondere Schreibweise der Formel B.

Um die Zahl der Symbole in Formeln zu verringern und diese übersichtlicher zu gestalten, treffen wir folgende Vereinbarungen über Klammereinsparungen:

1) Die beiden Außenklammern können in Formeln weggelassen werden.
2) Die Bindungsstärke der Operatoren nimmt in folgender Reihenfolge ab: $\sim$, $|$, $\dagger$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$; so sind etwa die Ausdrücke $p \mid q \dagger r \wedge p$, $p \wedge q \vee r \wedge p$, $p \wedge q \vee r \equiv p \vee q \wedge r$ entsprechend Abkürzungen für die Formeln $(((p \mid q) \dagger r) \wedge p)$, $((p \wedge q) \vee (r \wedge p))$, $(((p \wedge q) \vee r) \equiv \equiv (p \vee (q \wedge r)))$.
3) Wenn nacheinander zwei oder mehr gleiche Operatoren stehen, so werden die Klammern durch Gruppierungen von links nach rechts gesetzt; so ist z. B. $p \wedge q \wedge r \wedge p_1$ eine abgekürzte Schreibweise der Formel $(((p \wedge q) \wedge r) \wedge p_1)$, und der Ausdruck $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \supset q_1 \vee q_2 \vee q_3 \equiv \equiv r_1 \wedge r_2 \vee r_3 \vee r_4$ ist eine Abkürzung der Formel $((((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3) \supset ((q_1 \vee q_2) \vee q_3)) \equiv \equiv (((r_1 \wedge r_2) \vee r_3) \vee r_4))$.

Weiter vereinbaren wir, den Operator $\wedge$ manchmal einfach wegzulassen, indem wir die durch ihn verknüpften Formeln einfach nebeneinander schreiben. So ist z. B. der Ausdruck $pqr \vee \vee \sim pqr \vee p \sim qr$ eine abgekürzte Schreibweise der Formel $p \wedge q \wedge r \vee \sim p \wedge q \wedge r \vee p \wedge \sim q \wedge r$, die nach der Klammersetzung die Form $((((p \wedge q) \wedge r) \vee ((\sim p \wedge q) \wedge r)) \vee ((p \wedge \sim q) \wedge r))$ annimmt.

Wir verwenden im weiteren folgende Redeweisen:

D3. Die Formeln A_1, A_2,..., A_n $(n \geq 1)$ nennen wir in einer Adjunktion $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ **Adjunktionsglieder** (oder **Glieder der Adjunktion**) und in einer Konjunktion $A_1 \wedge A_2 \wedge \wedge \ldots \wedge A_n$ **Konjunktionsglieder** (**Glieder einer Konjunktion**).

D4. In einer Subjunktion $A \supset B$ nennen wir die Formel A **Antezedent** und die Formel B **Konsequent**.

D5. Einen logischen Operator nennen wir **Hauptoperator einer Formel** genau dann, wenn er nach der Klammersetzung in einer Formel wie folgt angeordnet ist:

1) der Operator $\sim$ ist der Hauptoperator in einer Formel $\sim A$;
2) der Operator $\vee$ ist der Hauptoperator in einer Formel $(A \vee B)$;
3) der Operator $\wedge$ ist der Hauptoperator in einer Formel $(A \wedge B)$;
4) die Operatoren $\supset$, $\equiv$, $|$, $\dagger$ sind entsprechend Hauptoperatoren in den Formeln $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$, $(A \mid B)$ und $(A \dagger B)$.

Übungen:

1. Bilden Sie drei aussagenlogische Formeln, die jeweils aus mindestens sieben Grundzeichen bestehen!
2. Wieviel verschiedene Formeln mit höchstens fünf Zeichen kann man aus den Symbolen p, q, $\supset$ und ( ) aufbauen?
3. Prüfen Sie, welche der folgenden Zeichenreihen gemäß *D1* ohne Berücksichtigung der Konventionen über Klammereinsparungen aussagenlogische Formeln sind:
   a) (p)
   b) q
   c) $\sim(r)$
   d) $(p \wedge q \supset (r \vee p))$
   e) $(((p \wedge q) \vee r) \mid p)$
   f) $(p \vee r) \wedge \sim p$
   g) $\sim(p \dagger r) \supset p$
   h) $((p \equiv p) \vee \sim(r))$!
4. Prüfen Sie, welche der in Aufgabe 3 angegebenen Zeichenreihen gemäß *D1* mit Berücksichtigung der Konventionen über Klammereinsparungen aussagenlogische Formeln sind. Setzen Sie in den Formeln alle möglichen Klammern!
5. Sind die folgenden Zeichenreihen aussagenlogische Formeln:
   a) $(A \vee B)$
   b) $(p \vee \sim p) = v$
   c) $v = \sim f$
   d) $v \vee f$?
6. Geben Sie alle Formeln an, die in der folgenden Formel vorkommen: $(((p \wedge q) \mid r) \equiv ((p \supset \sim q) \vee (p \dagger p_1)))$!
7. Welche der Zeichenreihen p, $(p$, $p \vee q$, $(p \wedge r)$, $q) \mid ((p$, $((p \wedge r) \supset p)$ sind Teilformeln der Formel $((p \vee q) \mid ((p \wedge r) \supset q))$?
8. Bestimmen Sie den Hauptoperator in folgenden Formeln: $\sim p$, $p \mid q \dagger r$, $p \wedge q \vee r \supset p \equiv r$, $(p \supset q) \vee (q \supset p) \wedge (r \equiv p)$, $p \supset q \supset p \supset p$, $(p \supset (q \supset r)) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$, $\sim(p \mid p)$!
9. Gegeben sei folgendes Alphabet: p, q, r - Aussagenvariablen; ... $|$ ... - ein zweistelliger aussagenbildender Operator, (und) - Klammern. Definieren Sie für dieses Alphabet den Terminus „aussagenlogische Formel“!
10. Gegeben sei folgendes Alphabet: p, q, r - Aussagenvariablen; ... $\wedge$ ... $\wedge$ ... - ein dreistelliger

aussagenlogischer Operator und Klammern (,). Definieren Sie für dieses Alphabet den Terminus „aussagenlogische Formel“!

11. Nach einer Idee von Łukasiewicz kann man die aussagenlogischen Formeln eindeutig ohne Klammern schreiben, wenn man die mehrstelligen Operatoren vor ihre Argumente schreibt und nicht, wie wir es bisher handhabten, zwischen sie (z. B. $\wedge pq$ anstelle von $(p \wedge q)$). Verwenden Sie als Metavariablen für beliebige aussagenlogische Formeln die Buchstaben α, β, γ und anstelle der Operatorensymbole $\sim$, $\wedge$, $\vee$ und $\supset$ entsprechend N, K, A und C, und definieren Sie den Terminus „aussagenlogische Formel“ für diese klammerfreie Schreibweise!
12. Übersetzen Sie die Formeln $NKpq$, $AKpqCqr$, $CCCpqpp$, $NKpNp$, $ApNp$ und $CCpCqrCCpqCpr$ in die Schreibweise gemäß *D1*!
13. Übersetzen Sie die Formeln $p \wedge q \wedge r \vee p$, $(p \supset q) \vee (q \supset p)$, $p \supset q \supset (q \supset r \supset (p \supset r))$, $p \supset (p \supset q \supset q)$ in die klammerfreie Schreibweise!
14. Definieren Sie für die klammerfreie Schreibweise den Terminus „Hauptoperator“!
15. Übersetzen Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen in die Sprache der Aussagenalgebra (für einfache Aussagen schreiben wir Aussagenvariablen, die Operatoren $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $|$ und $\dagger$ verwenden wir entsprechend als Abkürzungen für „nicht ...“, „... und ...“, „... oder ...“, „wenn ..., so ...“, „... genau dann, wenn ...“, „nicht beide“, „weder ... noch ...“):
    a) Klaus und Anton sind Brüder.
    b) Klaus ist Offizier, und Anton geht zur Schule.
    c) Wenn in einem Produkt $a \cdot b$ der Faktor $a = 0$ ist, so ist $a \cdot b = 0$, und wenn in dem Produkt $a \cdot b$ der Faktor $b = 0$ ist, so gilt auch $a \cdot b = 0$.
    d) Weder Klaus noch Anton war Sieger.
    e) Weder Klaus noch Anton ist ein Bruder von Karl.
    f) Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird bestraft.

4.3 Semantische Definitionen wichtiger aussagenlogischer Operatoren

Aussagenlogischen Formeln werden die Werte v und f zugeschrieben. Einer Formel A einen Wert i zuzuschreiben bedeutet nichts anderes, als zu sagen, daß A den Wert i hat ($A = i$). So bedeutet es z. B., der Formel $(p \vee q)$ den Wert v zuzuschreiben, einfach den Satz „Die Formel $(p \vee q)$ hat den Wert v“ oder „Wir nehmen an, die Formel $(p \vee q)$ hat den Wert v“ zu bilden.

Variablen werden die Werte v und f nach folgenden Regeln zugeschrieben:

1) Einer Variablen kann ein beliebiger der Werte v und f zugeschrieben werden; wenn dabei einer der Werte zugeschrieben wurde, so kann ihr nicht gleichzeitig der andere Wert zugeschrieben werden;
2) wenn eine Variable in einer Formel an zwei oder mehr Stellen vorkommt, so wird allen Vorkommen dieser Variablen in der gegebenen Formel der gleiche Wert zugeschrieben;
3) kommen in einer Formel verschiedene Variablen vor, so können ihnen verschiedene Werte zugeschrieben werden, d. h., verschiedenen Variablen werden unabhängig voneinander Werte zugeschrieben.

Formeln, die aussagenlogische Operatoren enthalten, werden Werte nach Regeln zugeschrieben, die gleichzeitig Definitionen dieser Operatoren selbst sind. Diese Regeln (bzw. Definitionen) sind Gesamtheiten von Sätzen, mit deren Hilfe die folgenden zwei Arten von Abhängigkeiten festgelegt werden:

1) Es wird angegeben, welchen Wert eine Formel A annimmt, die den zu definierenden (einzuführenden) Operator enthält, in Abhängigkeit von den Werten, die den in der Formel A vorkommenden echten Teilformeln $B_1, \ldots, B_n$ $(n > 1)$ zugeschrieben werden;
2) es wird angegeben, welche Werte die oben angegebenen Teilformeln $B_1, \ldots, B_n$ in Abhängigkeit davon annehmen können, daß der Formel A der Wert i zugeschrieben wird.

Die Definitionen, von denen hier gesprochen wird, sind eine besondere Art von Funktionen. Man nennt sie *aussagenlogische Funktionen* oder *Wahrheitsfunktionen*. Die in einer Formel A vorkommenden echten Teilformeln $B_1, \ldots, B_n$ $(n > 1)$, in Abhängigkeit von deren Wert der Wert der Formel A definiert wird, sind die Argumente dieser Funktionen. Die Formel A ist eine Funktion dieser Argumente. Die Operatoren stellen den Typ der Funktionen (den Typ der Abhängigkeit) dar. Man nennt die hier betrachteten Definitionen *semantische Definitionen*, weil in ihnen nur die Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Gesamtformel von den Wahrheitswerten der in ihr vorkommenden echten Teilformeln berücksichtigt wird. Die aussagenlogischen Funktionen werden in Abhängigkeit von der Zahl der Argumente in einstellige, zweistellige, dreistellige, allgemein n-stellige (wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$) unterschieden. Diese Funktionen werden mit Hilfe von Konditionalsätzen der Form „Wenn X, so Y“ formuliert oder aber mit Hilfe von Tabellen (oder Matrizen) angegeben, die eine abgekürzte und übersichtliche Schreibweise solcher Satzgesamtheiten sind.

Wir geben die semantischen Definitionen einiger wichtiger aussagenlogischer Operatoren an. Die *Negation* wird durch die folgende Tabelle definiert, in der A eine beliebige Formel ist:

A	$\sim A$
v	f
f	v

(Tab. 1)

In Sätzen läßt sich diese Tabelle wie folgt schreiben:

„Wenn $A = v$, so $\sim A = f$; wenn $A = f$, so $\sim A = v$.“

Die *Konjunktion*, *Adjunktion*, *Subjunktion*, *Bisubjunktion*, *Negatadjunktion* und *Negatkonjunktion* werden entsprechend durch die folgenden Tabellen definiert:

A	B	$A \wedge B$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

(Tab. 2)

A	B	$A \vee B$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

(Tab. 3)

A	B	$A \supset B$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

(Tab. 4)

A	B	$A \equiv B$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

(Tab. 5)

A	B	$A \mid B$
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	v

(Tab. 6)

A	B	$A \dagger B$
v	v	f
v	f	f
f	v	f
f	f	v

(Tab. 7)

Diese Tabellen lassen sich gleichfalls durch Gesamtheiten von Konditionalsätzen ersetzen. Die Definition der Konjunktion nimmt dann folgende Form an: „Wenn $A = v$ und $B = v$, so $A \wedge B = v$; wenn $A = v$ und $B = f$, so $A \wedge B = f$; wenn $A = f$ und $B = v$, so $A \wedge B = f$; wenn $A = f$ und $B = f$, so $A \wedge B = f$." Kürzer läßt sich dasselbe wie folgt schreiben: „$A \wedge B = v$ genau dann, wenn $A = v$ und $B = v$."

Die angeführten Tabellen (und die ihnen adäquaten Satzgesamtheiten) sind Definitionen der Operatoren und der entsprechenden Typen von aussagenlogischen Funktionen. Um dies zu verdeutlichen, geben wir noch einmal die vollständige Definition der Negation und der Konjunktion an. Definition der Negation: Wir verwenden den Operator $\sim$ so (führen $\sim$ so ein), daß für ihn die Tabelle 1 gilt. Definition der Konjunktion: Wir verwenden den Operator $\wedge$ so, daß für ihn die Tabelle 2 gilt. Analog verfährt man mit den anderen Operatoren.

In den angeführten Definitionen ist implizit enthalten, was wir bereits zu Beginn dieses Abschnitts gesagt haben, d. h., das Lesen der Tabellen in umgekehrter Richtung. Für die Negation heißt das: wenn $\sim A = f$, so $A = v$; wenn $\sim A = v$, so $A = f$; für die Konjunktion: wenn $A \wedge B = v$, so $A = v$ und $B = v$; wenn $A \wedge B = f$, so entweder $A = v$ und $B = f$ oder $A = f$ und $B = v$ oder $A = f$ und $B = f$ (d. h., mindestens eine der Formeln A und B hat den Wert f). Analog werden die Tabellen für die anderen Operatoren von rechts nach links gelesen: Man nimmt den Fall, wo ein Ausdruck mit dem gegebenen Operator den Wert v hat, und erklärt, bei welchen Wertkombinationen für die Argumente dies möglich ist; analog verfährt man für f. Als Beispiel betrachten wir noch die Tabelle 5, wo es für v und f jeweils zwei Möglichkeiten gibt: wenn $A \equiv B = v$, so entweder $A = v$ und $B = v$ oder $A = f$ und $B = f$; wenn $A \equiv B = f$, so entweder $A = v$ und $B = f$ oder $A = f$ und $B = v$.

4.4 Werte von Formeln

Die im Abschnitt 3 angegebenen Definitionen liefern Regeln, mit deren Hilfe man für eine beliebige Formel A mit den durch diese Regeln definierten Operatoren feststellen kann, welche Werte sie aus der Wertmenge v und f für eine gegebene Wertkombination der in ihr vorkommenden Variablen $B_1, \ldots, B_n$ $(n > 1)$ annimmt. Diese Regeln nennen wir *semantische Regeln*.

Betrachten wir z. B. die Formel $(p \vee q) \supset r \equiv \sim(\sim p \vee r)$. In ihr kommen die Variablen p, q und r vor. Da verschiedenen Variablen unabhängig voneinander Werte zugeschrieben werden, sind verschiedene Wertkombinationen für diese drei Variablen möglich, insbesondere auch die Kombination $p = v$, $q = v$ und $r = f$. Wir schreiben den Variablen diese Werte zu und stellen fest, welchen Wert unter dieser Bedingung die Formel insgesamt annimmt. Wir gehen dabei folgendermaßen vor: Wenn $p = v$ und $q = v$, so hat nach der Tabelle für $\vee$ die Formel $(p \vee q)$ den Wert v; da $r = f$, erhalten wir nach der Tabelle für die Subjunktion $(p \vee q) \supset r = f$; da $p = v$, gilt nach der Tabelle für die Negation $\sim p = f$; da außerdem $r = f$, erhalten wir nach der Tabelle für die Adjunktion $\sim p \vee r = f$ und nach der Tabelle für die Negation $\sim(\sim p \vee r) = v$; nach der Definition von $\equiv$ erhalten wir jetzt, daß die vorliegende Formel unter der Bedingung $p = v$, $q = v$ und $r = f$ den Wert f hat. Da sich der Wert einer Formel A für eine beliebige Wertkombination für die in A vorkommenden Variablen $B_1, \ldots, B_n$ feststellen läßt, kann man das auch für alle Wertkombinationen von $B_1, \ldots, B_n$ tun. Damit wird festgestellt, welche Werte die Formel A überhaupt annehmen kann. In der unten als Beispiel angegebenen Tabelle für die Formel $(p \vee q) \supset r \equiv \sim(\sim p \vee r)$ sind unter den Variablen alle möglichen Wertkombinationen für p, q, r geschrieben (das sind insgesamt acht), und unter den Operatoren steht jeweils der Wert, den diese oder jene Teilformel für diese Wertkombination annimmt.

$($p	$\vee$	$q)$	$\supset$	r	$\equiv$	$\sim($	$\sim p$		$\vee$	$r)$
v	v	v	v	v	f	f	f	v	v	v
v	v	v	f	f	f	v	f	v	f	f
v	v	f	v	v	f	f	f	v	v	v
v	v	f	f	f	f	v	f	v	f	f
f	v	v	v	v	f	f	v	f	v	v
f	v	v	f	f	v	f	v	f	v	f
f	f	f	v	v	f	f	v	f	v	v
f	f	f	v	f	f	f	v	f	v	f

Die Werte, die die Formel annimmt, sind unter dem Operator $\equiv$ geschrieben. Wie wir sehen, nimmt diese Formel für alle Wertkombinationen den Variablen, außer einer, den Wert f an.

Übungen:

1. Wieviel verschiedene Kombinationen der Werte v und f sind entsprechend für 1, 2, 3, allgemein n verschiedene Variablen möglich?
2. Formulieren Sie die Wahrheitstabellen der Adjunktion, der Subjunktion, der Negatadjunktion und der Negatkonjunktion in Form von Konditionalsätzen!
3. Schreiben Sie die Wahrheitstabellen der zweistelligen Operatoren in Form von Matrizen nach dem folgenden Muster für die Konjunktion!

$A \wedge B$	v	f
v	v	f
f	f	f

(Erläuterung: In der obersten Zeile steht der Argumentwert von A, in der linken Spalte steht der Argumentwert von B, und der Funktionswert von $A \wedge B$ steht für gegebene Werte von A und B jeweils in der entsprechenden Zeile und Spalte.)

4. Vergleichen Sie die Funktionswerte für gegebene Werte der Argumente in den Tabellen 2 und 6 sowie 3 und 7!
5. Die zu Beginn des Abschnitts 4 getroffene Behauptung läßt sich in Form des folgenden Metatheorems schreiben:

   MT1. Für eine beliebige aussagenlogische Formel A läßt sich feststellen, welchen Wert sie bei einer gegebenen Wertkombination der in ihr vorkommenden Variablen annimmt.

   Beweisen Sie dieses Metatheorem induktiv unter Verwendung von *D1* aus Abschnitt 2 und der semantischen Definition der aussagenlogischen Operatoren aus Abschnitt 3! Führen Sie den Induktionsbeweis über die Anzahl von logischen Operatoren in A und beginnen Sie mit dem Fall, in dem A keine logischen Operatoren enthält! Zeigen Sie, daß aus *MT1* unmittelbar *MT2* folgt!

   MT2. Für jede gegebene aussagenlogische Formel A läßt sich feststellen, welche Werte sie bei allen möglichen Wertkombinationen für die in ihr vorkommenden Variablen annimmt.
6. Ermitteln Sie die Werte der folgenden Formeln für alle möglichen Wertkombinationen der in ihnen vorkommenden Variablen:

   a) $p \wedge \sim p$
   b) $p \vee \sim p$
   c) $p \vee q \supset r$

d) $\sim(p \wedge \sim p)$
e) $p \equiv \sim p$
f) $(p \mid p) \mid (p \mid p) \supset p$
g) $p \supset q \supset p \supset p$
h) $(p \wedge \sim p) \dagger (p \wedge \sim p)$!

7. Klassifizieren Sie die Formeln aus Übung 6 in drei Gruppen, je nachdem, welche Werte die Formeln bei allen Wertkombinationen für die in ihnen vorkommenden Variablen annehmen können!

4.5 Tautologien, Kontradiktionen, logisch erfüllbare und logisch indeterminierte Formeln

Wir geben zunächst einige Definitionen an:

D1. Eine Formel wird eine **Tautologie** (oder eine **allgemeingültige Formel** oder eine **logisch wahre Formel**) genannt genau dann, wenn sie bei jeder beliebigen Wertkombination für die in ihr vorkommenden Variablen den Wert v annimmt.

D2. Eine Formel wird eine **Kontradiktion** (oder eine **logisch unerfüllbare** oder eine **logisch falsche Formel**) genannt genau dann, wenn sie bei jeder Wertkombination für die in ihr vorkommenden Variablen den Wert f annimmt.

D3. Eine Formel wird **logisch erfüllbar** genannt genau dann, wenn es eine Wertkombination für die in ihr vorkommenden Variablen gibt, bei der diese Formel den Wert v annimmt.

D4. Eine Formel wird **logisch indeterminiert** (eine **logische Neutralität**) genannt genau dann, wenn sie keine Tautologie und keine Kontradiktion ist.

D5. Eine Klasse von Formeln wird **gemeinsam erfüllbar** genannt genau dann, wenn es mindestens eine Wertkombination für die in den Formeln vorkommenden Variablen gibt, bei der alle Formeln dieser Klasse den Wert v annehmen

D6. Eine Klasse von Formeln, die nicht gemeinsam erfüllbar ist, wird eine **widersprüchliche Formelklasse** genannt.

Die Begriffe *Tautologie*, *Kontradiktion*, *logisch indeterminierte Formel* und *logisch erfüllbare Formel* dienen der Klassifizierung der aussagenlogischen Formeln. Wir haben es hier mit zwei verschiedenen Klassifikationen zu tun. Einmal werden die aussagenlogischen Formeln in die folgenden zwei Klassen eingeteilt:

1. in die Klasse der Formeln, die mindestens bei einer Wertkombination für die in ihnen vorkommenden Variablen den Wert v annehmen (erfüllbare Formeln),
2. in die Klasse von Formeln, die bei keiner Wertkombination für die in ihnen vorkommenden Variablen den Wert v annehmen (unerfüllbare Formeln).

Zum anderen werden die aussagenlogischen Formeln in die folgenden drei Klassen eingeteilt:

1. in die Klasse von Formeln, die bei jeder Wertkombination für die in ihnen vorkommenden Variablen den Wert v annehmen (Tautologien),
2. in die Klasse von Formeln, die bei jeder Wertkombination für die in ihnen vorkommenden Variablen den Wert f annehmen (Kontradiktionen) und
3. in die Klasse von Formeln, die mindestens bei einer Wertkombination für die in ihnen vorkommenden Variablen den Wert v und mindestens bei einer Wertkombination den Wert f annehmen (logisch indeterminierte Formeln).

Anschaulich ergeben diese beiden Klassifikationen folgendes Bild:

<table>
<tr><td colspan="3">Klasse aller aussagenlogischen Formeln</td></tr>
<tr><td>Tautologien</td><td>logisch indeterminierte Formeln</td><td>Kontradiktionen</td></tr>
<tr><td colspan="2">logisch erfüllbare Formeln</td><td>logisch unerfüllbare Formeln</td></tr>
</table>

Zwischen Tautologien und Kontradiktionen bestehen folgende Beziehungen:

T1. Wenn eine Formel A eine Tautologie ist, so ist $\sim A$ eine Kontradiktion.
T2. Wenn eine Formel A eine Kontradiktion ist, so ist $\sim A$ eine Tautologie.

Die Theoreme *T1* und *T2* sind auf Grund der Definitionen einer Tautologie, einer Kontradiktion und der Negation offensichtlich. Mit dem Symbol $A\{a/B\}$ bezeichnen wir die Formel, die man aus A erhält, wenn man in A für alle Vorkommen der Aussagenvariablen a die Formel B einsetzt (*Einsetzung für Aussagenvariablen*).

Beispiel*:* A möge die Formel $p \supset (q \supset p)$ sein, a sei die Variable p, und B sei die Formel $q \wedge r$, dann steht das Symbol $A\{a/B\}$ für die Formel $q \wedge r \supset (q \supset q \wedge r)$. Wenn die Variable a in der Formel A nicht vorkommt, so sind die Formeln A und $A\{a/B\}$ identisch. Für Einsetzungen gelten folgende Theoreme:

T3. Wenn A eine Tautologie ist und a eine Variable, so ist $A\{a/B\}$ eine Tautologie.

Beweis: A ist eine Tautologie, d. h., A nimmt den Wert v sowohl in dem Fall an, wenn $a = v$, als auch, wenn $a = f$. In der Formel $A\{a/B\}$ steht an allen Stellen, an denen in A die Variable a steht, die Formel B. Die Formel B kann aber auch nur einen der beiden Werte v oder f annehmen. Damit nimmt die Formel $A\{a/B\}$ immer den Wert v an.

T4. Wenn A eine Kontradiktion ist und a eine Variable, so ist $A\{a/B\}$ eine Kontradiktion.

Der Beweis von *T4* ist dem von *T3* analog.

Mit den Begriffen der gemeinsam erfüllbaren und der widersprüchlichen Formelklasse können wir fixieren, ob eine Gesamtheit von Formeln und entsprechend von Aussagen gemeinsam wahr sein können oder nicht. Beispielsweise sind die Formeln p, $p \vee q$, $\sim\sim p$, $p \vee \sim q$, $p \supset q \supset p$ gemeinsam erfüllbar, da sie unter der Bedingung $p = v$ und $q = v$ alle den Wert v annehmen. Die Formeln p, $\sim p$, $p \vee q$, $p \supset q$ bilden hingegen eine widersprüchliche Formelklasse, denn bei $p = v$ gilt $\sim p = f$, und bei $\sim p = v$ gilt $p = f$.

Übungen:

Prüfen Sie, ob die folgenden Sätze gelten:

a) Wenn $A\{a/B\}$ eine Tautologie ist, so ist A eine Tautologie.
b) Wenn $A\{a/B\}$ eine Kontradiktion ist, so ist A eine Kontradiktion.
c) Wenn A eine logisch indeterminierte Formel ist, so ist $A\{a/B\}$ eine logisch indeterminierte Formel.
d) Wenn $A\{a/B\}$ eine logisch indeterminierte Formel ist, so ist A eine logisch indeterminierte Formel.

4.6 Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik mit Hilfe von Wahrheitstabellen

Nach *MT2* aus Übung 5 zu Abschnitt 4 läßt sich für eine beliebige Formel A feststellen, welche Werte sie bei allen möglichen Wertkombinationen für die in ihr vorkommenden Variablen annimmt. Damit haben wir auch ein allgemeines Entscheidungsverfahren, um festzustellen, ob eine beliebige Formel eine Tautologie, eine Kontradiktion oder eine logisch indeterminierte Formel ist. Wir brauchen dazu nur alle möglichen Wertkombinationen für die in der betreffenden Formel vorkommenden Variablen aufzustellen und zu ermitteln, welchen Wert die Gesamtformel bei jeder dieser Wertkombinationen annimmt. Nimmt die Formel dabei immer den Wert v an, ist sie eine Tautologie, nimmt sie immer den Wert f an, ist sie eine Kontradiktion, ansonsten ist sie eine logisch indeterminierte Formel.

Wir wollen Formeln so überprüfen, daß wir unter die in ihnen vorkommenden Variablen alle möglichen Wertkombinationen für diese Variablen schreiben und unter die Operatoren der Formeln ihren semantischen Definitionen gemäß die entsprechenden Werte der jeweiligen Teilformel. Wählen wir z. B. die Formel $q \supset r \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$! Zunächst schreiben wir unter die Variablen q, r und p alle möglichen Wertkombinationen.

$q \supset$	$r \supset$	$(p \supset$	$q \supset$	$(p \supset$	$r))$
v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	f	v
v	f	v	v	v	f
v	f	f	v	f	f
f	v	v	f	v	v
f	v	f	f	f	v
f	f	v	f	v	f
f	f	f	f	f	f

Es ist zu empfehlen, die möglichen Wertkombinationen für die in einer Formel vorkommenden Variablen systematisch zu schreiben. Bei einer oder zwei Variablen übersieht man sofort, welche Wertkombinationen möglich sind. Doch schon bei drei und erst recht bei mehr Variablen muß man aufpassen, keine Wertkombinationen zu vergessen. Bei einem systematischen Vorgehen zählt man zuerst die vorkommenden Variablen. Bei n Variablen gibt es dann in der zweiwertigen Aussagenlogik 2^n mögliche Wertkombinationen. Unter die erste Variable schreibt man dann $\frac{2^n}{2}$ *mal* v und $\frac{2^n}{2}$ *mal* f, unter die zweite zweimal $\frac{2^n}{4}$ *mal* v und $\frac{2^n}{4}$ *mal* f. Diesen Prozeß setzt man solange fort, bis unter der letzten Variablen der Formel abwechselnd v und f geschrieben wird. In unserem Beispiel ermitteln wir jetzt schrittweise die Wahrheitswerte der Teilformeln und schließlich der Gesamtformel bei den vorgegebenen Werten der Variablen:

q	$\supset$	r	$\supset$	$(p$	$\supset$	q	$\supset$	$(p$	$\supset$	$r))$
v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
v	v	v	v	f	v	v	v	f	v	v
v	f	f	v	v	v	v	f	v	f	f
v	f	f	v	f	v	v	v	f	v	f
f	v	v	v	v	f	f	v	v	v	v
f	v	v	v	f	v	f	v	f	v	v
f	v	f	v	v	f	f	v	v	f	f
f	v	f	$\underline{\underline{v}}$	f	v	f	v	f	v	f

Die Spalte der Werte, die die Gesamtformel bei den vorgegebenen Werten der Variablen annimmt, haben wir zweimal unterstrichen. Unsere Beispielformel nimmt immer den Wert v an und ist eine Tautologie.

Auch für Formelschemata (Behauptungen mit Symbolen für beliebige Formeln) können Wahrheitstabellen aufgestellt werden. Hier werden alle möglichen Wertkombinationen für die in einem Formelschema vorkommenden Formelvariablen ermittelt, und dann wird der Wahrheitswert des Formelschemas unter diesen Annahmen ermittelt. Da die Einsetzungsregel für Tautologien und Kontradiktionen (*T3* und *T4* aus Abschnitt 5) gilt, gelten folgende Theoreme:

T1. Wenn ein Formelschema bei allen möglichen Wertkombinationen für die in ihm vorkommenden Formelvariablen den Wert v annimmt, so sind alle Formeln, die die logische Form dieses Formelschemas haben, Tautologien.

T2. Wenn ein Formelschema bei allen möglichen Wertkombinationen für die in ihm vorkommenden Formelvariablen den Wert f annimmt, so sind alle Formeln, die die logische Form dieses Formelschemas haben, Kontradiktionen.

So sind alle Formeln der Form $A \vee \sim A$, $\sim(\sim A \wedge A)$, $A \supset A$ Tautologien und alle Formeln der Form $A \wedge \sim A$, $A \equiv \sim A$, $\sim(A \vee \sim A)$ Kontradiktionen.

Um festzustellen, ob eine gegebene Formel eine Tautologie ist oder nicht, müssen wir nach dem angegebenen Verfahren feststellen, ob die gegebene Formel bei allen möglichen Wertkombinationen für die in ihr vorkommenden Variablen den Wert v annimmt oder nicht. Dieses Verfahren hat zwar rein mechanischen Charakter und ist sehr einfach, wenn jedoch eine größere Zahl von Variablen auftritt, ist es sehr aufwendig. Deshalb werden für praktische Zwecke eine Reihe von Vereinfachungen dieses Verfahrens vorgeschlagen. Wir wollen hier nur ein verkürztes Verfahren angeben, das auf alle Formeln anwendbar ist, die eine Subjunktion als Hauptoperator enthalten. Wir verdeutlichen dieses verkürzte Verfahren an einem Beispiel: Es sei zu überprüfen, ob die Formel $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$ eine Tautologie ist oder nicht. Dazu nehmen wir zunächst an, daß diese Formel keine Tautologie sei, d. h., daß sie mindestens bei einer Wertkombination für die in ihr vorkommenden Variablen den Wert f annimmt. Dann versuchen wir zu zeigen, daß es unmöglich ist, eine solche Wertkombination zu konstruieren, bei der die Formel den Wert f annimmt, d. h., wir führen unsere ursprüngliche Annahme zum Widerspruch, und haben damit gezeigt, daß die betreffende Formel eine Tautologie ist. Wir nehmen also an, es gäbe eine Wertkombination für die Variablen, bei der unsere Formel den Wert f annimmt.

$$\begin{array}{ccccccccc} (p & \supset & q) & \supset & (\sim & q & \supset & \sim & p) \\ & & & f & & & & & \end{array}$$

Dies könnte aber auf Grund der Wahrheitstabelle für die Subjunktion nur der Fall sein, wenn das Antezedent der Formel den Wert v und das Konsequent den Wert f hätten.

$$\begin{array}{ccccccccc} (p & \supset & q) & \supset & (\sim & q & \supset & \sim & p) \\ & v & & f & & & f & & \end{array}$$

Das Konsequent $(\sim q \supset \sim p)$ kann aber auf Grund der Wahrheitstabelle für $\supset$ nur den Wert f haben, wenn $\sim q = v$ und $\sim p = f$, d. h., wenn $q = f$ und $p = v$. Unter dieser Bedingung hätte aber das Antezedent den Wert f und nicht den Wert v. Es ist also keine Wertkombination möglich, bei der unsere Formel den Wert f annimmt, sie ist also eine Tautologie. Die ganze Erörterung läßt sich in einer Zeile schreiben:

$$\begin{array}{ccccccccc} (p & \supset & q) & \supset & (\sim & q & \supset & \sim & p) \\ v & v & f & f & v & f & f & f & v \end{array}$$

Wir betrachten noch ein anderes Beispiel. Es sei zu überprüfen, ob die Formel $(p \supset q) \supset (q \supset p)$ eine Tautologie ist. Wir nehmen an, sie sei keine Tautologie, und ermitteln sukzessive die Werte der Teilformeln unter dieser Bedingung:

$$\begin{array}{l}(p \supset q) \supset (q \supset p) \\ \;f\; v\; v\;\; f \;\;\; v\; f\;\; f\end{array}$$

Jetzt übertragen wir die Werte, die wir für q und p im Konsequent haben, ins Antezedent und stellen fest, daß das Antezedent unter diesen Bedingungen den Wert v annehmen kann. Unsere ursprüngliche Annahme, die Formel sei keine Tautologie, war also gerechtfertigt, sie führte nicht zu einem Widerspruch, und wir haben gerade eine Wertkombination gefunden, bei der die Formel den Wert f annimmt.

4.7 Wichtige Tautologien

Wir führen einige häufig verwendete Tautologien und ihre Bezeichnungen an:

T1.	$\sim A \vee A$	- Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten;
T2.	$\sim(\sim A \wedge A)$	- Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch;
T3.	$\sim\sim A \supset A$	- Gesetz der Beseitung der doppelten Negation;
T4.	$A \supset \sim\sim A$	- Gesetz zur Einführung der doppelten Negation;
T5.	$A \supset A \vee A$	- Gesetze der Wiederholung;
T6.	$A \vee A \supset A$	
T7.	$A \supset A \wedge A$	
T8.	$A \wedge A \supset A$	
T9.	$A \wedge B \supset A$	- Gesetz zur Beseitigung der Konjunktion;
T10.	$A \wedge B \supset B \wedge A$	- Kommutationsgesetz der Konjunktion;
T11.	$A \wedge (B \wedge C) \supset A \wedge B \wedge C$	- Assoziationsgesetz der Konjunktion;
T12.	$A \supset A \vee B$	- Gesetz zur Einführung der Adjunktion;
T13.	$A \vee B \supset B \vee A$	- Kommutationsgesetz der Adjunktion;
T14.	$A \vee (B \vee C) \supset A \vee B \vee C$	- Assoziationsgesetz der Adjunktion;
T15.	$\sim(A \vee B) \supset \sim A \wedge \sim B$	- de Morgansche Gesetze;
T16.	$\sim A \wedge \sim B \supset \sim(A \vee B)$	
T17.	$\sim(A \wedge B) \supset \sim A \vee \sim B$	
T18.	$\sim A \vee \sim B \supset \sim(A \wedge B)$	
T19.	$A \supset B \supset (\sim B \supset \sim A)$	- Gesetze der Kontraposition;
T20.	$\sim B \supset \sim A \supset (A \supset B)$	
T21.	$A \wedge B \supset C \supset (A \wedge \sim C \supset \sim B)$	
T22.	$A \wedge B \supset C \supset (A \supset (B \supset C))$	- Gesetz der Exportation;
T23.	$A \supset (B \supset C) \supset (A \wedge B \supset C)$	- Gesetz der Importation;
T24.	$A \supset (B \supset C) \supset (B \supset (A \supset C))$	- Gesetz der Prämissenvertauschung;
T25.	$(A \supset B) \wedge (A \supset C) \supset (A \supset B \wedge C)$	- Gesetz der Konklusionskonjunktion;
T26.	$(A \supset C) \wedge (B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$	- Gesetz der Prämissenadjunktion;
T27.	$A \supset B \supset (B \supset C \supset (A \supset C))$	- Transitivitätsgesetz der Subjunktion (Kettenschluß);
T28.	$A \supset (B \supset C) \supset (A \supset B \supset (A \supset C))$	- Fregescher Kettenschluß;
T29.	$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	- Distributionsgesetze;
T30.	$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	
T31.	$A \mid B \equiv \sim A \vee \sim B$	- Gesetze zur Einführung und Beseitigung der
T32.	$A \dagger B \equiv \sim A \wedge \sim B$	Negatadjunktion bzw. Negatkonjunktion.

Übungen:

1. Beweisen Sie mit Hilfe des verkürzten Entscheidungsverfahrens, daß *T1* bis *T32* aus Abschnitt 7 Tautologien sind! Beachten Sie, daß in *T29* bis *T32* der Hauptoperator eine Bisubjunktion ist!
2. Prüfen Sie, ob es sich bei folgenden Formeln um Tautologien, Kontradiktionen oder logisch indeterminierte Formeln handelt:
   a) $p \wedge {\sim}p$
   b) $p \supset q \supset p \supset p$
   c) ${\sim}p \supset {\sim}q \supset (p \supset q)$
   d) $p \mid p \mid (p \mid p) \supset p$
   e) $p \supset p \dagger p \dagger (p \dagger p)$
   f) $p \equiv {\sim}p$
   g) ${\sim}(p \wedge q \wedge r) \supset {\sim}p \vee {\sim}q \vee {\sim}r$!
3. Prüfen Sie, ob der folgende Satz gilt: Wenn ein Formelschema bei mindestens einer Wertkombination für die in ihm vorkommenden Formelvariablen den Wert v und bei mindestens einer Wertkombination für die in ihm vorkommenden Formelvariablen den Wert f annimmt, so sind alle Formeln, die die logische Form dieses Formelschemas haben, logisch indeterminierte Formeln.
4. Prüfen Sie, ob die folgenden Formelklassen gemeinsam erfüllbar oder widersprüchlich sind:
   a) $r \equiv p \wedge q$, p, p_1, $p_1 \supset (q \equiv p \wedge {\sim}r)$
   b) $p \supset q$, $q \equiv r$, $q \supset {\sim}p$, $p \supset {\sim}r$
   c) $p \mid q \supset q \dagger r$, $p \wedge r$
   d) $p \wedge q$!
5. Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagenklassen gemeinsam erfüllbar oder widersprüchlich sind:
   a) Meier verläßt das Haus nicht ohne Müller. Wenn Lehmann das Haus verläßt, so verläßt es Müller nicht, falls Meier es verläßt. Lehmann verläßt das Haus.
   b) Müller verläßt das Haus nicht ohne Meier. Wenn Lehmann oder Müller das Haus verlassen, so verläßt es Meier nicht. Müller verläßt das Haus.
   c) Meier ist ein bedeutender Wissenschaftler. Wenn Meier ein bedeutender Wissenschaftler ist, so hat er beachtenswerte Publikationen oder hält gute Vorlesungen. Wenn Meier keine Zeit zur wissenschaftlichen Arbeit hat, so kann er keine beachtenswerten Publikationen schreiben und sich nicht ordentlich auf die Vorlesungen vorbereiten. Wenn Meier sich nicht ordentlich auf die Vorlesungen vorbereitet, so kommen sie bei den Studenten nicht an und können nicht als gut eingeschätzt werden. Meier hat keine Zeit zur wissenschaftlichen Arbeit.

4.8 Semantische Äquivalenz von Formeln

Angenommen, $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 1)$ sind alle in einer Formel A vorkommenden und $b_1, \ldots, b_m$ $(m \geq 1)$ sind alle in einer Formel B vorkommenden Variablen. Wir definieren die semantische Äquivalenz zweier Formeln wie folgt.

D1. Die Formeln A und B sind **semantisch äquivalent** (oder **wertverlaufsgleich**) genau dann, wenn sie für jede beliebige Wertkombination der Variablen $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ den gleichen Wahrheitswert haben.

Wenn zwei Formeln A und B semantisch äquivalent sind, so schreiben wir das symbolisch in der Form $A \approx B$. Mit dieser Schreibweise führen wir keinen neuen Operator ein. Der Ausdruck $A \approx B$ ist vielmehr nur eine Abkürzung für den Satz „Die Formeln A und B sind semantisch äquivalent“ (oder etwas anders formuliert „Die Formel A ist mit der Formel B semantisch äquivalent“). Wir führen einige Beispiele für semantisch äquivalente Formeln an: $p \vee q \approx q \vee p$, ${\sim}p \vee q \approx p \supset q$, $(p \vee q) \wedge r \approx (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, ${\sim}p \vee p \approx {\sim}q \vee q$, ${\sim}p \vee p \vee q \approx {\sim}q \vee q \vee r$, ${\sim}p \wedge p \approx {\sim}({\sim}p \vee p)$.

Ob zwei gegebene Formeln A und B semantisch äquivalent sind oder nicht, läßt sich mit Hilfe der Definitionen der in ihnen vorkommenden Operatoren und durch Nachprüfung aller möglichen Wertkombinationen für die in ihnen vorkommenden Variablen feststellen. Es sei darauf hingewiesen, daß nicht nur Formeln mit gleichen Variablen und Operatoren semantisch äquivalent sein können, sondern auch Formeln mit verschiedenen Variablen und Operatoren (vgl. die letzten drei Beispiele). Die Beziehung der semantischen Äquivalenz zwischen zwei Formeln muß von der Bisubjunktion $\equiv$, die in der Literatur etwas unpassend auch *syntaktische Äquivalenz* genannt wird, unterschieden werden. Die Bisubjunktion ist ein zweistelliger formelbildender Operator, der aus zwei Formeln A und B eine zusammengesetzte Formel $(A \equiv B)$ bildet und dessen Bedeutung durch seine semantische Definition (Abschnitt 3, Tab. 5) festgelegt ist. Hingegen ist der Satz „Die Formel A ist mit der Formel B semantisch äquivalent“ durch den Ausdruck $A \approx B$ abgekürzt, eine logisch einfache Aussage mit den beiden Subjekten „die Formel A“ und „die Formel B“ sowie dem zweistelligen Prädikat „das erste ist mit dem zweiten semantisch äquivalent“, deren Bedeutung in der Definition *D1* festgelegt ist. In der Aussage $A \approx B$ kommen die beiden Formeln A und B gar nicht vor, sondern nur die beiden Termini „die Formel A“ und „die Formel B“. Trotz dieses Unterschieds zwischen der semantischen Äquivalenz und der Bisubjunktion besteht zwischen ihnen aber ein enger Zusammenhang, denn es gilt das folgende Theorem:

T1. $A \approx B$ genau dann, wenn $A \equiv B$ eine Tautologie ist.

Auf Grund der Definition der Bisubjunktion und der semantischen Äquivalenz ist *T1* offensichtlich. Im weiteren verwenden wir anstelle des Terminus „semantische Äquivalenz“ einfach den Terminus „Äquivalenz“. Für die Äquivalenz gelten folgende Theoreme:

T2. Reflexivität der Äquivalenz. $A \approx A$.

T3. Symmetrie der Äquivalenz. Wenn $A \approx B$, so $B \approx A$.

T4. Transivität der Äquivalenz. Wenn $A \approx B$ und $B \approx C$, so $A \approx C$.

Allgemein nennt man eine zweistellige Relation, die die in *T2-T4* ausgedrückten Eigenschaften der Reflexivität, der Symmetrie und der Transivität besitzt, eine *Äquivalenzrelation* oder eine *Relation vom Typ der Gleichheit.* Solche Relationen sind etwa „... ist identisch mit ...“, „... ist wertgleich mit ...“, „... ist gleichgroß wie ...“. Wir behandeln hier solche Äquivalenzrelationen nicht, weisen aber darauf hin, daß sie im Abstraktionsprozeß eine wichtige Rolle spielen (vgl. Nachwort zu Petrov 1971).

Wir führen einige wichtige Äquivalenzen und ihre Bezeichnungen an. Diese Bezeichnungen werden im weiteren auch für andere Regeln verwendet. Dies kann jedoch zu keinen Verwechslungen führen, wenn ihr allgemeiner Typ angegeben wird. Im vorliegenden Fall muß zu jeder angeführten Bezeichnung einer Regel hinzugefügt werden „für die Äquivalenz“ (z. B. „Regel der doppelten Negation für die Äquivalenz“).

T5. $\sim\sim A \approx A$ - Regel der doppelten Negation

T6. $A \wedge A \approx A$ - Wiederholungsregeln
$A \vee A \approx A$

T7. $A \wedge B \approx B \wedge A$ - Kommutationsregeln
$A \vee B \approx B \vee A$
$A \supset (B \supset C) \approx B \supset (A \supset C)$

T8. $(A \wedge B) \wedge C \approx A \wedge (B \wedge C)$ - Assoziationsregeln
$(A \vee B) \vee C \approx A \vee (B \vee C)$

T9. $(A \vee B) \wedge C \approx (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ - Distributivitätsregeln
$(A \wedge B) \vee C \approx (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

T10. $A \supset B \approx \sim B \supset \sim A$ - Kontrapositionsregel

T11. $A \vee (A \wedge B) \approx A$ - Verschmelzungsregeln
$A \wedge (A \vee B) \approx A$

T12. $\sim(A \wedge B) \approx \sim A \vee \sim B$ - De Morgansche Regeln
$\sim(A \vee B) \approx \sim A \wedge \sim B$

T13. $A \supset B \approx \sim A \vee B$ - Subjunktionsersetzungsregeln
$A \supset B \approx \sim(A \wedge \sim B)$
$\sim(A \supset B) \approx A \wedge \sim B$

T14. $A \mid B \approx \sim A \vee \sim B$ - Ersetzungsregeln für die Negatadjunktion

T15. $\sim(A \mid B) \approx A \wedge B$

T16. $A \dagger B \approx \sim A \wedge \sim B$ - Ersetzungsregeln für die Negatkonjunktion

T17. $\sim(A \dagger B) \approx A \vee B$

T18. $A \equiv B \approx (\sim A \vee B) \wedge (A \vee \sim B)$ - Ersetzungsregeln für die Bisubjunktion

T19. $\sim(A \equiv B) \approx (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$

T20. $A \vee (\sim B \wedge B \wedge C) \approx A$ - Einführungs- und Beseitigungsregeln für eine

T21. $A \wedge (\sim B \vee B \vee C) \approx A$ Kontradiktion bzw. eine Tautologie

T22. $A \wedge B \supset C \approx A \supset (B \supset C)$ - Exportations- und Importationsregel

Eine Äquivalenz von Formeln kann für eine bestimmte Art von Definitionen logischer Operatoren benutzt werden, die wir *quasisyntaktische Definitionen* nennen. Angenommen, wir haben die semantischen Definitionen der Operatoren der Negation und der Adjunktion. Der Operator der Negatadjunktion läßt sich jetzt unter Verwendung des Begriffs der Äquivalenz auf folgende Weise einführen: $\mid$ sei ein logischer Operator derart, daß $(A \mid B)$ eine Formel ist, wenn A und B Formeln sind, und daß gilt: $(A \mid B) \approx (\sim A \vee \sim B)$.

Wenn man diese Definition akzeptiert, so erhält man die semantischen Regeln für den Operator $\mid$ als Folgerung:

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$\sim A \vee \sim B$
v	v	f	f	f
v	f	f	v	v
f	v	v	f	v
f	f	v	v	v

Die letzte Spalte dieser Tabelle ist die Tabelle für $\mid$ (vergleichen Sie sie mit Tab. 6 aus Abschnitt 3).

Wir nennen solche Definitionen *quasisyntaktische Definitionen*, weil man ihnen eine rein syntaktische Form geben kann (z. B. $(A \mid B) \equiv_{Def} (\sim A \vee \sim B)$, wobei das Symbol $\equiv_{Def}$ die Definitionsgleichheit ausdrückt), obwohl natürlich bei dem Aufbau solcher Definitionen immer die angegebenen semantischen Überlegungen eine Rolle spielen. Analog lassen sich die Operatoren $\wedge$, $\supset$ und $\equiv$ durch die Operatoren $\sim$ und $\vee$ definieren: $\wedge$, $\supset$ und $\equiv$ seien solche Operatoren, daß $(A \wedge B)$, $(A \supset B)$ und $(A \equiv B)$ Formeln sind, wenn A und B Formeln sind, und daß dabei gilt:

$$(A \wedge B) \approx \sim(\sim A \vee \sim B),$$
$$(A \supset B) \approx (\sim A \vee B),$$
$$(A \equiv B) \approx (\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A) \ .$$

Übungen:

1. Beweisen Sie *T1*!
2. Beweisen Sie *T2-T4*!
3. Geben Sie jeweils umgangssprachliche Beispiele für zweistellige Relationen an, die nicht reflexiv, nicht symmetrisch oder nicht transitiv sind! Geben Sie weitere umgangssprachliche Beispiele für Äquivalenzrelationen an!
4. Beweisen Sie *T5-T22*!
5. Prüfen Sie, welche der folgenden Äquivalenzen gelten:
   $A \mid A \approx A,$
   $A \mid A \approx \sim A,$
   $A \dagger A \approx A,$
   $A \dagger A \approx \sim A,$
   $A \mid A \approx A \dagger A$
6. Weisen Sie nach, daß die am Ende des Abschnitts 8 angegebenen quasisyntaktischen Definitionen korrekt sind!
7. Gegeben sei die semantische Definition der Negatadjunktion $\mid$. Definieren Sie mit Hilfe des Operators $\mid$ die Operatoren der Negation $\sim$ und der Konjunktion $\wedge$!
8. Welche der Formeln

   a) $p \supset \sim q,$
   b) $\sim(p \supset q),$
   c) $p \wedge \sim q$ und
   d) $\sim(p \wedge q)$ sind miteinander äquivalent?

4.9 Grundoperatoren und abgeleitete Operatoren

D1. Operatoren (und entsprechend aussagenlogische Funktionen), die mit Hilfe semantischer Definitionen (semantischer Tabellen, Matrizen) eingeführt werden, nennen wir **Grundoperatoren** (und entsprechend **Grundfunktionen**). Operatoren (Funktionen), die mit Hilfe von quasisyntaktischen Definitionen eingeführt werden, nennen wir **abgeleitete Operatoren** (**abgeleitete Funktionen**).

Der Typ einer Aussagenalgebra hängt davon ab, welche Grundoperatoren gewählt werden. Wir betrachten im weiteren folgende Aussagenalgebren:

1) das System *NK* der Aussagenalgebra mit den Grundoperatoren $\sim$ und $\wedge$;
2) das System *NA* der Aussagenalgebra mit den Operatoren $\sim$ und $\vee$;
3) das System *NS* der Aussagenalgebra mit den Operatoren $\sim$ und $\supset$;

4) das System *Na* der Aussagenalgebra mit dem Operator $|$;
5) das System *Nk* der Aussagenalgebra mit dem Operator †.

Angenommen, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n > 1)$ seien Grundoperatoren, und A sei eine Formel, die nur aus Variablen und dem Operator α_i $(i = 1, \ldots, n)$ aufgebaut ist.

D2. Einen Operator α_i nennen wir **funktional unabhängig** von den übrigen Grundoperatoren der Menge $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ genau dann, wenn es unmöglich ist, eine Formel B derart aufzubauen, daß $A \approx B$ und in B die gleichen Variablen vorkommen, wie in A, während der Operator α_i in B nicht vorkommt. Mit anderen Worten, α_i ist funktional unabhängig von den übrigen Operatoren aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ genau dann, wenn er sich nicht quasisyntaktisch durch sie definieren läßt.

D3. Einen Komplex von Grundoperatoren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n > 1)$ nennen wir **unabhängig** genau dann, wenn jeder der Operatoren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von den übrigen funktional unabhängig ist.

Betrachten wir beispielsweise den Komplex von Grundoperatoren $\sim$, $\wedge$ und $\vee$ (definiert durch die Tabellen 1, 2 und 3 aus Abschnitt 3): Es läßt sich leicht zeigen, daß dieses System von Grundoperatoren nicht unabhängig ist, denn $\wedge$ läßt sich durch $\sim$ und $\vee$ definieren, da $A \wedge B \approx$ $\approx {\sim}({\sim}A \vee {\sim}B)$ gilt, und der Operator $\vee$ läßt sich durch $\sim$ und $\wedge$ definieren, da $A \vee B \approx$ $\approx {\sim}({\sim}A \wedge {\sim}B)$.

MT1. Die Systeme *NK*, *NA*, *NS*, *Na* und *Nk* sind unabhänig.

Wir führen den Beweis nicht vollständig an. Für die Systeme *Na* und *Nk* ist *MT1* offensichtlich, da diese Systeme nur einen Grundoperator besitzen. Wir geben den Beweis für das System *NK* an, für die übrigen Systeme läßt er sich analog führen. Für das System *NK* haben wir zu zeigen, daß sich die Konjunktion nicht mit Hilfe der Negation und die Negation nicht mit Hilfe der Konjunktion definieren läßt. Aus folgenden Überlegungen wird deutlich, daß sich die Konjunktion nicht mit Hilfe der Negation definieren läßt. Aus Variablen und der Negation allein lassen sich nur Formeln der Form A, ${\sim}A$, ${\sim\sim}A, \ldots, \sim \ldots \sim A$ aufbauen, wo A eine Variable ist. Diese Formeln sind aber alle entweder mit A oder mit $\sim A$ äquivalent, d. h., es gilt $A \approx {\sim\sim}A$, $A \approx {\sim\sim\sim\sim}A, \ldots$ (alle Formeln dieser Form mit einer geraden Anzahl von $\sim$ sind äquivalent) und ${\sim}A \approx {\sim\sim\sim}A$, ${\sim}A \approx {\sim\sim\sim\sim\sim}A$ (alle Formeln mit einer ungeraden Anzahl von $\sim$ sind äquivalent). Mit Hilfe der Negation lassen sich also nur solche zweistelligen Funktionen $F(A, B)$ definieren, die entweder mit A, ${\sim}A$, B oder ${\sim}B$ äquivalent sind, das sind die folgenden vier:

A	B				
v	v	v	f	v	f
v	f	v	f	f	v
f	v	f	v	v	f
f	f	f	v	f	v

Da keine dieser Funktionen mit der Konjunktion äquivalent ist, läßt sich die Konjunktion nicht mit Hilfe der Negation definieren. Die Negation läßt sich aber auch nicht mit Hilfe der Konjunktion definieren, da $A \wedge A \approx A$, $A \wedge \ldots \wedge A \approx A$ für eine beliebige Zahl von Wiederholungen von A gilt.

Im System *NK* lassen sich $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $|$ und † als abgeleitete Operatoren einführen, da folgende Äquivalenzen gelten:

$A \vee B \approx {\sim}({\sim}A \wedge {\sim}B)$,
$A \supset B \approx {\sim}(A \wedge {\sim}B)$,
$A \equiv B \approx {\sim}(A \wedge {\sim}B) \wedge {\sim}(B \wedge {\sim}A)$,

$A \mid B \approx \sim(A \wedge B)$,
$A \dagger B \approx \sim A \wedge \sim B$.

Übungen:

1. Definieren Sie im System *NA* die Operatoren $\wedge$, $\supset$, $\equiv$, $\mid$ und $\dagger$!
2. Definieren Sie im System *NS* die Operatoren $\vee$, $\wedge$, $\equiv$, $\mid$ und $\dagger$!
3. Definieren Sie im System *Na* die Operatoren $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$ und $\dagger$!
4. Definieren Sie im System *Nk* die Operatoren $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$ und $\mid$!

4.10 Funktionale Vollständigkeit

In der folgenden Tabelle geben wir die vier möglichen einstelligen aussagenlogischen Funktionen an:

A	$F_1(A)$	$F_2(A)$	$F_3(A)$	$F_4(A)$
v	v	v	f	f
f	v	f	v	f

(Tab. 1)

Wir haben bisher von den einstelligen Funktionen nur die Negation (F_3) kennengelernt, und sie ist auch die einzige einstellige Funktion, der in der Umgangssprache ein einfacher Operator („nicht“) entspricht. Es sind offenbar 16 aussagenlogische Funktionen von zwei Argumenten möglich. In der folgenden Tabelle geben wir diese 16 zweistelligen aussagenlogischen Funktionen an:

A	B	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
v	v	v	v	v	v	f	v	v	v
v	f	v	v	v	f	v	v	f	f
f	v	v	v	f	v	v	f	f	v
f	f	v	f	v	v	v	f	v	f

A	B	F_{16}	F_{15}	F_{14}	F_{13}	F_{12}	F_{11}	F_{10}	F_9
v	v	f	f	f	f	v	f	f	f
v	f	f	f	f	v	f	f	v	v
f	v	f	f	v	f	f	v	v	f
f	f	f	v	f	f	f	v	f	v

(Tab. 2)

Wir haben bisher nur F_2, F_4, F_5, F_7, F_{12} und F_{15} kennengelernt, für die wir entsprechend die Operatoren $\vee$, $\supset$, $\mid$, $\equiv$, $\wedge$ und $\dagger$ verwenden. Es ist offensichtlich, daß man also 4 einstellige und 16 zweistellige Operatoren einführen könnte. Es gibt nicht nur ein- und zweistellige Wahrheitsfunktionen, sondern auch Funktionen von 3, 4, allgemein von n Argumenten. Als Beispiel geben wir vier dreistellige Wahrheitsfunktionen an:

A	B	C	$F_1(A,B,C)$	$F_2(A,B,C)$	$F_3(A,B,C)$	$F_4(A,B,C)$
v	v	v	v	v	f	v
v	v	f	f	v	f	v
v	f	v	f	v	f	v
v	f	f	f	v	v	f
f	v	v	f	v	f	f
f	v	f	f	v	v	f
f	f	v	f	v	v	v
f	f	f	f	f	f	f

(Tab. 3)

In Tabelle 3 ist $F_1(A,B,C)$ eine dreistellige Konjunktion („A und B und C“), die genau dann den Wert v annimmt, wenn alle ihre Argumente den Wert v haben, $F_2(A,B,C)$ ist eine dreistellige Adjunktion („A oder B oder C“), die genau dann den Wert f annimmt, wenn all ihre Argumente den Wert f haben, $F_3(A,B,C)$ ist eine dreistellige Disjunktion („entweder A oder B oder C“), die genau dann den Wert v annimmt, wenn genau eines ihrer Argumente den Wert v hat, und schließlich kann man $F_4(A,B,C)$ als bedingte Adjunktion ansehen, die umgangssprachlich als „A oder C in Abhängigkeit davon, ob B oder nicht B“ zu lesen ist. Allgemein ist die Zahl der möglichen Funktionen (und entsprechend der Operatoren) für m Argumente ($m \geq 1$) gleich 2^{2^m}. Eine wichtige Aufgabe der Aussagenalgebra besteht darin, die Untersuchung der Menge aller möglichen aussagenlogischen Funktionen auf die Untersuchung einer gewissen Zahl von Grundfunktionen zurückzuführen, durch die sich alle übrigen definieren lassen. Das ist das Problem der funktionalen Vollständigkeit einer Aussagenalgebra. Dieses Problem ist befriedigend gelöst.

D1. Definition der funktionalen Vollständigkeit: Ein System von aussagenlogischen Grundfunktionen (und entsprechend von Operatoren) nennen wir **funktional vollständig** genau dann, wenn sich durch sie jede beliebige aussagenlogische Funktion definieren läßt. Entsprechend nennen wir eine Aussagenalgebra mit einem funktional vollständigen System von Grundfunktionen **funktional vollständig.**

MT1. Das System *NK* (d. h. das System mit den Grundoperatoren $\sim$ und $\wedge$) ist funktional vollständig.

Der Beweis von *MT1* wird durch Induktion über die Zahl der Argumente geführt.

Anfangsschritt: Alle einstelligen Funktionen lassen sich durch $\sim$ und $\wedge$ definieren. Alle einstelligen Funktionen sind in Tabelle 1 zu Beginn des Abschnitts angegeben. Es läßt sich leicht feststellen, daß

$$F_1(A) \approx {\sim}({\sim}A \wedge A),$$
$$F_2(A) \approx A,$$
$$F_3(A) \approx {\sim}A,$$
$$F_4(A) \approx {\sim}A \wedge A.$$

Wir führen weiter den Operator $\vee$ ein:

$$A \vee B \approx {\sim}({\sim}A \wedge {\sim}B).$$

Dies erleichtert die folgende Darstellung.

Induktionsannahme: Eine beliebige Funktion von n Argumenten ist durch $\sim$ und $\wedge$ definierbar.

Induktionsschritt: Wir betrachten eine beliebige Funktion von $(n+1)$ Argumenten, für die die Wahrheitswerte für alle Wertkombinationen der Argumente gegeben sind. Wir bezeichnen sie mit $F(A_1, \ldots, A_{n+1})$. Die Tabelle für diese Funktion schreiben wir in folgender Form:

$A_1, \ldots, A_n$	A_{n+1}	$F(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$
	v	α_1
X	v	α_2
	.	.
	.	.
	v	α_{2^n}
	f	β_1
X	f	β_2
	.	.
	.	.
	f	β_{2^n}

(Tab. 4)

Dabei sind in den beiden Rechtecken X jeweils alle möglichen Wertkombinationen der Argumente $A_1, \ldots, A_n$ geschrieben (in jedem Rechteck ist ihre Zahl 2^n, so daß links vom vertikalen Strich alle Wertkombinationen für die Argumente $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ stehen, ihre Zahl ist offenbar 2^{n+1}), und die Symbole $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{2^n}$ sind die Werte von $F(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ für die entsprechenden Wertkombinationen der Argumente.

Da wir laut Induktionsannahme eine beliebige Funktion von n Argumenten mit Hilfe von $\sim$ und $\wedge$ definieren können, so läßt sich auch eine Funktion $F_1(A_1, \ldots, A_n)$ definieren, die die Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n}$ annimmt, und eine Funktion $F_2(A_1, \ldots, A_n)$, die die Werte $\beta_1, \ldots, \beta_{2^n}$ annimmt. Jetzt läßt sich die Funktion $F(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ definieren, da $F(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}) \approx$ $\approx F_1(A_1, \ldots, A_n) \wedge A_{n+1} \vee F_2(A_1, \ldots, A_n) \wedge {\sim}A_{n+1}$. Diese Äquivalenz ergibt sich auf folgende Weise: Wenn $A_{n+1} = v$, so gilt

(1) $F(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}) = F_1(A_1, \ldots, A_n)$, wie aus Tabelle 4 ersichtlich ist;
(2) $F_1(A_1, \ldots, A_n) = F_1(A_1, \ldots, A_n) \wedge A_{n+1}$, da der Wert einer Formel sich nicht verändert, wenn man konjunktiv eine Formel mit dem Wert v hinzufügt;
(3) ${\sim}A_{n+1} = f$;
(4) $F_2(A_1, \ldots, A_n) \wedge {\sim}A_{n+1} = f$ auf Grund von (3);
(5) $F_1(A_1, \ldots, A_n) \wedge A_{n+1} = F_1(A_1, \ldots, A_n) \wedge A_{n+1} \vee F_2(A_1, \ldots, A_n) \wedge {\sim}A_{n+1}$ auf Grund von 4, da der Wert einer Formel sich nicht verändert, wenn man adjunktiv eine Formel mit dem Wert f hinzufügt, und schließlich auf Grund von 1, 2 und 5;
(6) $F(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}) = F_1(A_1, \ldots, A_n) \wedge A_{n+1} \vee F_2(A_1, \ldots, A_n) \wedge {\sim}A_{n+1}$.

Wenn hingegen $A_{n+1} = f$, so gilt

(1) $F(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}) = F_2(A_1, \ldots, A_n)$.
(2) ${\sim}A_{n+1} = v$.
(3) $F_2(A_1, \ldots, A_n) = F_2(A_1, \ldots, A_n) \wedge {\sim}A_{n+1}$,
(4) $F_1(A_1, \ldots, A_n) \wedge A_{n+1} = f$,
(5) $F_2(A_1, \ldots, A_n) \wedge {\sim}A_{n+1} = F_1(A_1, \ldots, A_n) \wedge A_{n+1} \vee F_2(A_1, \ldots, A_n) \wedge {\sim}A_{n+1}$ und schließlich
(6) $F(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}) = F_1(A_1, \ldots, A_n) \wedge A_{n+1} \vee F_2(A_1, \ldots, A_n) \wedge {\sim}A_{n+1}$.

Da die Fälle $A_{n+1} = v$ und $A_{n+1} = f$ alle Wertkombinationen für $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ erschöpfen, ist unsere Behauptung bewiesen.

Um festzustellen, ob eine Aussagenalgebra funktional vollständig ist oder nicht, ist es ausreichend zu ermitteln, ob sich durch ihre Grundfunktionen (Grundoperatoren) die Funktionen (Operatoren) $\sim$ und $\wedge$ definieren lassen oder nicht.

MT2. Das System *NA* ist funktional vollständig.
MT3. Das System *NS* ist funktional vollständig.
MT4. Das System *Na* ist funktional vollständig.
MT5. Das System *Nk* ist funktional vollständig.

Die Beweise von *MT2-MT5* ergeben sich aus den Ergebnissen der Übungen 1 bis 4 des Abschnitts 9.

MT6. Die Operatoren $|$ und $\dagger$ sind die einzigen zweistelligen Operatoren, die jeweils alleine einen funktional vollständigen Komplex von Grundoperatoren bilden.

Beweis: Angenommen, α sei ein zweistelliger Operator, verschieden von $|$ und $\dagger$, mit dessen Hilfe alle anderen Operatoren definiert werden können. Würde bei $A = v$ und $B = v$ gelten $\alpha(A, B) = v$, so würde eine beliebige Formel, die nur aus Aussagenvariablen und α aufgebaut ist, immer den Wert v annehmen, wenn alle in ihr vorkommenden Aussagenvariablen den Wert v haben. Folglich könnte die Negation nicht mit Hilfe von α definiert werden. Analog gilt, würde bei $A = f$ und $B = f$ gelten $\alpha(A, B) = f$, so würde eine beliebige Formel, die nur aus Aussagenvariablen und α aufgebaut ist, immer den Wert f annehmen, wenn alle in ihr vorkommenden Variablen den Wert f haben. Folglich könnte auch hier die Negation $\sim$ nicht mit Hilfe von α definiert werden. Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß die Wahrheitstabelle für α folgende Form haben müßte:

A	B	$\alpha(A, B)$
v	v	f
v	f	
f	v	
f	f	v

Würden in der zweiten und dritten Zeile dieser Tabelle die Werte v, v bzw. f, f für $\alpha(A, B)$ stehen, so hätten wir es mit den Operatoren $|$ bzw. $\dagger$ zu tun. Stehen in diesen Zeilen hingegen die einzig noch möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten v, f bzw. f, v, so würden entsprechend die beiden Äquivalenzen $\alpha(A, B) \approx {\sim}B$ bzw. $\alpha(A, B) \approx {\sim}A$ gelten, d. h.; α wäre in beiden Fällen mit Hilfe der Negation allein definierbar. Wir wissen aber bereits, daß die Negation allein keinen funktional vollständigen Komplex von Grundoperatoren bildet. Damit ist *MT6* bewiesen.

Übungen:

1. Definieren Sie F_1-F_{11}, F_{13}-F_{16} aus Tab. 2 im System *NK*!
2. Suchen Sie umgangssprachliche Entsprechungen für F_1, F_3, F_6, F_8-F_{11}, F_{13}, F_{14} und F_{16} aus Tab. 2!
3. Benutzen Sie den Grundgedanken des Beweises der funktionalen Vollständigkeit des Systems *NK*, um die folgenden dreistelligen Operatoren F_1, F_2, F_3 und F_4 mit Hilfe von ein- und zweistelligen Operatoren zu definieren:

A	B	C	$F_1(A,B,C)$	$F_2(A,B,C)$	$F_3(A,B,C)$	$F_4(A,B,C)$
v	v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	v	f	f
v	f	v	f	v	f	f
v	f	f	v	v	f	v
f	v	v	f	f	f	f
f	v	f	v	f	v	f
f	f	v	v	f	v	f
f	f	f	v	f	f	v

4. Definieren Sie F_1, F_2, F_3 und F_4 aus Tab. 3 mit Hilfe von ein- und zweistelligen Operatoren!

4.11 Ersetzbarkeitstheorem

MT1. Wenn $A \approx B$, so ${\sim}A \approx {\sim}B$.

Beweis: Wir unterscheiden die beiden Fälle $A = v$ und $A = f$. Wenn $A = v$, so $B = v$ auf Grund der Bedingung von *MT1*, dann gilt ${\sim}A = f$ und ${\sim}B = f$. Wenn $A = f$, so $B = f$ auf Grund der Bedingung von *MT1*, dann gilt ${\sim}A = v$ und ${\sim}B = v$.

MT2. Wenn $A \approx B$ und $C \approx D$, so

$A \wedge C \approx B \wedge D$,
$A \vee C \approx B \vee D$,
$A \supset C \approx B \supset D$,
$A \equiv C \approx B \equiv D$,
$A \mid C \approx B \mid D$,
$A \dagger C \approx B \dagger D$.

Der Beweis wird dadurch geführt, daß man die Gültigkeit von *MT2* für alle möglichen Wertkombinationen der Formelvariablen A, B, C und D nachweist.

Mit dem Symbol $C[A/B]$ bezeichnen wir eine Formel, die man aus der Formel C durch Ersetzen von null oder mehr Vorkommen der Teilformel A in C durch die Formel B erhält. Dabei muß nicht unbedingt an allen Stellen ersetzt werden, wo A in C vorkommt. Wenn die Zahl der Vorkommen von A, die durch B ersetzt werden, gleich Null ist (dies kann insbesondere der Fall sein, wenn A überhaupt nicht in C vorkommt), so ist $C[A/B]$ die Formel C. Es ist offensichtlich, daß das Symbol $C[A/B]$ nicht eindeutig eine einzige Formel bezeichnet, da ja A an null oder mehr Stellen seines Vorkommens in C durch B ersetzt werden kann. Das Symbol $C[A/B]$ bezeichnet also alle Formeln einer bestimmten Formelklasse. Wenn wir etwa als C die Formel ${\sim}p \supset (q \supset {\sim}p)$, als A die Formel ${\sim}p$ und als B die Formel ${\sim\sim}r$ wählen, so wird mit dem Symbol $C[A/B]$ jede der folgenden Formeln bezeichnet:

1) ${\sim}p \supset (q \supset {\sim}p)$
2) ${\sim\sim}r \supset (q \supset {\sim}p)$
3) ${\sim}p \supset (q \supset {\sim\sim}r)$
4) ${\sim\sim}r \supset (q \supset {\sim\sim}r)$.

Weiter ist offensichtlich, daß ${\sim}(C[A/B])$ die Formel ${\sim}C[A/B]$ ist, $(C \vee D)[A/B]$ die Formel $C[A/B] \vee D[A/B]$ ist usw. (für beliebige Operatoren).

MT3. Ersetzbarkeitstheorem für Äquivalenzen. Wenn $A \approx B$, so $C \approx C[A/B]$.

Der Beweis von *MT3* wird induktiv über die Anzahl von logischen Operatoren in C geführt. Wir beschränken uns im Beweis von *MT3* auf den Fall, daß A an genau einer Stelle seines Vorkommens in C durch B ersetzt wird, ohne dadurch die Allgemeinheit von *MT3* einzuschränken, da für den Fall, daß an null Stellen ersetzt wird, *MT3* offensichtlich gilt, weil dann $C[A/B]$ die Formel C ist, und wenn an mehr als einer Stelle ersetzt wird, so erhält man dasselbe Ergebnis durch mehrmalige Anwendung des eingeschränkten Metatheorems.Weiterhin ist offensichtlich, daß das Ersetzbarkeitstheorem für den Fall gilt, wenn C die Formel A ist und an genau einer Stelle ersetzt wird. Dieser Fall wird im weiteren Beweis nicht mehr berücksichtigt.

Anfangsschritt: C enthält null Operatoren, ist also eine Aussagenvariable a. Wenn nun an genau einer Stelle ersetzt wird, so ist A die Variable a, C ist die gleiche Variable a und $C[A/B]$ ist die Formel B. *MT3* gilt in diesem Falle auf Grund der Voraussetzung des Metatheorems.

Induktionsannahme: *MT3* gilt für alle Formeln C, die weniger als n Operatoren enthalten $(n \geq 1)$.

Induktionsschritt: Es gilt zu zeigen, daß *MT3* für eine beliebige Formel C mit n Operatoren gilt.

C kann dann nach der Formeldefinition nur eine der folgenden Formen haben:

1) $\sim D$, 2) $D \wedge E$, 3) $D \vee E$, 4) $D \supset E$, 5) $D \equiv E$, 6) $D \mid E$, 7) $D \dagger E$.

In allen sieben Fällen enthalten die Formeln D und E weniger als n Operatoren, und nach der Induktionsvoraussetzung gilt unter der Bedingung, daß $A \approx B$:

$D \approx D[A/B]$,
$E \approx E[A/B]$.

Im ersten Fall, wo C die Form $\sim D$ hat, erhalten wir die Behauptung von *MT3* aus der Induktionsvoraussetzung und *MT1*

1) $\sim D \approx \sim D[A/B]$.

In den Fällen 2-7 kann die eine Ersetzung von A durch B entweder in der Teilformel D oder in der Teilformel E vorgenommen werden, falls nicht die gesamte Formel ersetzt wird. Auf Grund der Reflexivität der Äquivalenz gilt $D \approx D$ und $E \approx E$. Aus diesen Äquivalenzen und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir mit Hilfe von *MT2* in den Fällen 2-7 die Behauptung des Metatheorems *MT3*:

2) $D \wedge E \approx (D \wedge E)[A/B]$
3) $D \vee E \approx (D \vee E)[A/B]$
4) $D \supset E \approx (D \supset E)[A/B]$
5) $D \equiv E \approx (D \equiv E)[A/B]$
6) $D \mid E \approx (D \mid E)[A/B]$
7) $D \dagger E \approx (D \dagger E)[A/B]$.

Wir erinnern daran, daß $D \wedge E[A/B]$ und $D[A/B] \wedge E$ dieselben Formeln sind wie $(D \wedge E)[A/B]$ (gleiches gilt bei Verwendung der anderen Operatoren). Aus *MT3* ergibt sich unmittelbar:

MT4. Wenn $A \approx B$ und C eine Tautologie ist, so ist $C[A/B]$ eine Tautologie.
MT5. Wenn $A \approx B$ und C eine Kontradiktion ist, so ist $C[A/B]$ eine Kontradiktion.

Übungen:

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen einer Einsetzung und einer Ersetzung sowie zwischen der Einsetzungsregel und dem Ersetzbarkeitstheorem!
2. Welche Formeln bezeichnet das Symbol $C[A/B]$, wenn C die Formel $p \supset (q \supset r) \supset$ $\supset (p \supset q \supset (p \supset r))$, A die Formel p und B die Formel $p \wedge q$ ist?

4.12 Definition einer adjunktiven und konjunktiven Normalform

Unter Normalformen versteht man Formeln einer ganz bestimmten logischen Form. Wir betrachten hier nur Normalformen mit den Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\sim$.

D1. Elementare Formel: Wir nennen eine Formel genau dann **elementar**, wenn sie eine Variable oder eine einmal negierte Variable ist.

Beispiele für elementare Formeln: p, q, r, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$.

D2. Elementare Konjunktion:

1) Eine elementare Formel ist eine elementare Konjunktion;
2) wenn A eine elementare Konjunktion und B eine elementare Formel ist, so ist $A \wedge B$ eine elementare Konjunktion;
3) nur die in den Punkten 1 und 2 angegebenen Formeln sind elementare Konjunktionen.

Beispiele für elementare Konjunktionen: p, $\sim p$, $p \wedge q$, $p \wedge q \wedge r$, $p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim p$.

Wir erinnern daran, daß nach unseren Regeln zur Klammereinsparung die angegebenen Formeln mit dem Operator $\wedge$ entsprechende Abkürzungen der Formeln $(p \wedge q)$, $((p \wedge q) \wedge r)$, $(((p \wedge \sim q) \wedge r) \wedge \sim p)$ sind. Die Formeln $p \wedge (q \wedge r)$ und $(p \wedge q) \wedge (\sim q \wedge r)$ sind hingegen keine elementaren Konjunktionen, da $(q \wedge r)$ und $(\sim q \wedge r)$ keine elementaren Formeln sind (vgl. Punkt 2 der Definition *D2*).

D3. Elementare Adjunktion:

1) Eine elementare Formel ist eine elementare Adjunktion;
2) wenn A eine elementare Adjunktion und B eine elementare Formel ist, so ist $A \vee B$ eine elementare Adjunktion;
3) eine Formel ist nur auf Grund von 1 und 2 eine elementare Adjunktion.

Beispiele elementarer Adjunktionen: p, $\sim p$, $p \vee q$, $p \vee q \vee r$, $p \vee \sim q \vee r \vee \sim p$.

Die hier angegebenen Formeln mit dem Operator $\vee$ sind Abkürzungen für: $(p \vee q)$, $((p \vee q) \vee r)$, $(((p \vee \sim q) \vee r) \vee \sim p)$. Die Formeln $p \vee (q \vee r)$, $(p \vee q) \vee (\sim q \vee r)$ sind keine elementaren Adjunktionen.

MT1. Eine elementare Konjunktion ist genau dann eine Kontradiktion, wenn in ihr mindestens eine unnegierte Variable und die Negation dieser Variablen gemeinsam vorkommen.

MT2. Eine elementare Adjunktion ist genau dann eine Tautologie, wenn in ihr mindestens eine unnegierte Variable und die Negation dieser Variablen gemeinsam vorkommen.

Die Theoreme *MT1* und *MT2* sind auf Grund der Definition von $\sim$, $\wedge$ und $\vee$ offensichtlich.

D4. Adjunktive Normalform:

1) Wenn A eine elementare Konjunktion ist, so befindet sich A in der adjunktiven Normalform;
2) wenn A sich in der adjunktiven Normalform befindet und B eine elementare Konjunktion ist, so befindet sich $A \vee B$ in der adjunktiven Normalform;
3) eine Formel befindet sich nur in den unter Punkt 1 und 2 angegebenen Fällen in der adjunktiven Normalform.

Beispiele für Formeln in der adjunktiven Normalform: p, $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \wedge q \vee \sim p \wedge \sim q \wedge$ $\wedge\, r \vee p_1$.

Wir erinnern daran, daß die letzte Formel eine Abkürzung für die Formel $(((p \wedge q) \vee$ $\vee\, ((\sim p \wedge \sim q) \wedge r) \vee p_1)$ ist. Die Formeln $p \supset q$, $(p \vee q) \wedge r$, $p \vee (q \wedge \sim\sim r)$ befinden sich nicht in der adjunktiven Normalform, da die erste den Operator $\supset$ enthält und die zweite und dritte Formel nicht dem Punkt 2 entsprechen (in der zweiten Formel wird r mit Hilfe des

Operators $\wedge$ und nicht mit Hilfe des Operators $\vee$ hinzugefügt; in der dritten wird die Formel $q \wedge \sim\sim r$ zwar mit Hilfe von $\vee$ hinzugefügt, sie ist aber keine elementare Konjunktion).

D5. Konjunktive Normalform:

1) Wenn A eine elementare Adjunktion ist, so befindet sich A in der konjunktiven Normalform;
2) wenn sich A in der konjunktiven Normalform befindet und B eine elementare Adjunktion ist, so befindet sich $A \wedge B$ in der konjunktiven Normalform;
3) eine Formel befindet sich nur in den unter Punkt 1 und 2 angegebenen Fällen in der konjunktiven Normalform.

Beispiele für Formeln in der konjunktiven Normalform: p, $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $(p \vee q) \wedge \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge p_1$.

Die Formeln $p \supset q$, $(p \wedge q) \vee r$, $p \wedge (q \vee \sim\sim r)$ befinden sich nicht in der konjunktiven Normalform.

MT3. Eine Formel in der konjunktiven Normalform $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ $(n \geq 1)$ ist genau dann eine Tautologie, wenn alle Konjunktionsglieder $A_1, \ldots, A_n$ Tautologien sind.

MT4. Eine Formel in der adjunktiven Normalform $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ $(n \geq 1)$ ist genau dann eine Kontradiktion, wenn alle Adjunktionsglieder $A_1, \ldots, A_n$ Kontradiktionen sind.

Die Theoreme *MT3* und *MT4* sind auf Grund der Definitionen einer Tautologie, einer Kontradiktion und der logischen Operatoren sowie der Theoreme *MT1* und *MT2* offensichtlich.

Übungen:

Welche der folgenden Formeln befinden sich in der konjunktiven oder adjunktiven Normalform:

a) $p \wedge \sim p \vee q$	f) $p \wedge (q \wedge r)$
b) r	g) $p \vee r \wedge \sim p \vee p_1 \wedge p_2$
c) $p \vee r \vee p$	h) $p \vee \sim p \wedge q \vee (r \wedge p)$
d) $p \wedge \sim q \wedge q \vee p \wedge r$	i) $(p \vee r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)$
e) $\sim\sim r \vee \sim r$	j) $p \supset q \vee r$

4.13 Überführen von beliebigen Formeln in ihnen äquivalente adjunktive und konjunktive Normalformen

MT1. Jede beliebige Formel A läßt sich in eine ihr äquivalente Formel B in adjunktiver Normalform überführen.

MT2. Jede beliebige Formel A läßt sich in eine ihr äquivalente Formel B in konjunktiver Normalform überführen.

Wir verzichten auf einen Beweis von *MT1* und *MT2* (vgl. Sinowjew/Wessel 1975). Statt dessen geben wir ein effektives Verfahren an, nach dem man jede Formel in eine ihr äquivalente Formel in der adjunktiven bzw. konjunktiven Normalform überführen kann. Dieses Verfahren stützt sich auf das Ersetzbarkeitstheorem für die Äquivalenz aus Abschnitt 11, auf die Transitivität der Äquivalenz (*T4* aus Abschnitt 8) sowie auf die Theoreme *T5*, *T7-T9* und *T12* bis *T19* aus Abschnitt 8.

Verfahren zur Überführung einer Formel in eine ihr äquivalente Formel in adjunktiver Normalform

Es werden folgende Umformungen mit der Formal A und den Formeln, die man im Ergebnis dieser Umformungen erhält, durchgeführt:

1) Aus einer Formel werden alle von $\sim$, $\wedge$ und $\vee$ verschiedenen Operatoren durch folgende Ersetzungen eliminiert:
   alle Vorkommen der Form $C \mid D$ werden durch $\sim C \vee \sim D$ ersetzt,
   alle Vorkommen der Form $C \dagger D$ werden durch $\sim C \wedge \sim D$ ersetzt,
   alle Vorkommen der Form $C \equiv D$ werden durch $(\sim C \vee D) \wedge (C \vee \sim D)$ ersetzt,
   alle Vorkommen der Form $C \supset D$ werden durch $\sim C \vee D$ ersetzt;
2) alle Vorkommen der Form $\sim(C \wedge D)$ werden durch $\sim C \vee \sim D$ und alle Vorkommen der Form $\sim(C \vee D)$ werden durch $\sim C \wedge \sim D$ ersetzt;
3) alle Vorkommen der Form $(C \vee D) \wedge E$ bzw. $E \wedge (C \vee D)$ werden durch $(C \wedge E) \vee (D \wedge E)$ ersetzt;
4) alle Vorkommen der Form $\sim\sim C$ werden durch C ersetzt;
5) alle Vorkommen der Form $C \wedge (D \wedge E)$ werden durch $C \wedge D \wedge E$ und alle Vorkommen der Form $C \vee (D \vee E)$ werden durch $C \vee D \vee E$ ersetzt.

Im Ergebnis dieser Operationen erhält man eine Formel B, die sich in der adjunktiven Normalform befindet und mit der Formel A äquivalent ist. Die Äquivalenz $A \approx B$ ist aus dem Verfahren, wie man B gewinnt, offensichtlich, denn bei allen angegebenen Ersetzungen werden Formeln durch ihnen äquivalente ersetzt, und nach dem Ersetzbarkeitstheorem für Äquivalenzen erhalten wir nacheinander $A \approx A_1$, $A_1 \approx A_2, \ldots, A_{n-1} \approx A_n$, $A_n \approx B$ und auf Grund der Transitivität der Äquivalenz $A \approx B$.

Das Überführen einer Formel A in eine ihr äquivalente Formel B in adjunktiver Normform läßt sich oft verkürzen, wenn man im Punkt 1 zusätzlich folgende Ergänzungen vornimmt:

1) alle Vorkommen der Form $\sim(C \mid D)$ werden durch $C \wedge D$ ersetzt,
   alle Vorkommen der Form $\sim(C \dagger D)$ werden durch $C \vee D$ ersetzt,
   alle Vorkommen der Form $\sim(C \equiv D)$ werden durch $(C \wedge \sim D) \vee (\sim C \wedge D)$ ersetzt,
   alle Vorkommen der Form $\sim(C \supset D)$ werden durch $C \wedge \sim D$ ersetzt.

Verfahren zur Überführung einer Formel in eine ihr äquivalente Formel in konjunktiver Normalform

Das Verfahren zur Überführung einer Formel A in eine ihr äquivalente Formel B in konjunktiver Normalform unterscheidet sich von dem angegebenen Verfahren zur Überführung in eine adjunktive Normalform nur in Punkt 3:

3) alle Vorkommen der Form $(C \wedge D) \vee E$ bzw. $E \vee (C \wedge D)$ werden durch $(C \vee E) \wedge (D \vee E)$ ersetzt.

Mit *MT1* und *MT2* sowie *MT1-MT4* des vorhergehenden Abschnitts haben wir ein weiteres Entscheidungsverfahren für die klassische Aussagenlogik. Um festzustellen, ob eine beliebige Formel A eine Tautologie, Kontradiktion oder eine logisch indeterminierte Formel ist, überführen wir A zunächst in eine ihr äquivalente konjunktive Normalform B. Enthält jede elementare Adjunktion in B eine Aussagenvariable und deren Negat, so ist B und damit auch A eine Tautologie und das Überprüfungsverfahren ist beendet. Ist dies nicht der Fall, so ist B und damit auch A keine Tautologie. Dann überführen wir A in eine ihr äquivalente adjunktive Normalform C. Enthält jede elementare Konjunktion in C eine Aussagenvariable und deren Negat, so ist C und damit auch A eine Kontradiktion. Ist dies nicht der Fall, so ist C und damit auch A eine logisch indeterminierte Formel.

Wir betrachten einige Beispiele. Erstes Beispiel: Es sei zu prüfen, ob $p \supset q \supset p \supset p$ eine Tautologie, Kontradiktion oder eine logisch indeterminierte Formel ist. Wir überführen diese Formel in eine ihr äquivalente konjunktive Normalform:

1.	$p \supset q \supset p \supset p$	Ersetzungen von $A \supset B$ durch $\sim A \vee B$
2.	$\sim p \vee q \supset p \supset p$	
3.	$\sim(\sim p \vee q) \vee p \supset p$	
4.	$\sim(\sim(\sim p \vee q) \vee p) \vee p$	$(A \supset B/\sim A \vee B)$
5.	$\sim\sim(\sim p \vee q) \wedge \sim p \vee p$	$(\sim(A \vee B)/\sim A \wedge \sim B)$
6.	$(\sim p \vee q) \wedge \sim p \vee p$	$(\sim\sim A/A)$
7.	$(\sim p \vee q \vee p) \wedge (\sim p \vee p)$	$((A \wedge B) \vee C/(A \vee C) \wedge (B \vee C))$

Die Formel in Zeile 7 befindet sich in der konjunktiven Normalform und ist eine Tautologie, also ist auch $p \supset q \supset p \supset p$ eine Tautologie.

Zweites Beispiel: Es sei zu überprüfen, ob die Formel $p \mid q \equiv p \wedge q$ eine Tautologie, Kontradiktion oder logisch indeterminierte Formel ist. Wir überführen sie zunächst in eine konjunktive Normalform (die Hinweise auf die entsprechenden Äquivalenzen beziehen sich auf Abschnitt 8).

1.	$p \mid q \equiv p \wedge q$	
2.	$\sim p \vee \sim q \equiv p \wedge q$	*(T14)*
3.	$(\sim(\sim p \vee \sim q) \vee p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim(p \wedge q))$	*(T18)*
4.	$(\sim\sim p \wedge \sim\sim q \vee p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim(p \wedge q))$	*(T12)*
5.	$(\sim\sim p \wedge \sim\sim q \vee p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee (\sim p \vee \sim q))$	*(T12)*
6.	$(p \wedge q \vee p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee (\sim p \vee \sim q))$	*(T5)*
7.	$(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$	*(T6)*

Die Formel 7 befindet sich in der konjunktiven Normalform und ist keine Tautologie.

8.	$p \wedge q \wedge \sim p \vee p \wedge q \wedge \sim q$	*(T9)*

Die Formel 8 befindet sich in der adjunktiven Normalform und ist eine Kontradiktion, also ist auch $p \mid q \equiv p \wedge q$ eine Kontradiktion.

Übungen:

1. Überführen Sie folgende Formeln in eine konjunktive Normalform:
   a) $p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$
   b) $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$
   c) $p \mid (p \mid p)$!
2. Überführen Sie folgende Formeln in eine adjunktive Normalform:
   a) $p \dagger (p \dagger p)$
   b) $(p \equiv q) \equiv \sim(\sim p \equiv \sim q)$
   c) $(p \supset q \supset p \supset p) \mid (p \equiv p)$!
3. Überprüfen Sie mit Hilfe von Normalformen, ob die folgenden Formeln Tautologien, Kontradiktionen oder logisch indeterminierte Formeln sind:
   a) $p \supset q \supset (\sim q \supset \sim p)$
   b) $p \mid (p \mid (q \mid (q \mid q)))$
   c) $(p \supset q) \supset r \supset (p \supset r \supset (q \supset r))$
   d) $p \equiv p \equiv p \equiv p$
   e) $p \supset (q \supset (r \supset p))$
   f) $p \equiv p \equiv p \dagger (p \dagger p)$!

4.14 Ausgezeichnete konjunktive und adjunktive Normalformen

D1. Ausgezeichnete konjunktive Normalform: Eine Formel A befindet sich genau dann in einer ausgezeichneten konjunktiven Normalform, wenn sie die Form $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ $(n \geq 1)$ hat und außerdem folgende Bedingungen erfüllt:

1) Jedes A_i $(i = 1, \ldots, n)$ ist eine kanonisch geklammerte Adjunktion von elementaren Formeln;
2) in jedem Konjunktionsglied A_i kommen alle in A vorkommenden Variablen alphabetisch geordnet vor;
3) jede Variable kommt in jedem Konjunktionsglied genau einmal vor;
4) wenn $n \geq 2$, so unterscheiden sich zwei Konjunktionsglieder A_i und A_k aus $A_1, \ldots, A_n$ derart, daß mindestens eine Variable in einer der Formeln A_i und A_k negiert und in der jeweils anderen unnegiert vorkommt.

Aus Punkt 4 von *D1* folgt:

MT1. Wenn $A_i = f$, so $A_k = v$.

Beispiele für Formeln in der ausgezeichneten konjunktiven Normalform:

$$p,\ {\sim}q,\ (p \vee q) \wedge ({\sim}p \vee {\sim}q),\ (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee {\sim}q \vee {\sim}r),\ (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee {\sim}r) \wedge (p \vee {\sim}q \vee r) \wedge \\ \wedge ({\sim}p \vee q \vee r).$$

Die Formeln

$$p \vee (q \vee r),\ p \wedge q,\ (p \vee q) \wedge (p \vee {\sim}p \vee q),\ (p \vee q) \wedge (p \vee {\sim}q) \wedge (p \vee q)$$

befinden sich hingegen nicht in einer ausgezeichneten konjunktiven Normalform, da sie in der angegebenen Reihenfolge die Punkte 1, 2, 3 und 4 der Definition *D1* nicht erfüllen.

D2. Ausgezeichnete adjunktive Normalform: Eine Formel A befindet sich genau dann in einer ausgezeichneten adjunktiven Normalform, wenn sie die Form $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ $(n \geq 1)$ hat und außerdem folgende Bedingungen erfüllt:

1) Jedes A_i $(i = 1, \ldots, n)$ ist eine kanonisch geklammerte Konjunktion von elementaren Formeln;
2) in jedem Adjunktionsglied A_i kommen alle in A vorkommenden Variablen alphabetisch geordnet vor;
3) jede Variable kommt in jedem Adjunktionsglied genau einmal vor;
4) wenn $n \geq 2$, so unterscheiden sich zwei Adjunktionsglieder A_i und A_k aus $A_1, \ldots, A_n$ derart, daß mindestens eine Variable in einer der Formeln A_i und A_k negiert und in der jeweils anderen unnegiert vorkommt.

Aus Punkt 4 von *D2* folgt:

MT2. Wenn $A_i = v$, so $A_k = f$.

Beispiele für Formeln in der ausgezeichneten adjunktiven Normalform:

$$p,\ {\sim}q,\ (p \wedge q) \vee ({\sim}p \wedge {\sim}q),\ (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge {\sim}q \wedge {\sim}r),\ (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge {\sim}r) \vee (p \wedge {\sim}q \wedge r) \vee \\ \vee ({\sim}p \wedge q \wedge r).$$

Die Formeln

$$p \wedge (q \wedge r),\ p \vee r,\ (p \wedge q) \vee (p \wedge {\sim}p \wedge q),\ (p \wedge q) \vee (p \wedge {\sim}q) \vee (p \wedge q)$$

befinden sich hingegen nicht in einer ausgezeichneten adjunktiven Normalform, da sie in der angegebenen Reihenfolge die Punkte 1, 2, 3 und 4 der Definition *D2* nicht erfüllen.

MT3. Für jede nichttautologische Formel A läßt sich eine zu ihr äquivalente Formel B in der ausgezeichneten konjunktiven Normalform angeben.

Beweis von *MT3*: Angenommen, $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 1)$ seien alle in A vorkommenden Variablen in alphabetischer Ordnung. Mit Hilfe der Definitionen (Wahrheitstabellen) für die logischen Operatoren läßt sich eine Tabelle

$a_1 \cdots a_n$	A
	α_1
	.
X	.
	.
	α_{2^n}

aufbauen, in der in dem Rechteck X alle möglichen Wertkombinationen für die Variablen $a_1, \ldots, a_n$ aufgezählt sind und $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n}$ die Werte der Formel A bei diesen Wertkombinationen sind. Da A keine Tautologie ist, nimmt A mindestens einmal den Wert f an. Wir wählen die erste Zeile aus, in der α_i $(i = 1, \ldots, 2^n)$ der Wert f ist. Wir bilden dann die elementare Adjunktion D_1 auf folgende Weise:

Wenn bei der Wertkombination der Variablen in dieser Zeile die Variable a_j $(j = 1, \ldots, n)$ den Wert f hat, so geht a_j unnegiert in D_1 ein; wenn hingegen a_j den Wert v hat, so geht $\sim a_j$ in D_1 ein. Beim Aufbau von D_1 beachten wir die alphabetische Ordnung der Variablen. Danach wählen wir - falls es eine solche gibt - die nächste Zeile der Tabelle, in der A den Wert f hat, und bauen analog zu D_1 eine elementarere Adjunktion D_2 auf. In dieser Weise verfahren wir, bis alle Wertkombinationen der Variablen $a_1, \ldots, a_n$ erschöpft sind, bei denen A den Wert f annimmt. Angenommen, $D_1, \ldots, D_m$ $(m \geq 1)$ seien alle so gewonnenen elementaren Adjunktionen. Wir bilden jetzt die Konjunktion $D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$. Dies ist die gesuchte Formel B, die sich in der ausgezeichneten konjunktiven Normalform befindet und mit A äquivalent ist. Daß sich B in der ausgezeichneten konjunktiven Normalform befindet, ist aus dem Aufbau von $D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ ersichtlich. Die Äquivalenz $A \approx D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ beweisen wir folgendermaßen: Wir wählen eine beliebige Wertkombination für die Variablen $a_1, \ldots, a_n$. Wenn A bei dieser Wertkombination den Wert f hat, so gibt es unter den $D_1, \ldots, D_m$ ein D_i, das bei dieser Wertkombination gleichfalls den Wert f hat, denn wenn eine Variable bei dieser Wertkombination den Wert f hat, so kommt sie unnegiert in D_i vor, und wenn eine Variable bei dieser Wertkombination den Wert v hat, so kommt sie negiert in D_i vor. Die elementare Adjunktion D_i hat bei dieser Wertkombination also den Wert f. Folglich hat auch die ausgezeichente konjunktive Normalform $D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ bei dieser Wertkombination den Wert f. Hat die Formel A hingegen bei der betrachteten Wertkombination für die Variablen $a_1, \ldots, a_n$ den Wert v, so erhalten wir folgendes Ergebnis: Analog wie die $D_1, \ldots, D_m$ bauen wir für diese Wertkombinationen ein D_n auf, d. h., wenn a_j bei dieser Wertkombination den Wert f hat, so geht a_j unnegiert in D_n ein, wenn hingegen a_j den Wert v hat, so geht $\sim a_j$ in D_n ein. D_n hat bei dieser Wertkombination den Wert f und ist von allen $D_1, \ldots, D_m$ verschieden. Nach *MT1* haben dann alle $D_1, \ldots, D_m$ und folglich auch $D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ den Wert v.

MT4. Für jede erfüllbare Formel A läßt sich eine zu ihr äquivalente Formel B in der ausgezeichneten adjunktiven Normalform angeben.

Beweis von *MT4*: Da A eine erfüllbare Formel ist, nimmt sie bei mindestens einer Wertkombination für die in ihr vorkommenden Variablen $a_1, \ldots, a_n$ den Wert v an. Wir wählen die erste Zeile aus, in der α_i $(i = 1, \ldots, 2^n)$ der Wert v ist. Dann bilden wir die elementare Konjunktion D_1 auf folgende Weise: Wenn bei der Wertkombination der Variablen in dieser Zeile die Variable a_j $(j = 1, \ldots, n)$ den Wert v hat, so geht a_j unnegiert in D_1 ein, wenn hingegen a_j den

Wert f hat, so geht $\sim a_j$ in D_1 ein. Beim Aufbau von D_1 beachten wir wieder die alphabetische Ordnung der Variablen. Danach wählen wir die nächste Zeile der Tabelle, in der A den Wert v hat, falls es eine solche gibt, und bauen analog zu D_1 eine elementare Adjunktion D_2 auf. In dieser Weise verfahren wir, bis alle Wertkombinationen für die Variablen $a_1, \ldots, a_n$ erschöpft sind, bei denen A den Wert v annimmt. Angenommen, $D_1, \ldots, D_m$ $(m \geq 1)$ sind alle so gewonnenen elementaren Konjunktionen. Wir bilden jetzt die Adjunktion $D_1 \vee \ldots \vee D_m$. Dies ist die gesuchte Formel B, die sich in der ausgezeichneten adjunktiven Normalform befindet und mit A äquivalent ist. Aus dem Aufbau von $D_1 \vee \ldots \vee D_m$ ist ersichtlich, daß sich B in der ausgezeichneten adjunktiven Normalform befindet. Für den Beweis der Äquivalenz $A \approx D_1 \vee \ldots \vee D_m$ wählen wir wieder eine beliebige Wertkombination für die Variablen $a_1, \ldots, a_n$. Wenn A bei dieser Wertkombination den Wert v hat, so gibt es unter den $D_1, \ldots, D_m$ ein D_i, das bei dieser Wertkombination ebenfalls den Wert v hat. Folglich hat auch $D_1 \vee \ldots \vee D_m$ bei dieser Wertkombination den Wert v. Hat die Formal A hingegen bei der betrachteten Wertkombination den Wert f, so bauen wir wieder ein von allen $D_1, \ldots, D_m$ verschiedenes D_n auf, das bei dieser Wertkombination den Wert v hat. Auf Grund von *MT2* erhalten wir, daß alle $D_1, \ldots, D_m$ und folglich $D_1 \vee \ldots \vee D_m$ in diesem Falle den Wert f haben.

Aus dem Beweis von *MT3* und *MT4* ergeben sich folgende Metatheoreme:

MT5. Wenn A eine Tautologie mit n Variablen ist, so ist die Zahl der Adjunktionsglieder in $D_1 \vee \ldots \vee D_m$ gleich 2^n.

MT6. Wenn A eine Kontradiktion mit n Variablen ist, so ist die Zahl der Konjunktionsglieder in $D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ gleich 2^n.

MT7. Eine Tautologie besitzt keine ihr äquivalente ausgezeichnete konjunktive Normalform.

MT8. Eine Kontradiktion besitzt keine ihr äquivalente ausgezeichnete adjunktive Normalform.

MT9. Zu jeder Formel gibt es eine zu ihr äquivalente ausgezeichnete konjunktive oder adjunktive Normalform.

Aus *MT5* folgt:

MT10. Eine Formel in der ausgezeichneten adjunktiven Normalform $A_1 \vee \ldots \vee A_m$ ist genau dann eine Tautologie, wenn unter den $A_1, \ldots, A_m$ alle möglichen 2^n elementaren Konjunktionen vorkommen, die aus den n in $A_1 \vee \ldots \vee A_m$ vorkommenden Variablen gebildet werden können.

Aus *MT6* folgt:

MT11. Eine Formel in der ausgezeichneten konjunktiven Normalform $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ ist genau dann eine Kontradiktion, wenn unter den $A_1, \ldots, A_m$ alle möglichen 2^n elementaren Adjunktionen vorkommen, die aus den n in $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ vorkommenden Variablen gebildet werden können.

MT12. Eine Formel in der ausgezeichneten konjunktiven Normalform $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ (bzw. in der ausgezeichneten adjunktiven Normalform $A_1 \vee \ldots \vee A_m$), die nicht alle möglichen 2^n elementaren Adjunktionen (bzw. elementaren Konjunktionen) enthält, die aus den n in $A_1, \ldots, A_m$ vorkommenden Variablen gebildet werden können, ist eine logisch indeterminierte Formel.

MT13. Jede nicht tautologische Formel A läßt sich in eine zu ihr äquivalente ausgezeichnete konjunktive Normalform überführen.

Anstelle eines Beweises geben wir wieder ein effektives Verfahren an, wie wir A durch äquivalente Umformungen in eine ausgezeichnete konjunktive Normalform überführen können. Im ersten Schritt überführen wir A in eine konjunktive Normalform $B_1 \wedge \ldots \wedge B_n$ $(n \geq 1)$.

Im zweiten Schritt eliminieren wir mit Hilfe der Äquivalenz $B \wedge (C \vee {\sim}C \vee D) \approx B$ alle tautologischen B_i $(i = 1, \ldots, n)$. Sind alle B_i tautologisch, so ist A eine Tautologie und besitzt keine ausgezeichnete konjunktive Normalform. Da aber A laut Bedingung des Theorems keine Tautologie ist, bleiben einige elementare Adjunktionen übrig.

Auf Grund der Beziehung: wenn $B \approx D$, so $B \wedge D \approx B$ eliminieren wir im dritten Schritt alle überflüssigen äquivalenten Konjunktionsglieder.

Wegen $A \wedge A \approx A$ eliminieren wir im vierten Schritt in allen elementaren Adjunktionen mehrfach vorkommende elementare Formen.

Im fünften Schritt ergänzen wir mit Hilfe der Äquivalenz $B \approx B \vee (C \wedge {\sim}C) \approx B \wedge C \vee \vee B \wedge {\sim}C$ in den entsprechenden B_i alle fehlenden Variablen. Schließlich bringen wir im sechsten Schritt die elementaren Formeln in die erforderliche Ordnung.

MT14. Jede erfüllbare Formel A läßt sich in eine zu ihr äquivalente ausgezeichnete adjunktive Normalform überführen.

A wird zunächst in eine adjunktive Normalform überführt. Dann werden mit Hilfe von $B \vee \vee (C \wedge {\sim}C \wedge D) \approx B$ alle kontradiktorischen elementaren Konjunktionen eliminiert.

Auf Grund der Beziehung: wenn $B \approx D$, so $B \vee D \approx B$ eliminieren wir alle überflüssigen äquivalenten Adjunktionsglieder. Wegen $A \vee A \approx A$ eliminieren wir in allen elementaren Konjunktionen mehrfach vorkommende elementare Formeln.

Mit Hilfe der Äquivalenz $B \approx B \wedge (C \vee {\sim}C) \approx (B \wedge C) \vee (B \wedge {\sim}C)$ ergänzen wir in den entsprechenden B_i alle fehlenden Variablen. Schließlich bringen wir die Variablen in die erforderliche Ordnung.

Übungen:

1. Bilden Sie die ausgezeichnete adjunktive Normalform für eine Tautologie mit den vier Variablen p_1, p_2, p_3, p_4!
2. Bilden Sie die ausgezeichnete konjunktive Normalform für eine Kontradiktion mit den vier Variablen p_1, p_2, p_3, p_4!
3. Bilden Sie zu den folgenden Formeln äquivalente ausgezeichnete konjunktive bzw. adjunktive Normalformen:
   a) $p \vee q \supset q \wedge p$
   b) $p \supset q \supset p \supset p$
   c) $p \equiv {\sim}p$
   d) $p \supset q \supset ({\sim}p \supset {\sim}q)$
   e) $p \supset q \supset r \supset (p \supset r \supset (q \supset r))$!
4. Überführen Sie die Formeln aus Übung 3 durch äquivalente Umformungen in ausgezeichnete konjunktive bzw. adjunktive Normalformen!
5. Sind die folgenden ausgezeichneten konjunktiven bzw. adjunktiven Normalformen Tautologien, Kontradiktionen oder logisch indeterminierte Formeln:
   a) p
   b) ${\sim}p$
   c) $p \wedge {\sim}p$
   d) $p \vee {\sim}p$
   e) $p \wedge q \vee {\sim}p \wedge q \vee p \wedge {\sim}q \vee {\sim}p \wedge {\sim}q$
   f) $(p \vee q) \wedge ({\sim}p \vee q) \wedge (p \vee {\sim}q) \wedge ({\sim}p \vee {\sim}q)$
   g) $p \wedge q \wedge r \vee {\sim}p \wedge q \wedge r \vee p \wedge {\sim}q \wedge r \vee p \wedge q \wedge {\sim}r \vee {\sim}p \wedge {\sim}q \wedge r \vee p \wedge {\sim}q \wedge {\sim}r \vee {\sim}p \wedge {\sim}q \wedge {\sim}r$
   h) $(p \vee q \vee r) \wedge ({\sim}p \vee {\sim}q \vee {\sim}r)$?

4.15 Semantische Tableaus

Eine andere Darstellungsweise der klassischen zweiwertigen Aussagenalgebra als die bisher betrachtete wurde von E. W. Beth vorgeschlagen und wird *Kalkül der semantischen Tableaus* genannt (Beth 1955, 1962a, 1962b). Beth stellte ein Regelsystem auf, nach dem man von einer beliebigen Formel der klassischen Ausssagenlogik entscheiden kann, ob sie eine Tautologie ist oder nicht. Bevor wir die Regeln genau formulieren, erläutern wir die Grundgedanken dieser Methode: Um nachzuweisen, daß eine gegebene Formel der Aussagenlogik eine Tautologie ist, kann man annehmen, daß diese Formel keine Tautologie sei, und diese Annahme dann zum Widerspruch führen. Während bei der Methode der Wahrheitstabellen den Aussagenvariablen alle möglichen Wertkombinationen zugeschrieben werden und dann sukzessive der Wert einer gegebenen Formel bei diesen Wertkombinationen ermittelt wird, geht man bei der Methode der semantischen Tableaus umgekehrt vor. Man nimmt an, es gäbe eine Wertkombination für die Variablen, bei der die Gesamtformel den Wert f annimmt, ohne zunächst diese Wertkombination anzugeben. Dann ermittelt man, welche möglichen Werte bei dieser Annahme die Teilformeln der gegebenen Formel und schließlich die Aussagenvariablen annehmen können. Stellt sich dabei heraus, daß man eine Wertkombination für die Variablen konstruieren kann, bei der die Formel den Wert f annimmt (daß man ein Gegenbeispiel angeben kann), so ist die betreffende Formel keine Tautologie. Ergibt hingegen eine Prüfung aller Möglichkeiten, den Variablen Werte zuzuschreiben, daß keine Wertkombination möglich ist, bei der die Formel den Wert f annimmt, so ist die betreffende Formel eine Tautologie. Diese semantischen Überlegungen werden von Beth in Form syntaktischer Regeln zur Umformung von Formeln formuliert.

Wir betrachten zunächst ein Beispiel. Es soll geprüft werden, ob die Formel $p \wedge q \supset q \wedge p$ eine Tautologie ist. Dazu benutzen wir ein Tableau der folgenden Form, in dem rechts als falsch angenommene Formeln und links als wahr angenommene geschrieben werden:

v	f
1.	$p \wedge q \supset q \wedge p$

Wir haben also angenommen, es gäbe eine Wertkombination für die Variablen unserer Formel, bei der diese den Wert f annimmt. Auf Grund der Wahrheitstabelle von $\supset$ kann das aber nur der Fall sein, wenn das Antezedent $p \wedge q = v$ und das Konsequent $q \wedge p = f$. Wir erhalten also das Tableau:

v	f
1.	$p \wedge q \supset q \wedge p$
2. $p \wedge q$	$q \wedge p$

Die Formel $p \wedge q$ ist aber offenbar nur wahr, wenn $p = v$ und $q = v$. Wir erhalten also:

v	f
1.	$p \wedge q \supset q \wedge p$
2. $p \wedge q$	$q \wedge p$
3. p	
q	

Jetzt überlegen wir, wann die Formel $q \wedge p$ den Wert f annehmen kann. Das ist auf Grund der Definition von $\wedge$ der Fall, wenn $q = f$ oder wenn $p = f$. Wir müssen also zwei Fälle unterscheiden und unser Tableau in zwei Teiltableaus aufspalten, die beide Möglichkeiten berücksichtigen:

$$\begin{array}{ll|ll}
v & & f & \\
\hline
1. & & p \wedge q \supset q \wedge p & \\
2.\ p \wedge q & & q \wedge p & \\
3.\ p & & & \\
\quad q & & & \\
\hline
4. & \multicolumn{1}{|l|}{} & q & \multicolumn{1}{|l}{p}
\end{array}$$

Eine Analyse des gewonnenen Resultates ergibt: die Formel $p \wedge q \supset q \wedge p$ könnte nur in zwei Fällen den Wert f annehmen, einmal, wenn $q = f$, $p = v$ und $q = v$, zum anderen, wenn $p = f$, $p = v$ und $q = v$. Beide Fälle sind aber nicht möglich, da jedesmal ein und derselben Variablen bei einer Wertkombination sowohl der Wert v als auch der Wert f zugeschrieben werden müßte.

Diesen semantischen Überlegungen können wir folgende syntaktische Form geben:

Im ersten Schritt schreiben wir die zu überprüfende Formel in die rechte Spalte des Tableaus. Dann wird das Tableau nach folgenden Regeln zur Entwicklung der semantischen Tableaus aufgebaut:

Aus dem jeweiligen linken Tableau (Teiltableau) kann man das jeweilige rechte Tableau (Teiltableau) herstellen:

1. *Regel der vorderen Negation* (*VN*):

$$\begin{array}{c|l}
\vdots & \vdots \\
\sim A & \vdots \\
\vdots & \vdots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|l}
\vdots & \vdots \\
\sim A & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
 & A
\end{array}$$

2. *Regel der hinteren Negation* (*HN*):

$$\begin{array}{c|l}
\vdots & \vdots \\
\vdots & \sim A \\
\vdots & \vdots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|l}
\vdots & \vdots \\
\vdots & \sim A \\
\vdots & \vdots \\
A & \vdots
\end{array}$$

3. *Regel der vorderen Subjunktion* (*VS*):

$$\begin{array}{c|l}
\vdots & \vdots \\
A \supset B & \vdots \\
\vdots & \vdots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc|cc}
\vdots & & \vdots & \\
A \supset B & & \vdots & \\
\vdots & & \vdots & \\
\hline
 & \multicolumn{1}{|c|}{B} & A & \multicolumn{1}{|c}{}
\end{array}$$

4. *Regel der hinteren Subjunktion (HS)*:

$$
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & A \supset B \\
. & . \\
. & . \\
 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & A \supset B \\
. & . \\
. & . \\
A & B
\end{array}
$$

5. *Regel der vorderen Konjunktion (VK)*:

$$
\begin{array}{l|l}
. & . \\
. & . \\
A \wedge B & . \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & .
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
. & . \\
. & . \\
A \wedge B & . \\
. & . \\
. & . \\
A & . \\
. & . \\
. & . \\
B &
\end{array}
$$

6. *Regel der hinteren Konjunktion (HK)*:

$$
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & A \wedge B \\
. & .
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{.} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\multicolumn{2}{c|}{.} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\multicolumn{2}{c|}{.} & \multicolumn{2}{l}{A \wedge B} \\
\multicolumn{2}{c|}{.} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{} & & \multicolumn{1}{c|}{A} & B
\end{array}
$$

7. *Regel der vorderen Adjunktion (VA)*:

$$
\begin{array}{l|l}
. & . \\
. & . \\
A \vee B & . \\
. & . \\
. & . \\
. & .
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{2}{l|}{.} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\multicolumn{2}{l|}{.} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\multicolumn{2}{l|}{A \vee B} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\multicolumn{2}{l|}{.} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\multicolumn{2}{l|}{.} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\multicolumn{2}{l|}{.} & \multicolumn{2}{l}{.} \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{A} & B & \multicolumn{1}{c|}{} &
\end{array}
$$

8. *Regel der hinteren Adjunktion (HA)*:

$$
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & A \vee B \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & .
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & A \vee B \\
. & . \\
. & . \\
. & A \\
. & . \\
. & B
\end{array}
$$

9. *Regel der vorderen Bisubjunktion* (VB):

$$\begin{array}{l|l} . & . \\ . & . \\ A \equiv B & . \\ . & . \\ . & . \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll|ll} . & & . & \\ . & & . & \\ A \equiv B & & . & \\ . & & . & \\ . & & . & \\ \hline \multicolumn{1}{l|}{A} & & \multicolumn{1}{l|}{} & A \\ \multicolumn{1}{l|}{B} & & \multicolumn{1}{l|}{} & B \end{array}$$

10. *Regel der hinteren Bisubjunktion* (HB):

$$\begin{array}{r|l} . & . \\ . & . \\ . & A \equiv B \\ . & . \\ . & . \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll|ll} . & & . & \\ . & & . & \\ . & & A \equiv B & \\ . & & . & \\ . & & . & \\ \hline \multicolumn{1}{l|}{A} & B & \multicolumn{1}{l|}{B} & A \end{array}$$

11. *Regel der vorderen Negatadjunktion* (VNa):

$$\begin{array}{l|l} . & . \\ . & . \\ A \mid B & . \\ . & . \\ . & . \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll|ll} . & & . & \\ . & & . & \\ A \mid B & & . & \\ . & & . & \\ . & & . & \\ \hline \multicolumn{1}{l|}{} & & \multicolumn{1}{l|}{A} & B \end{array}$$

12. *Regel der hinteren Negatadjunktion* (HNa):

$$\begin{array}{r|l} . & . \\ . & . \\ . & A \mid B \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} . & . \\ . & . \\ . & A \mid B \\ . & . \\ . & . \\ A & \\ B & \end{array}$$

13. *Regel der vorderen Negatkonjunktion* (VNk):

$$\begin{array}{l|l} . & . \\ . & . \\ A \dagger B & . \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} . & . \\ . & . \\ A \dagger B & . \\ . & . \\ . & . \\ . & A \\ . & B \end{array}$$

14. *Regel der hinteren Negatkonjunktion* (*HNk*):

.	.		.		.
.	.		.		.
.	$A \dagger B$		.		$A \dagger B$
.	.		.		.
.	.		.		.
			A	B	

Diese Regeln ergeben sich unmittelbar aus den semantischen Definitionen der jeweiligen Operatoren. Treten noch andere Operatoren auf, so kann man leicht die betreffenden Regeln zur Entwicklung der semantischen Tableaus aufstellen.

Zur Formulierung des Beweisbegriffes treffen wir folgende Festsetzung: Zu den Formeln eines Teiltableaus eines Tableaus (eines Teiltableaus) gehören auch alle Formeln des ursprünglichen Tableaus (Teiltableaus). Weiter sind die linken und die rechten Spalten von einem Teiltableau eines Tableaus in der Reihenfolge ihres Auftretens von links nach rechts einander zugeordnet.

Ein Teiltableau ist geschlossen genau dann, wenn eine Formel sowohl in seiner linken als auch in seiner rechten Spalte auftritt. Ein Tableau ist geschlossen genau dann, wenn alle seine Teiltableaus geschlossen sind. Ein geschlossenes Tableau ist ein Beweis einer Formel. Das Geschlossensein eines Tableaus (eines Teiltableaus) kennzeichnen wir dadurch, daß wir die entsprechenden Spalten unterstreichen. Es gilt folgendes Metatheorem, das wir ohne Beweis angeben:

MT1. Eine aussagenlogische Formel ist genau dann eine Tautologie, wenn es für sie einen Beweis im Kalkül der semantischen Tableaus gibt.

Wir betrachten einige Beispiele:

v		f	
1.		$p \wedge q \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$	
2. $p \wedge q$		$\sim(\sim p \vee \sim q)$	
3. p			
q			
4. $\sim p \vee \sim q$			
5. $\sim p$	$\sim q$	6. p	q

Die betrachtete Formel ist eine Tautologie, da das Tableau geschlossen ist (im linken Teiltableau tritt p links und rechts auf, im rechten Teiltableau q).

v		f	
1.		$p \supset q \supset p \supset p$	
2. $p \supset q \supset p$		p	
3.	p	$p \supset q$	
4. p		q	

Auch diese Formel ist eine Tautologie, da das Tableau geschlossen ist.

v				f			
1.				$p \vee q \supset p \wedge q$			
2. $p \vee q$				$p \wedge q$			
3. p		q					
4.				p	q	p	q

Die betrachtete Formel ist keine Tautologie, da sich das Tableau nicht abschließen läßt.

D1. Eine Formel B **folgt semantisch** aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ (oder ist eine **semantische Folgerung** aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$) genau dann, wenn folgende Abhängigkeit gilt: wenn $A_1 = v, \ldots, A_n = v$, so $B = v$ (d. h., wenn wir jeder der Formeln $A_1, \ldots, A_n$ den Wert v zugeschrieben haben, so müssen wir in der Folge davon auch der Formel B den Wert v zuschreiben). Wir nennen $A_1, \ldots, A_n$ **Voraussetzungen** und B **Folgerung** der semantischen Folgebeziehung. Symbolisch schreiben wir die **semantische Folgebeziehung** in folgender Form: $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Mit Hilfe der semantischen Tableaus kann auch überprüft werden, ob zwischen Formeln die semantische Folgebeziehung besteht oder nicht. Um zu prüfen, ob $A_1, \ldots, A_n \models B$ gilt oder nicht, schreibt man die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ untereinander in die linke Spalte des Tableaus und die Formel B in die rechte. Die Formel B folgt genau dann semantisch aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$, wenn das so aufgebaute Tableau abgeschlossen werden kann.

Die Methode der semantischen Tableaus ist zwar nur eine andere Darstellungsweise der zweiwertigen Aussagenalgebra. Sie macht jedoch, wie wir später sehen werden, den Zusammenhang zwischen einem semantischen Aufbau der klassischen zweiwertigen Logik und dem Sequenzenkalkül besonders deutlich. Darüber hinaus wurde durch diese Methode der semantischen Tableaus P. Lorenzen zu seinem dialogischen Aufbau der Logik angeregt.

Übungen:

1. Überprüfen Sie mit Hilfe der semantischen Tableaus, ob folgende Formeln Tautologien sind oder nicht:
   a) $p \supset q \supset (p \wedge r \supset q \wedge r)$
   b) $(p \supset q) \wedge (r \supset p_1) \wedge (p \vee r) \supset q \vee p_1$
   c) $p \supset (q \supset r) \equiv p \supset q \supset r$
   d) $p \supset q \wedge r \equiv (p \supset q) \wedge (p \supset r)$!
2. Überprüfen Sie mit Hilfe der semantischen Tableaus, ob folgende semantische Folgebeziehungen gelten oder nicht:
   a) $p \supset q, r \supset p_1, p \vee r, \sim(q \wedge p_1) \models (q \supset p) \wedge (p_1 \supset r)$
   b) $p \mid q \mid (p \mid q) \models p \wedge q$
   c) $p \wedge \sim p \models q$
   d) $q \models p \vee \sim p$!
3. Formulieren Sie die Regeln zur Entwicklung der semantischen Tableaus für folgende Operatoren:

A	B	$A \subset B$	$A : B$
v	v	v	f
v	f	v	v
f	v	f	v
f	f	v	f

4.16 Innerlogische und außerlogische Anwendungen der Aussagenalgebra

Die Aussagenalgebra ist für sich genommen noch keine logische Theorie. Sie ist nur ein Mittel zur Lösung bestimmter Probleme der Logik und für den Aufbau einer logischen Theorie, die die

Eigenschaften bestimmter Arten von Aussagen beschreibt. Hierzu ist es notwendig, die Sprache der Aussagenalgebra mit Hilfe logischer Termini zu interpretieren. Diese Interpretation hat folgende Form: Die Aussagenvariablen werden als Bezeichnung für solche Aussagen gewählt, die sich nicht in andere Aussagen und die Operatoren „nicht", „und", „oder" usw. aufgliedern lassen. Solche Aussagen sind unter dem Gesichtspunkt des vorliegenden Bereiches der Logik einfache Aussagen. Solche Aussagen sind beispielsweise „Das Elektron ist negativ geladen", „Alle geraden Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbar". Aussagenlogische Formeln, die die Operatoren $\sim$, $\vee$, $\wedge$ usw. enthalten, werden als zusammengesetzte Aussagen aufgefaßt, die aus einfachen Aussagen und den genannten Operatoren gebildet sind. Solche Aussagen sind beispielsweise: „Nicht alle Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbar", „Das Elektron ist negativ geladen, während das Positron positiv geladen ist".

Die Operatoren $\sim$, $\vee$, $\wedge$ usw. werden als aussagenbildende logische Operatoren gedeutet, die man mit den Wörtern „nicht", „oder", „und" usw. lesen kann. Dabei entsprechen diese Operatoren nicht vollständig den angegebenen Wörtern. Sie drücken nur bestimmte ihrer Eigenschaften aus bzw. erfüllen nur bestimmte Funktionen dieser Wörter in der Sprache, die durch die Definitionen der Operatoren festgelegt sind. Die Zeichen v und f werden entsprechend als die semantischen Termini „wahr" und „nicht wahr" („falsch") gedeutet. Die Definitionen der logischen Operatoren mit Hilfe dieser Termini dienen gleichzeitig als Regeln, nach denen man die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen ermitteln kann, wenn man die Wahrheitswerte der in ihnen vorkommenden einfachen Aussagen kennt, und umgekehrt.

Die Subjunktion wird als der Operator „wenn ..., so ..." oder als das logische Prädikat „aus ... folgt logisch ..." gedeutet. Dabei wird $A \supset B$ als „wenn A, so B" oder als „Aus der Aussage A folgt logisch die Aussage B" gelesen. Auf die mit dieser Deutung zusammenhängenden Probleme gehen wir später ein.

Die Tautologien werden als Behauptungen gedeutet, die allein auf Grund der Definitionen der logischen Operatoren und unabhängig davon, worüber in den einfachen Aussagen gesprochen wird, wahr sind. So ist die Behauptung $A \vee \sim A$ für beliebige Aussagen A wahr, unabhängig davon, was in A ausgesagt wird. Sie ist deshalb wahr, weil die Operatoren $\sim$ und $\vee$ gerade so eingeführt wurden.

Tautologien mit der Subjunktion als Hauptoperator werden als Schlußregeln zur Gewinnung von Aussagen aus anderen Aussagen gedeutet. So deutet man beispielsweise die Tautologien $A \wedge B \supset A$ und $(A \vee B) \wedge \sim A \supset B$ als „Aus $A \wedge B$ folgt (ist ableitbar) A" bzw. „Aus $(A \vee B)$ und $\sim A$ ist B ableitbar".

Das Überführen von Formeln in eine Normalform wird als ein Überführen von Aussagen in eine solche Form gedeutet, in der ihr Sinn, ihre möglichen Folgerungen usw. deutlicher werden.

Die Aussagenalgebra ist ein bequemes und zuverlässiges Mittel für die Lösung der angegebenen logischen Probleme, denn sie stellt für Aussagen (und Operatoren) des angegebenen Typs in erschöpfender Weise und mit ausreichender Strenge Regeln auf. Die Sprache der Aussagenalgebra läßt sich aber auch in außerlogischer Terminologie interpretieren. Dabei werden die Variablen als Bezeichnungen von Objekten eines bestimmten Untersuchungsbereichs, die Zeichen v und f als sich gegenseitig ausschließende Eigenschaften dieser Objekte und die logischen Operatoren als Bezeichnungen für bestimmte Wechselbeziehungen dieser Objekte gedeutet. Allgemein bekannt ist beispielsweise die Verwendung der Aussagenalgebra in der Schaltalgebra. Dabei werden die Variablen als Bezeichnungen von Schaltern betrachtet, v und f bezeichnen entsprechend die Zustände der Schalter „eingeschaltet" und „ausgeschaltet", der Operator $\wedge$ wird als Bezeichnung einer Reihenschaltung und der Operator $\vee$ als Bezeichnung einer Parallelschaltung angesehen. Eine solche Anwendung der Aussagenalgebra als Mittel zur Untersuchung eines bestimmten Objektbereiches selbst und nicht der Sprache der Wissenschaft über diesen

Bereich ist jedoch *nicht* kennzeichnend für die Anwendung der Logik als Wissenschaft. Hier werden nur Untersuchungsverfahren benutzt, die in der Wissenschaft der Logik verwendet werden, deren Anwendungsbereich aber nicht nur auf die Logik beschränkt ist.

5. Kapitel
Ein System des natürlichen Schließens der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik

5.1 Natürliches Schließen. Alphabet und Formeldefinition

Bei der Behandlung des wahrheitsfunktionalen Aufbaus der Aussagenlogik haben wir kennengelernt, wie man aus Tautologien der Form $A \supset B$ aussagenlogische Schlußregeln erhält, die dann beim praktischen logischen Schließen verwendet werden können. Wir haben zwar in der zweiwertigen Aussagenalgebra mit den Wahrheitstabellen ein einfaches Entscheidungsverfahren, um festzustellen, ob eine Formel eine Tautologie ist oder nicht und ob eine Schlußregel gültig ist oder nicht, doch unterscheidet sich dieses Verfahren grundlegend von der Vorgehensweise beim praktischen logischen Schließen. Deshalb wurden Systeme der Aussagenlogik entworfen, die dem praktischen logischen Schließen oder dem natürlichen Schließen in den Wissenschaften mehr entsprechen. Es handelt sich hier um einen regellogischen Aufbau, d. h., es werden einige Grundregeln ohne Beweis akzeptiert, mit deren Hilfe man alle anderen gültigen aussagenlogischen Regeln gewinnen kann. Die ersten Systeme dieser Art wurden unabhängig voneinander von dem deutschen Logiker G. Gentzen (Gentzen 1934-1935) und dem polnischen Logiker St. Jaśkowski (Jaśkowski 1934) vorgeschlagen. Wir stellen hier ein von den polnischen Logikern J. Słupecki und L. Borkowski aufgebautes System (J. Słupecki/L. Borkowski 1967) in modifizierter Form vor.

Beim Aufbau dieses Systems des natürlichen Schließens verwenden wir folgendes Alphabet:

1. p, q, r mit oder ohne Indizes als Aussagenvariablen;
2. die Operatoren $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $|$ und $\dagger$, die entsprechend als „nicht“, „und“, „oder“ („oder/und“), „wenn ..., so ...“, „genau dann, wenn“, „nicht beide“ und „weder ..., noch ...“ der Umgangssprache gedeutet werden;
3. (,) - Klammern als Hilfszeichen.

Wir wählen dieselbe Formeldefinition wie in Abschnitt 2 des vierten Kapitels und übernehmen auch die dort getroffenen Vereinbarungen über Klammereinsparungen sowie die übrigen terminologischen Festsetzungen dieses Abschnitts.

Bevor wir die Grundregeln der Aussagenlogik formulieren, betrachten wir folgenden einfachen Beweis eines mathematischen Satzes:

Wenn $x > y \supset \sim(y > x)$ gilt, so gilt auch $\sim(x > x)$.

x und y sind hier Variablen, die Werte aus dem Bereich der natürlichen Zahlen annehmen, und „$>$“ ist das übliche Zeichen für „größer als“. Der mathematische Satz ist als Konditionalsatz formuliert. In unserem Beweis können wir deshalb die Bedingungen des Theorems als Voraussetzungen des Beweises setzen und daraus die Behauptung $\sim(x > x)$ ableiten. Damit wäre der mathematische Satz bewiesen. Wir wollen den Beweis in einzelne numerierte Beweiszeilen zergliedern. In der ersten Zeile schreiben wir die Bedingung des Theorems als Annahme des Beweises:

1. $x > y \supset \sim(y > x)$ (Annahme des Beweises)
2. $x > x \supset \sim(x > x)$ (Einsetzung aus 1)

Wir führen den Beweis indirekt, d. h., wir nehmen an, die zu beweisende Folgerung gelte nicht, und führen dann diese Annahme zum Widerspruch.

3. $\sim\sim(x > x)$ (Annahme des indirekten Beweises)

Da die doppelte Negation einer Behauptung gleichbedeutend mit der Behauptung ist, gilt

4. $x > x$

Wir betrachten jetzt die Beweiszeilen 2 und 4, und da 4 der Vordersatz von 2 ist, erhalten wir

5. $\sim(x > x)$.

Mit 4 und 5 haben wir zwei sich widersprechende Sätze gewonnen und somit die Annahme des indirekten Beweises als unrichtig nachgewiesen. Es gilt also $\sim(x > x)$.

Wenn wir diesen Beweis analysieren, so können wir feststellen, daß in ihm zwei Arten von Regeln benutzt werden. Einerseits sehen wir, daß der Gesamtbeweis eine bestimmte Struktur besitzt, in unserem Beispiel ist es ein indirekter Beweis. Die Annahme des indirekten Beweises wird zum Widerspruch geführt. Außer den indirekten gibt es auch direkte Beweise. Die Regeln, die die Struktur eines Beweises bestimmen, wollen wir *Strukturregeln* nennen. Wir werden sie später genau formulieren. Andererseits wird innerhalb des betrachteten Beweises der Übergang zu neuen Beweiszeilen nach bestimmten logischen Regeln vollzogen, die wir *Regeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis* nennen. Im folgenden Abschnitt geben wir die Grundregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis sowie die Strukturregeln zum Aufbau eines direkten und indirekten Beweises im System des natürlichen Schließens der Aussagenlogik an.

5.2 Grundregeln und Strukturregeln im System des natürlichen Schließens

Die Regeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis schreiben wir in der Form

$$\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline B \end{array},$$

wobei $n \geq 1$, die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ über dem Strich die *Prämissen* (oder *Voraussetzungen*) der Schlußregel und die Formel B unter dem Strich die *Konklusion* (oder *Folgerung*) der Schlußregel genannt werden. Solch eine Schlußregel gestattet es, in einem Beweis, in dem die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ (in beliebiger Reihenfolge) bereits vorkommen, als neue Zeile die Formel B zu schreiben.

Wir benutzen bei unserem Aufbau der Aussagenlogik folgende Regeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis:

1. *Abtrennungsregel* (AR):

$$\begin{array}{c} A \supset B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Ein Beispiel für eine Anwendung dieser Regel in der Umgangssprache ist das folgende:

$$\begin{array}{l} \text{Wenn es regnet, so wird das Pflaster naß.} \\ \text{Es regnet.} \\ \hline \text{Das Pflaster wird naß.} \end{array}$$

2. *Einführungsregel der Konjunktion* (*EK*):

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{A \wedge B}$$

Beispiel: $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Es regnet.}\\\text{Das Pflaster wird naß.}\end{array}}{\text{Es regnet, und das Pflaster wird naß.}}$

3. *Beseitigungsregel der Konjunktion* (*BK*):

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Aus einer Konjunktion kann man sowohl auf ihr Vorderglied als auch auf ihr Hinterglied schließen. Wir können diese Regel auch zusammenfassend schreiben:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}$$

Beispiel: $\dfrac{\text{Es regnet, und das Pflaster wird naß.}}{\begin{array}{l}\text{Es regnet.}\\\text{Das Pflaster wird naß.}\end{array}}$

4. *Einführungsregel der Adjunktion* (*EA*):

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

Nach diesen Regeln kann man zu einer Formel eine beliebige andere Formel als Vorderglied oder Hinterglied adjunktiv hinzufügen. Wir werden bei der Behandlung der logischen Folgebeziehung noch sehen, daß die Einführungsregeln der Adjunktion problematisch sind. Nach diesen Regeln ist es möglich, beliebige Formeln (in der Anwendung in der natürlichen Sprache: beliebige Aussagen) in einen Beweis einzuführen, die in keinem Zusammenhang mit den Voraussetzungen stehen. Beim praktischen Schließen in den Wissenschaften geht man nicht so vor. Wir können uns aber leicht davon überzeugen, daß durch eine Anwendung dieser Regeln kein Fehler in einem Beweis entsteht, denn sie führen von wahren Voraussetzungen stets zu wahren Folgerungen, da eine Adjunktion schon dann wahr ist, wenn mindestens eines ihrer Glieder wahr ist.

Beispiel: $\dfrac{\text{Ich gehe heute ins Kino.}}{\begin{array}{l}\text{Ich gehe heute ins Kino, oder ich lese ein Buch.}\\\text{Ich lese heute ein Buch, oder ich gehe heute ins Kino.}\end{array}}$

5. *Beseitigungsregel der Adjunktion* (*BA*):

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ \sim A\end{array}}{B}$$

Beispiel: Ich gehe heute ins Kino, oder ich gehe ins Theater.
Ich gehe heute nicht ins Kino.
―――――――――――――――――――――――――
Ich gehe heute ins Theater.

6. *Einführungsregel der Bisubjunktion* (EB):

$$\frac{\begin{array}{c}A \supset B\\ B \supset A\end{array}}{A \equiv B}$$

Beispiel: Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es gleichwinklig.
Wenn ein Dreieck gleichwinklig ist, so ist es gleichseitig.
―――――――――――――――――――――――――
Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn es gleichwinklig ist.

7. *Beseitigungsregel der Bisubjunktion* (BB):

$$\frac{A \equiv B}{\begin{array}{c}A \supset B\\ B \supset A\end{array}}$$

Beispiel: Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn es gleichwinklig ist.
―――――――――――――――――――――――――
Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es gleichwinklig.
Wenn ein Dreieck gleichwinklig ist, so ist es gleichseitig.

8. *Einführungsregel der Negatadjunktion* (ENa):

$$\frac{\sim A}{A \mid B} \qquad\qquad \frac{\sim B}{A \mid B}$$

Auch diese Regeln leiden an dem gleichen Mangel wie die Einführungsregeln der Adjunktion, denn auch hier kommen in den Folgerungen Variablen vor, die in den Voraussetzungen fehlen. Aber auch bei der Anwendung der *ENa* können in einem Beweis keine Fehler entstehen, denn wenn die Voraussetzungen dieser Regeln wahr sind, so sind es auch die Folgerungen, da eine Negatadjunktion schon dann wahr ist, wenn eines ihrer Glieder falsch ist.

Beispiel: Ich gehe heute nicht ins Kino.
―――――――――――――――――――――――――
Es gilt nicht beides: Ich gehe heute ins Kino, und ich gehe heute ins Theater.

9. *Beseitigungsregel für die Negatadjunktion* (BNa):

$$\frac{A \mid B}{\sim A \vee \sim B}$$

Beispiel: Es gilt nicht beides: Ich gehe heute ins Kino, und ich gehe heute ins Theater.
―――――――――――――――――――――――――
Ich gehe heute nicht ins Kino, oder ich gehe heute nicht ins Theater.

10. *Einführungsregel der Negatkonjunktion* (ENk):

$$\frac{\begin{array}{c}\sim A\\ \sim B\end{array}}{A \dagger B}$$

Beispiel:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Ich gehe heute nicht ins Kino.}\\ \text{Ich gehe heute nicht ins Theater.}\end{array}}{\text{Ich gehe heute weder ins Kino, noch gehe ich heute ins Theater.}}$$

11. *Beseitigungsregel der Negatkonjunktion* (*BNk*):

$$\frac{A \dagger B}{\begin{array}{c}\sim A\\ \sim B\end{array}}$$

Beispiel:

$$\frac{\text{Ich gehe heute weder ins Kino, noch gehe ich heute ins Theater.}}{\begin{array}{l}\text{Ich gehe heute nicht ins Kino.}\\ \text{Ich gehe heute nicht ins Theater.}\end{array}}$$

Mit Hilfe dieser 11 Grundregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis und der beiden Strukturregeln zum Aufbau eines direkten und eines indirekten Beweises, die wir im Anschluß formulieren, läßt sich die gesamte klassische Aussagenlogik aufbauen. Die 11 Grundregeln sind leicht zu merken. Wir haben für die Subjunktion nur die Abtrennungsregel. Für die übrigen zweistelligen Operatoren haben wir jeweils eine Einführungs- und eine Beseitigungsregel. In den Einführungsregeln kommt der betreffende Operator in den Voraussetzungen über dem Strich nicht vor, tritt jedoch in der Folgerung unter dem Strich auf, während in den Beseitigungsregeln der betreffende Operator in den Voraussetzungen, aber nicht in den Folgerungen vorkommt. Alle Regeln (außer *EA* und *ENa*) sind offensichtlich und werden intuitiv als gültig akzeptiert. Aus der von uns getroffenen Formeldefinition ergibt sich, daß jede beliebige Formel der Aussagenlogik durch das folgende Formelschema erfaßt wird:

(FSI) $A_1 \supset (A_2 \supset (A_3 \supset \ldots \supset (A_n \supset B)\ldots))$, wobei $n \geq 0$.

Ist der Hauptoperator einer Formel keine Subjunktion, so ist $n = 0$, und die Formel fällt unter *FSI*. Enthält eine Formel eine Subjunktion als Hauptoperator und hat die Form $C \supset D$, so ist C die Formel A_1. Ist der Hauptoperator von D dabei keine Subjunktion, so ist D die Formel B. Ist der Hauptoperator von D eine Subjunktion, und hat D die Form $E \supset F$, so ist E die Formel A_2, und falls F als Hauptoperator keine Subjunktion enthält, ist F die Formel B. Enthält F hingegen die Subjunktion als Hauptoperator, so setzen wir die Aufgliederung der Formel in der angegebenen Weise solange fort, bis wir auf eine Formel B stoßen, die keine Subjunktion als Hauptoperator enthält.

Da alle aussagenlogischen Formeln unter das Formelschema *FSI* fallen, können wir die Strukturregeln zum Aufbau eines Beweises bezüglich des Formelschemas *FSI* formulieren.

I. *Strukturregel zum Aufbau eines direkten Beweises einer Formel der Form FSI*:

1. In den ersten n Zeilen des Beweises werden $A_1, \ldots, A_n$ nacheinander als Annahmen des Beweises geschrieben.
2. Bereits bewiesene Theoreme können als neue Zeilen zum Beweis hinzugefügt werden.
3. Auf der Grundlage schon vorhandener Zeilen können zum Beweis neue Zeilen nach den 11 Grundregeln *AR*, *EK*, *BK*, *EA*, *BA*, *EB*, *BB*, *ENa*, *BNa*, *ENk* und *BNk* hinzugefügt werden.
4. Der Beweis einer Formel der Form *FSI* ist beendet, wenn seine letzte Zeile B ist.

II. *Strukturregel zum Aufbau eines indirekten Beweises einer Formel der Form FSI*:

1. In den ersten n Zeilen des Beweises werden $A_1, \ldots, A_n$ nacheinander als Annahmen des Beweises geschrieben.
2. In der $(n+1)$-ten Zeile wird $\sim B$ als Annahme des indirekten Beweises (A. d. i. B.) geschrieben.
3. Bereits bewiesene Theoreme können als neue Zeilen zum Beweis hinzugefügt werden.
4. Auf der Grundlage schon vorhandener Zeilen können zum Beweis neue Zeilen nach den 11 Grundregeln *AR*, *EK*, *BK*, *EA*, *BA*, *EB*, *BB*, *ENa*, *BNa*, *ENk* und *BNk* hinzugefügt werden.
5. Der indirekte Beweis ist beendet, wenn in ihm eine Formel und ihre Negation als Beweiszeilen auftreten. Wir kennzeichnen das durch „Wdspr." (Widerspruch) und Angabe der sich widersprechenden Beweiszeilen.

D1. Eine Formel ist ein **Theorem** im System des natürlichen Schließens genau dann, wenn es für sie einen direkten oder indirekten Beweis gibt. Wenn A ein Theorem ist, so schreiben wir dies abgekürzt mit einem Symbol der Form: $\vdash A$.

5.3 Beweis einiger Theoreme

Als Beispiel beweisen wir direkt das Transitivitätsgesetz der Subjunktion:

T1. $p \supset q \supset (q \supset r \supset (p \supset r))$

1. $p \supset q$	Annahme des Beweises (A. d. B.)
2. $q \supset r$	Annahme des Beweises (A. d. B.)
3. p	Annahme des Beweises (A. d. B.)
4. q	(*AR*, 1., 3.)
5. r	(*AR*, 2., 4.)

Hinter die durchnumerierten Beweiszeilen haben wir jeweils geschrieben, wie man die entsprechenden Beweiszeilen erhält. So gewinnt man die ersten drei Zeilen auf Grund der Strukturregel zum Aufbau eines direkten Beweises als Annahmen des Beweises. Die vierte Zeile erhält man durch *AR* aus der 1. und 3. Zeile und schließlich die fünfte Zeile wiederum nach *AR* aus den Zeilen 2 und 4.

Auch das Kommutationsgesetz der Konjunktion läßt sich direkt beweisen:

T2. $p \wedge q \supset q \wedge p$

1. $p \wedge q$	A. d. B.
2. p	(*BK*, 1.)
3. q	(*BK*, 1.)
4. $q \wedge p$	(*EK*, 3., 2.)

Indirekt beweisen wir das umgekehrte Gesetz der Kontraposition:

T3. $\sim p \supset \sim q \supset (q \supset p)$

1. $\sim p \supset \sim q$	A. d. B.
2. q	A. d. B.
3. $\sim p$	A. d. i. B.
4. $\sim q$	(*AR*, 1., 3.)
(Wdspr. 2., 4.)	

Auch das folgende Theorem wird indirekt bewiesen:

T4. $p \vee q \supset (\sim p \supset q)$

1. $p \vee q$	A. d. B.
2. $\sim p$	A. d. B.
3. $\sim q$	A. d. i. B.
4. q	(BA, 1., 3.)
(Wdspr. 2., 4.)	

Es ist leicht zu sehen, daß man jeden direkten Beweis in einen indirekten Beweis umformen kann. Ist der direkte Beweis geführt, so braucht man nur nach der n-ten Zeile die Annahme des indirekten Beweises $\sim B$ einzuschieben, und man erhält einen Widerspruch zwischen der $(n+1)$-ten Zeile und der letzten Zeile des Beweises, in der ja B steht. Man kommt also beim Aufbau der Aussagenlogik grundsätzlich mit der Strukturregel zum Aufbau des indirekten Beweises aus. Die Strukturregel zum Aufbau des direkten Beweises allein ist bei unserem Aufbau nicht ausreichend.

Methodische Hinweise zum Aufbau eines Beweises:
Zunächst wird in der zu beweisenden Formel der Hauptoperator ermittelt. Ist der Hauptoperator keine Subjunktion, so haben wir keine Annahmen des Beweises. Der Beweis muß dann entweder indirekt, mit Hilfe der Negation der zu beweisenden Formel als Annahme des indirekten Beweises, oder aber mit Hilfe von bereits bewiesenen Theoremen geführt werden. Ist der Hauptoperator eine Subjunktion, so wird das Vorderglied der Subjunktion als Annahme des Beweises geschrieben. Danach wird mit dem Hinterglied der Subjunktion analog verfahren. Sind alle Annahmen des Beweises ermittelt, so müssen wir beim direkten Beweis aus ihnen und bereits bewiesenen Theoremen mit Hilfe der 11 Grundregeln die Formel B ableiten. Gelingt es nicht, einen direkten Beweis zu führen, so nehmen wir noch die Annahme $\sim B$ hinzu und müssen nun mit Hilfe bereits bewiesener Theoreme und der 11 Grundregeln einen Widerspruch herleiten.

Übungen:

1. Illustrieren Sie jede der 11 Schlußregeln durch 2 umgangssprachliche Beispiele!
2. Sind die beiden Schlußregeln für die Adjunktion auch gültig, wenn wir das Zeichen „$\vee$“ als ausschließendes „oder“ („entweder ... oder ...“) der Umgangssprache deuten? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Verwenden Sie das Zeichen $\not\equiv$ als Operator, der das umgangssprachliche „entweder ... oder ...“ symbolisiert, und formulieren Sie für diesen Operator der Disjunktion eine Einführungs- und Beseitigungsregel!
4. Formulieren Sie die beiden direkten Beweise von *T1* und *T2* in indirekte Beweise um!
5. Beweisen Sie die folgenden Theoreme im System des natürlichen Schließens:

   T5. $p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$
   T6. $p \wedge q \wedge r \supset p \wedge (q \wedge r)$
   T7. $\sim\sim p \supset p$
   T8. $p \supset q \supset (\sim q \supset \sim p)$
   T9. $p \wedge q \supset r \supset (p \supset (q \supset r))$
   T10. $p \supset (q \supset r) \supset (p \wedge q \supset r)$
   T11. $p \vee p \supset p$

T12. $\sim(p \wedge \sim p)$
T13. $p \supset \sim\sim p$
T14. $(p \supset q) \wedge \sim q \supset \sim p$
T15. $p \supset (\sim p \supset q)$!

5.4 Theoreme, Theoremschemata und abgeleitete Schlußregeln

T16. $p \equiv q \supset (p \supset q)$

1.	$p \equiv q$	A. d. B.
2.	p	A. d. B.
3.	$p \supset q$	(*BB*, 1.)
4.	q	(*AR*, 2., 3.)

Nach dem gleichen Schema, wie wir *T16* bewiesen haben, läßt sich das der Formel $p \equiv q \supset$ $\supset (p \supset q)$ entsprechende Formelschema $A \equiv B \supset (A \supset B)$ beweisen:

TS16. $A \equiv B \supset (A \supset B)$

1.	$A \equiv B$	A. d. B.
2.	A	A. d. B.
3.	$A \supset B$	(*BB*, 1.)
4.	B	(*AR*, 2., 3.)

Ganz gleich, welche Formeln A und B sind, *TS16* ist immer ein Theorem, das nach dem angegebenen Beweisschema bewiesen werden kann. *TS16* nennen wir das dem Theorem *T16* entsprechende Theoremschema. Allgemein nennen wir den Ausdruck, den man aus einem Theorem erhält, wenn man in ihm für die Aussagenvariablen Formelvariablen einsetzt, und zwar für gleiche Aussagenvariablen gleiche Formelvariablen und für verschiedene Aussagenvariablen verschiedene Formelvariablen, das diesem Theorem entsprechende *Theoremschema*. Es gilt folgendes Metatheorem:

MT1. Zu jedem Theorem läßt sich das entsprechende Theoremschema beweisen.

Ist ein Theoremschema bewiesen, so sind damit alle Formeln der Aussagenlogik bewiesen, die die logische Form dieses Theoremschemas haben. Aus *MT1* ergibt sich unmittelbar die folgende Einsetzungsregel *ER*:

MT2. Wenn $\vdash A$ und a eine Aussagenvariable ist, so $\vdash A\{a/B\}$.

Wir weisen darauf hin, daß die Einsetzungsregel eine Regel ist, nach der man aus Theoremen neue Theoreme erhält, und keine Regel zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis. Mit dem Symbol $A\{a_1, \ldots, a_n/B_1, \ldots, B_n\}$ bezeichnen wir die Formel, die man aus der Formel A erhält, wenn man in ihr für die darin vorkommenden Aussagenvariablen $a_1, \ldots, a_n$ gleichzeitig die Formeln $B_1, \ldots, B_n$ einsetzt (*simultane Einsetzung*). Es gilt folgende simultane Einsetzungsregel:

MT3. Wenn $\vdash A$, so $\vdash A\{a_1, \ldots, a_n/B_1, \ldots, B_n\}$.

Mit *MT2* und *MT3* haben wir zwei Schlußregeln gewonnen, mit deren Hilfe wir aus bereits bewiesenen Theoremen neue Theoreme erhalten. Mit Hilfe von *MT1* läßt sich das folgende Metatheorem beweisen:

MT4. Aus jedem Theorem, das die Subjunktion als Hauptoperator enthält, erhält man mindestens eine abgeleitete Schlußregel zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis.

Beweis: Nach *MT1* ist das dem Theorem entsprechende Theoremschema beweisbar. Dieses habe die folgende Form:

(TS) $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_n \supset B) \ldots) \qquad (n \geq 1).$

In diesem Falle gelten folgende abgeleitete Schlußregeln:

1) $\dfrac{A_1}{A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B) \ldots)}$

2) $\dfrac{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}}{A_3 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B) \ldots)}$

.
.
.

n) $\dfrac{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix}}{B}$.

Treten in einem Beweis die Voraussetzungen dieser Schlußregeln als Beweiszeilen in beliebiger Reihenfolge auf, so schreiben wir *TS* als neue Beweiszeile, und durch i-malige ($i = 1, \ldots, n$) Anwendung der Abtrennungsregel erhalten wir die Folgerung der betreffenden Schlußregel. Aus *T16* erhalten wir beispielsweise folgende Schlußregeln:

1) $\dfrac{A \equiv B}{A \supset B}$

2) $\dfrac{\begin{matrix} A \equiv B \\ A \end{matrix}}{B}$

Die erste Regel ist eine der Beseitigungsregeln für die Bisubjunktion, die zweite ist eine Abtrennungsregel für die Bisubjunktion.

Mit *MT1* und *MT4* haben wir den Zusammenhang zwischen Theoremen, Theoremschemata und abgeleiteten Schlußregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen in allgemeiner Form charakterisiert. Wir werden deshalb die abgeleiteten Schlußregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis im weiteren nicht mehr gesondert formulieren, sondern verweisen in den folgenden Beweisen nur noch auf die ihnen zugrundeliegenden Theoreme.

Beispiel:

T17. $(p \supset q \wedge {\sim}q) \supset {\sim}p$

1.	$p \supset q \wedge {\sim}q$	A. d. B.
2.	${\sim}{\sim}p$	A. d. i. B.
3.	p	(*T7*, 2.)
4.	$q \wedge {\sim}q$	(*AR*, 3., 1.)
5.	q	(*BK*, 4.)
6.	${\sim}q$	(*BK*, 4.)

(Wdspr. 5., 6.)

Aus *T7* ergibt sich als abgeleitete Schlußregel die Beseitigungsregel der doppelten Negation. Diese haben wir beim Übergang von Zeile 2 zu Zeile 3 im Beweis von *T17* benutzt, haben dabei aber nur auf *T7* verwiesen. Da wir mit *T7* die Beseitigungsregel der doppelten Negation zur Verfügung haben, schreiben wir im weiteren, wenn die Annahme eines indirekten Beweises die Form $\sim\sim A$ hat, gleich A als Annahme des indirekten Beweises und sparen damit eine Beweiszeile ein.

Es sei das Theorem *T18* ($p \equiv \sim\sim p$) zu beweisen. Da diese Formel keine Subjunktion als Hauptoperator enthält, haben wir keine Annahmen des Beweises zur Verfügung. Auch die Annahme des indirekten Beweises $\sim(p \equiv \sim\sim p)$ hilft uns nicht weiter, da wir bisher keine Mittel haben, um aus dieser Formel zu schließen. Wir müssen beim Beweis von *T18* also bereits bewiesene Theoreme benutzen:

T18. $p \equiv \sim\sim p$

1.	$p \supset \sim\sim p$	(*T13*)
2.	$\sim\sim p \supset p$	(*T7*)
3.	$p \equiv \sim\sim p$	(*EB*, 1., 2.)

Um ein Theorem der Form $A \equiv B$ zu beweisen, genügt es offenbar immer, die beiden Hilfstheoreme $A \supset B$ und $B \supset A$ zu beweisen und dann mit Hilfe der Regel *EB* die Bisubjunktion einzuführen. Wir vereinbaren deshalb folgende Abkürzung in der Schreibweise: Der Beweis eines Theorems der Form $A \equiv B$ ist beendet, wenn a) $A \supset B$ und b) $B \supset A$ bewiesen sind. Im folgenden Beweis benutzen wir diese Abkürzung:

T19. $p \wedge q \supset r \equiv p \wedge \sim r \supset \sim q$

a)	1.	$p \wedge q \supset r$	A. d. B.
	2.	$p \wedge \sim r$	A. d. B.
	3.	q	A. d. i. B.
	4.	p	(*BK*, 2.)
	5.	$\sim r$	(*BK*, 2.)
	6.	$p \wedge q$	(*EK*, 4., 3.)
	7.	r	(*AR*, 1., 6.)
	(Wdspr. 5., 7.)		
b)	1.	$p \wedge \sim r \supset \sim q$	A. d. B.
	2.	$p \wedge q$	A. d. B.
	3.	$\sim r$	A. d. i. B.
	4.	p	(*BK*, 2.)
	5.	q	(*BK*, 2.)
	6.	$p \wedge \sim r$	(*EK*, 4., 3.)
	7.	$\sim q$	(*AR*, 1., 6.)
	(Wdspr. 5., 7.)		

Wenn eine der Annahmen des Beweises eine Konjunktion $A \wedge B$ ist, so wollen wir auf Grund der Regel *BK* die beiden Glieder der Konjunktion A und B gleich einzeln als Beweiszeilen schreiben. Im folgenden Beweis benutzen wir diese Abkürzung:

T20. $(p \supset r) \wedge (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)$

1.	$p \supset r$	A. d. B.
2.	$q \supset r$	A. d. B.
3.	$p \vee q$	A. d. B.

4. $\sim r$ A. d. i. B.
5. $\sim p$ (*T8*, 1., 4.)
6. $\sim q$ (*T8*, 2., 4.)
7. p (*T4*, 3., 6.)

(Wdspr. 5., 7.)

Übungen:

1. Beweisen Sie *MT1* induktiv über die Beweisbarkeitsstufe!
   Der Begriff der Beweisbarkeitsstufe wird folgendermaßen definiert:
   1) Eine Formel A ist ein Theorem der ersten Beweisbarkeitsstufe genau dann, wenn es einen Beweis der Formel A gibt, in dem nur die 11 Grundregeln verwendet werden und keine bereits bewiesenen Theoreme als Beweiszeilen auftreten.
   2) Eine Formel A ist ein Theorem der n-ten Beweisbarkeitsstufe genau dann, wenn es einen Beweis von A gibt, in dem Theoreme von höchstens $(n-1)$-ter Beweisbarkeitsstufe als Beweiszeilen auftreten und wenn A kein Theorem von kleinerer Beweisbarkeitsstufe als n ist.

   Aus dieser Definition und der Definition eines Theorems folgt:
   Eine Formel A ist genau dann ein Theorem, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß A ein Theorem n-ter Beweisbarkeitsstufe ist.
2. Beweisen Sie *MT2*!
3. Nehmen Sie folgende simultane Einsetzung $A\{a_1, \ldots, a_n/B_1, \ldots, B_n\}$ vor:
   A sei $p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$
   a_1 sei p
   a_2 sei q
   a_3 sei r
   B_1 sei $r \supset q$
   B_2 sei $r \supset p$
   B_3 sei $p \supset q$!
   Wie gelangt man durch einfache Einsetzung zur gleichen Formel $A\{a_1, \ldots, a_n/B_1, \ldots, B_n\}$?
4. Beweisen Sie *MT3* mit Hilfe von *MT2*!
5. Formulieren Sie alle abgeleiteten Schlußregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis, die sich aus den Theoremen *T3*, *T4*, *T5*, *T7*, *T8*, *T13*, *T14* und *T15* ergeben!
6. Formulieren Sie das Theorem *T21*, das benötigt wird, um die folgende Schlußregel zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis zu rechtfertigen:

$$\frac{\begin{array}{c} A \equiv B \\ B \end{array}}{A}$$

5.5 Einige abgeleitete Strukturregeln im System des natürlichen Schließens

RI. *Regel zum Hinzufügen einer Subjunktion zum Beweis auf Grund einer zusätzlichen Annahme*:

Erhält man in einem Beweis aus den Annahmen dieses Beweises und aus einer beliebigen zusätzlichen Annahme (z. A.) A_i die Formel A_j, so kann man die Formel $A_i \supset A_j$ als neue Zeile zum Beweis hinzufügen. Die zusätzliche Annahme und alle Beweiszeilen, die man mit ihrer Hilfe erhält, werden doppelt numeriert. Alle doppelt numerierten Zeilen dürfen im weiteren Beweis nicht benutzt werden. Diese Festlegung gilt für die Regeln *RI-RIII*.

Beweis von *RI*:
Beim indirekten Beweis eines Theorems T $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)$ wird mit Hilfe der zusätzlichen Annahme C_i die Formel C_j gewonnen und $C_i \supset C_j$ als neue Zeile zum Beweis hinzugefügt. Der Anfang des Beweises von T hat dann folgende Form:

1.	A_1	A. d. B.
.	.	
.	.	
.	.	
n.	A_n	
$n+1$.	$\sim B$	A. d. i. B.
$n+2$.	...	
.	.	
.---	.-------	
.	.	
m.	...	
1.1.	C_i	z. A.
.---	.-------	
1.k.	C_j	
$m+1$.	$C_i \supset C_j$	(1.1. $\supset$ 1.k.)
.---	.-------	

(Im Falle eines direkten Beweises fehlt die n+1. Zeile)

Die Zeilen 1.-m., 1.1.-1.k. stellen (bei anderer Numerierung und Erläuterung) einen direkten Beweis des folgenden Theorems T' dar: $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_n \supset (\sim B \supset (C_i \supset C_j)))\ldots)$ ($\sim B$ fehlt, wenn T direkt bewiesen wird).

Ohne Anwendung von *RI* erhalten wir die Zeile $C_i \supset C_j$ im Beweis von T, wenn wir vorher das Theorem T' beweisen und als neue Zeile zum Beweis von T hinzufügen. Denn durch n+1-malige (beim direkten Beweis von T n-malige) Anwendung der Abtrennungsregel auf T' und die ersten n+1 (bzw. n) Beweiszeilen (A. d. B., A. d. i. B.) erhalten wir die Formel $C_i \supset C_j$.

Anwendungsbeispiel:

T22. $p \supset q \wedge r \supset (p \supset q) \wedge (p \supset r)$

1.	$p \supset q \wedge r$	A. d. B.
1.1.	p	z. A.
1.2.	$q \wedge r$	(*AR*, 1., 1.1.)
1.3.	q	(*BK*, 1.2.)
1.4.	r	(*BK*, 1.2.)
2.	$p \supset q$	(*RI*, 1.1.$\supset$1.3.)
3.	$p \supset r$	(*RI*, 1.1.$\supset$1.4.)
4.	$(p \supset q) \wedge (p \supset r)$	(*EK*, 2., 3.)

RII. *Regel zur Einführung der Negation einer zusätzlichen Annahme*:

Erhält man in einem Beweis aus einer zusätzlichen Annahme zwei sich widersprechende Formeln, so kann man die Negation dieser zusätzlichen Annahme als neue Zeile zum Beweis hinzufügen.

Beweis von Regel *RII*:
Angenommen, in einem Beweis erhält man mit Hilfe der zusätzlichen Annahme A_i die beiden sich widersprechenden Formeln A_j und $\sim A_j$ als Beweiszeilen. Nach der Regel *EK* können wir dann die Formel $A_j \wedge \sim A_j$ und nach Regel *RI* die Formel $A_i \supset A_j \wedge \sim A_j$ zum Beweis hinzufügen. Nach *T17* erhalten wir hieraus die Formel $\sim A_i$.

Anwendungsbeispiel:

T23. $\sim(p \vee q) \supset \sim p \wedge \sim q$

1.	$\sim(p \vee q)$	A. d. B.
1.1.	p	z. A.
1.2.	$p \vee q$	(*EA*, 1.1.)
2.	$\sim p$	(*RII*, 1.1.$\supset$Wdspr. (1., 1.2.))
2.1.	q	z. A.
2.2.	$p \vee q$	(*EA*, 2.1.)
3.	$\sim q$	(*RII*, 2.1.$\supset$Wdspr. (1., 2.2.))
4.	$\sim p \wedge \sim q$	(*EK*, 2., 3.)

RIII. *Regel des verzweigten Beweises mit Hilfe zusätzlicher Annahmen*:

1. Der direkte Beweis einer Formel $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)$ ist beendet, wenn eine Adjunktion $C_i \vee C_j$ eine Zeile des Beweises ist, und wenn man die Formel B auf Grund jeder der zusätzlichen Annahmen C_i und C_j erhält.
2. Der indirekte Beweis einer Formel $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)$ ist beendet, wenn eine Adjunktion $C_i \vee C_j$ eine Zeile des Beweises ist, und wenn man auf Grund jeder der zusätzlichen Annahmen C_i und C_j zwei sich widersprechende Beweiszeilen erhält.

Beweis von *RIII*.1:
Angenommen, wir erhalten auf Grund jeder der zusätzlichen Annahmen A_i und A_j die Formel B als Beweiszeile, dann können wir nach *RI* die Formeln $A_i \supset B$ und $A_j \supset B$ als neue Beweiszeile schreiben. Nach der Regel *EK* erhalten wir $(A_i \supset B) \wedge (A_j \supset B)$ und nach *T20* mit der Zeile $A_i \vee A_j$ durch zweimalige Anwendung von *AR* schließlich die Formel B.

Beweis von *RIII*.2:
Angenommen, wir erhalten auf Grund der zusätzlichen Annahmen A_i und A_j zwei sich widersprechende Beweiszeilen. Nach *RII* können wir dann die Formeln $\sim A_i$ und $\sim A_j$ als neue Beweiszeilen schreiben. Aus der Zeile $A_i \vee A_j$ und $\sim A_i$ erhalten wir dann nach der Regel *BA* die Formel A_j. Da auch $\sim A_j$ als Beweiszeile auftritt, ist der indirekte Beweis beendet.

Anwendungsbeispiele:

T24. $p \supset q \supset (p \vee r \supset q \vee r)$

1.	$p \supset q$	A. d. B.
2.	$p \vee r$	A. d. B.
1.1.	p	z. A.
1.2.	q	(*AR*, 1.1., 1.)
1.3.	$q \vee r$	(*EA*, 1.2.)
2.1.	r	z. A.
2.2.	$q \vee r$	(*EA*, 2.1.)
3.	$q \vee r$	(*RIII*.1, 2., 1.1.$\supset$1.3., 2.1.$\supset$2.2.)

T25. $(p_1 \supset q) \wedge (p_2 \supset r) \wedge \sim(q \vee r) \supset \sim(p_1 \vee p_2)$

1.	$p_1 \supset q$	A. d. B.
2.	$p_2 \supset r$	A. d. B.
3.	$\sim(q \vee r)$	A. d. B.
4.	$p_1 \vee p_2$	A. d. i. B.
1.1.	p_1	z. A.
1.2.	q	(AR, 1.1., 1.)
1.3.	$q \vee r$	(EA, 1.2.)
2.1.	p_2	z. A.
2.2.	r	(AR, 2.1., 2.)
2.3.	$q \vee r$	(EA, 2.2.)
	Wdspr. (*RIII.* 2., 1.1.$\supset$Wdspr. (1.3., 3.), 2.1.$\supset$Wdspr. (2.3., 3.))	

Übungen:

1. Beweisen Sie *T22* ohne Anwendung von *RI*!
2. Beweisen Sie *T23* ohne Anwendung von *RI* und *RII*!
3. Beweisen Sie die Theoreme *T24* und *T25* ohne die Regeln *RI*-*RIII*!
4. Beweisen Sie die folgenden Theoreme:

   T26. $p \vee \sim p$
   T27. $p \equiv p$
   T28. $(p \equiv q) \supset (q \equiv p)$
   T29. $(p \equiv q) \wedge (q \equiv r) \supset (p \equiv r)$
   T30. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   T31. $p \vee q \equiv q \vee p$
   T32. $p \wedge q \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
   T33. $p \vee q \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
   T34. $p \supset q \equiv \sim p \vee q$
   T35. $(p \equiv q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
   T36. $p \mid q \equiv \sim p \vee \sim q$
   T37. $p \dagger q \equiv \sim p \wedge \sim q$
   T38. $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
   T39. $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$!

5.6 Ersetzbarkeitstheorem für die Bisubjunktion

Beim wahrheitsfunktionalen Aufbau der Aussagenlogik haben wir das Ersetzbarkeitstheorem für Äquivalenzen kennengelernt. Ein analoges Ersetzbarkeitstheorem gilt im System des natürlichen Schließens für Bisubjunktionen. Zum Beweis dieses Ersetzbarkeitstheorems benötigen wir folgende Theoreme:

T40. $(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$
T41. $(p_1 \equiv q_1) \wedge (p_2 \equiv q_2) \supset (p_1 \wedge p_2 \equiv q_1 \wedge q_2)$
T42. $(p_1 \equiv q_1) \wedge (p_2 \equiv q_2) \supset (p_1 \vee p_2 \equiv q_1 \vee q_2)$
T43. $(p_1 \equiv q_1) \wedge (p_2 \equiv q_2) \supset (p_1 \mid p_2 \equiv q_1 \mid q_2)$

T44. $(p_1 \equiv q_1) \wedge (p_2 \equiv q_2) \supset (p_1 \dagger p_2 \equiv q_1 \dagger q_2)$
T45. $(p_1 \equiv q_1) \wedge (p_2 \equiv q_2) \supset (p_1 \supset p_2 \equiv q_1 \supset q_2)$
T46. $(p_1 \equiv q_1) \wedge (p_2 \equiv q_2) \supset ((p_1 \equiv p_2) \equiv (q_1 \equiv q_2))$

Wir beweisen nur einige dieser Theoreme. Die Beweise der übrigen sind als Übungsaufgaben gestellt.

T40. $(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$

1.	$p \equiv q$	A. d. B.
2.	$p \supset q$	(*BB*, 1.)
3.	$q \supset p$	(*BB*, 1.)
4.	$\sim q \supset \sim p$	(*T8*, 2.)
5.	$\sim p \supset \sim q$	(*T8*, 3.)
6.	$\sim p \equiv \sim q$	(*EB*, 4., 5.)

T41. $(p_1 \equiv q_1) \wedge (p_2 \equiv q_2) \supset (p_1 \wedge p_2 \equiv q_1 \wedge q_2)$

1.	$p_1 \equiv q_1$	A. d. B.
2.	$p_2 \equiv q_2$	A. d. B.
3.	$p_1 \supset q_1$	(*BB*, 1.)
4.	$q_1 \supset p_1$	(*BB*, 1.)
5.	$p_2 \supset q_2$	(*BB*, 2.)
6.	$q_2 \supset p_2$	(*BB*, 2.)
1.1.	$p_1 \wedge p_2$	z. A.
1.2.	p_1	(*BK*, 1.1.)
1.3.	p_2	(*BK*, 1.1.)
1.4.	q_1	(*AR*, 1.2., 3.)
1.5.	q_2	(*AR*, 1.3., 5.)
1.6.	$q_1 \wedge q_2$	(*EK*, 1.4., 1.5.)
7.	$p_1 \wedge p_2 \supset q_1 \wedge q_2$	(*RI*, 1.1.$\supset$1.6.)
2.1.	$q_1 \wedge q_2$	z. A.
2.2.	q_1	(*BK*, 2.1.)
2.3.	q_2	(*BK*, 2.1.)
2.4.	p_1	(*AR*, 4., 2.2.)
2.5.	p_2	(*AR*, 6., 2.3.)
2.6.	$p_1 \wedge p_2$	(*EK*, 2.4., 2.5.)
8.	$q_1 \wedge q_2 \supset p_1 \wedge p_2$	(*RI*, 2.1.$\supset$2.6.)
9.	$p_1 \wedge p_2 \equiv q_1 \wedge q_2$	(*EB*, 7., 8.)

T43. $(p_1 \equiv q_1) \wedge (p_2 \equiv q_2) \supset (p_1 \mid p_2 \equiv q_1 \mid q_2)$

1.	$p_1 \equiv q_1$	A. d. B.
2.	$p_2 \equiv q_2$	A. d. B.
3.	$p_1 \supset q_1$	(*BB*, 1.)
4.	$q_1 \supset p_1$	(*BB*, 1.)
5.	$p_2 \supset q_2$	(*BB*, 2.)
6.	$q_2 \supset p_2$	(*BB*, 2.)
1.1.	$p_1 \mid p_2$	z. A.
1.2.	$\sim p_1 \vee \sim p_2$	(*BNa*, 1.1.)

1.1.1.	$\sim p_1$	z. A.
1.1.2.	$\sim q_1$	(*T8*, 4., 1.1.1.)
1.1.3.	$\sim q_1 \vee \sim q_2$	(*EA*, 1.1.2.)
1.1.4.	$q_1 \mid q_2$	(*ENa*, 1.1.3.)
2.1.1.	$\sim p_2$	z. A.
2.1.2.	$\sim q_2$	(*T8*, 6., 2.1.1.)
2.1.3.	$\sim q_1 \vee \sim q_2$	(*EA*, 2.1.2.)
2.1.4.	$q_1 \mid q_2$	(*ENa*, 2.1.3.)
1.3.	$q_1 \mid q_2$	(*RIII*, 1.2., 1.1.1.$\supset$1.1.4., 2.1.1.$\supset$2.1.4.)
7.	$p_1 \mid p_2 \supset q_1 \mid q_2$	(*RI*, 1.1.$\supset$1.3.)
2.1.	$q_1 \mid q_2$	z. A.
2.2.	$\sim q_1 \vee \sim q_2$	(*BNa*, 2.1.)
3.2.1.	$\sim q_1$	z. A.
3.2.2.	$\sim p_1$	(*T8*, 3.2.1., 3.)
3.2.3.	$\sim p_1 \vee \sim p_2$	(*EA*, 3.2.2.)
3.2.4.	$p_1 \mid p_2$	(*ENa*, 3.2.3.)
4.2.1.	$\sim q_2$	z. A.
4.2.2.	$\sim p_2$	(*T8*, 4.2.1., 5.)
4.2.3.	$\sim p_1 \vee \sim p_2$	(*EA*, 4.2.2.)
4.2.4.	$p_1 \mid p_2$	(*ENa*, 4.2.3.)
2.3.	$p_1 \mid p_2$	(*RIII*, 2.2., 3.2.1.$\supset$3.2.4., 4.2.1.$\supset$4.2.4.)
8.	$q_1 \mid q_2 \supset p_1 \mid p_2$	(*RI*, 2.1.$\supset$2.3.)
9.	$p_1 \mid p_2 \equiv q_1 \mid q_2$	(*EB*, 7., 8.)

MT1. (Ersetzbarkeitstheorem für die Bisubjunktion) Wenn $\vdash A \equiv B$, so $\vdash C \equiv C[A/B]$.

Den Beweis führen wir ganz ananlog dem Beweis des Ersetzbarkeitstheorems für die Äquivalenz im Abschnitt 11 des vierten Kapitels. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit von *MT1* können wir uns im Beweis wieder auf den Fall beschränken, daß A an genau einer Stelle seines Vorkommens in C durch B ersetzt wird. Für den Fall, daß A an null Stellen ersetzt wird, gilt *MT1* offensichtlich, da dann C und $C[A/B]$ die gleichen Formeln sind. Wird A an mehreren Stellen durch B ersetzt, so erhält man dasselbe Ergebnis durch mehrmalige Anwendung des eingeschränkten Metatheorems. Der Beweis von *MT1* wird induktiv über die Anzahl der logischen Operatoren in C geführt. Es ist offensichtlich, daß das Ersetzbarkeitstheorem für den Fall gilt, wenn C die Formel A ist und an genau einer Stelle ersetzt wird. Dieser Fall wird im weiteren Beweis nicht mehr berücksichtigt.

Anfangsschritt: C enthält null Operatoren, ist also eine Aussagenvariable a. Wenn man an genau einer Stelle A durch B ersetzt, so ist A die Variable a, C ist die gleiche Variable a, und $C[A/B]$ ist die Formel B. *MT1* gilt für diesen Fall auf Grund der Voraussetzung des Metatheorems.

Induktionsannahme: *MT1* gilt für alle Formeln, die weniger als n Operatoren enthalten ($n \geq 1$).

Induktionsschritt: Es gilt zu zeigen, daß *MT1* für die beliebige Formel C mit n Operatoren gilt.

C kann dann nach der Formeldefinition nur eine der folgenden Formen haben:

1) $\sim D$
2) $D \wedge E$
3) $D \vee E$
4) $D \supset E$
5) $D \equiv E$
6) $D \mid E$
7) $D \dagger E$

In allen sieben Fällen enthalten die Formeln D und E weniger als n Operatoren, und nach der Induktionsvoraussetzung gilt unter der Bedingung, daß $\vdash A \equiv B$:

$\vdash D \equiv D[A/B]$
$\vdash E \equiv E[A/B]$.

Im ersten Fall erhalten wir nach *T40*, daß dann auch gilt

$\vdash \sim D \equiv \sim D[A/B]$, also
$\vdash C \equiv C[A/B]$.

Im zweiten Fall kann die eine Ersetzung von A durch B entweder in der Teilformel D oder in der Teilformel E vorgenommen werden, falls nicht die gesamte Formel ersetzt wird. Auf Grund von *T27* gelten $\vdash D \equiv D$ und $\vdash E \equiv E$. Aus diesen Theoremen und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir nach *T41*:

$\vdash D \wedge E \equiv (D \wedge E)[A/B]$.

Wir erinnern daran, daß $D \wedge E[A/B]$ und $D[A/B] \wedge E$ dieselben Formeln sind wie $(D \wedge E)[A/B]$.

Analog erhalten wir die Behauptungen des Metatheorems in den Fällen 3-7 nach den Theoremen *T42-T46*.

MT2. Wenn $\vdash A \equiv B$ und $\vdash C$, so $\vdash C[A/B]$.

MT2 folgt unmittelbar aus *MT1* nach der Abtrennungsregel für die Bisubjunktion.

Übungen:

1. Beweisen Sie mit Hilfe von *MT1* und der entsprechenden Theoreme *MT3*: Im System des natürlichen Schließens gilt für eine beliebige Formel A: $\vdash A \equiv B$, wobei B eine zu A äquivalente Formel in der konjunktiven Normalform ist!
2. Wiederholen Sie zunächst Abschnitt 12 und Abschnitt 13 des vierten Kapitels! Benutzen Sie die Ergebnisse von Übung 4 zu Abschnitt 5! Beweisen Sie die folgenden Theoreme:

   T47. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   T48. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$!

5.7 Widerspruchsfreiheit des Systems des natürlichen Schließens

D1. Ein deduktives Logiksystem nennen wir **widerspruchsfrei bezüglich der Negation** $\sim$ genau dann, wenn es keine Formel A derart gibt, daß sowohl A als auch $\sim A$ in dem System beweisbar sind.

D2. Ein deduktives Logiksystem nennen wir **absolut widerspruchsfrei** genau dann, wenn nicht alle Formeln des Systems beweisbar sind.

In der Logik sind noch andere Widerspruchsfreiheitsbeweise üblich (vgl. Sinowjew/Wessel 1975). Wir beschränken uns hier auf den Beweis der Widerspruchsfreiheit des Systems des natürlichen Schließens im Sinne von *D1* und *D2*. Dazu beweisen wir vorbereitend das folgende Metatheorem:

MT1. Alle Theoreme des Systems des natürlichen Schließens sind Tautologien.

Beweis: Wir beweisen *MT1* induktiv über die Beweisbarkeitsstufe eines beliebigen Theorems A (zum Begriff der Beweisbarkeitsstufe vgl. Übung 1 zu Abschnitt 4). Innerhalb des Induktionsbeweises gehen wir indirekt vor, d. h., wir nehmen an, A sei ein Theorem und keine Tautologie und führen diese Annahme zum Widerspruch. Im Anfangsschritt des Induktionsbeweises zeigen wir, daß gilt: Alle Theoreme der ersten Beweisbarkeitsstufe sind Tautologien.

Annahme des indirekten Beweises: A sei ein Theorem der ersten Beweisbarkeitsstufe und keine Tautologie. A habe die Form

$A_1 \supset (A_2 \supset ... \supset (A_n \supset B)...)$ $(n \geq 0)$.

Da A ein Theorem der ersten Beweisbarkeitsstufe ist, gibt es für A einen indirekten Beweis, in dem nur die 11 Grundregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis verwendet werden. In diesem indirekten Beweis werden aus den Annahmen des Beweises $A_1, \ldots, A_n$ und der Annahme des indirekten Beweises $\sim B$ mit Hilfe der 11 Grundregeln die beiden sich widersprechenden Beweiszeilen C und $\sim C$ gewonnen. Da A auf Grund der Annahme des indirekten Beweises keine Tautologie ist, gibt es eine Wertkombination für die in A vorkommenden Variablen, bei der $A = f$. Das ist offenbar nur dann der Fall, wenn $A_1 = v$, $A_2 = v$, $\ldots$, $A_n = v$ und $B = f$. In diesem Falle gilt $\sim B = v$. Bei dieser Wertkombination für die in A vorkommenden Variablen haben also alle Annahmen des Beweises, einschließlich der Annahme des indirekten Beweises $\sim B$ den Wert v. Für die 11 Grundregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis gilt: Wenn die Voraussetzungen dieser Regeln bei einer bestimmten Wertkombination der in ihnen vorkommenden Variablen den Wert v haben, so haben bei dieser Wertkombination auch die Folgerungen dieser Regeln den Wert v. Da alle Annahmen des Beweises bei dieser Wertkombination den Wert v haben und eine Anwendung der 11 Grundregeln in diesem Fall nur zu Formeln führt, die den Wert v haben, müßten die Formeln C und $\sim C$ beide den Wert v haben. Das ist aber auf Grund der semantischen Definition der Negation nicht möglich.

Induktionsannahme: Alle Theoreme von einer Beweisbarkeitsstufe kleiner als n sind Tautologien.

Induktionsschritt: Der Induktionsschritt unterscheidet sich nur unwesentlich vom Anfangsschritt. Hier können auch Theoreme von geringerer Stufe als n als Zeilen zum Beweis hinzugefügt werden. Diese Theoreme sind aber auf Grund der Induktionsannahme Tautologien und haben also insbesondere bei der betrachteten Wertkombination den Wert v. Ansonsten wird wie im Anfangsschritt argumentiert.

MT2. Das System des natürlichen Schließens ist widerspruchsfrei bezüglich der Negation.

Beweis: Wir beweisen *MT2* indirekt und nehmen an, es gibt eine Formel A derart, daß A und $\sim A$ Theoreme sind. Auf Grund von *MT1* müßten A und $\sim A$ dann Tautologien sein, dies ist aber auf Grund der semantischen Definition der Negation nicht möglich.

MT3. Das System des natürlichen Schließens ist absolut widerspruchsfrei.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus *MT2*.

Übung:

Beweisen Sie explizit, daß die 11 Grundregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis von Voraussetzungen, die bei einer bestimmten Wertkombination für die in ihnen vorkommenden Variablen den Wert v haben, stets zu Folgerungen führen, die bei dieser Wertkombination auch den Wert v haben! (Stellen Sie die den Regeln zugrundeliegenden Theoreme auf und zeigen Sie, daß diese Tautologien sind!)

5.8 Semantische Vollständigkeit des Systems des natürlichen Schließens

D1. Ein deduktives System der Aussagenlogik nennen wir **semantisch vollständig** genau dann, wenn alle Tautologien der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik in ihm beweisbar sind.

Wir führen den Beweis der semantischen Vollständigkeit des Systems des natürlichen Schließens schrittweise über eine Reihe von Metatheoremen.

MT1. Jede tautologische elementare Adjunktion ist im System des natürlichen Schließens beweisbar.

Beweis: Jede tautologische elementare Adjunktion enthält eine Aussagenvariable und deren Negat und fällt unter folgendes Formelschema:

(1) $b_1 \vee \ldots \vee b_k \vee a_1 \vee c_1 \vee \ldots \vee c_l \vee a_2 \vee d_1 \vee \ldots \vee d_m$,

wobei $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$, alle a_i, b_i, c_i und d_i Aussagenvariablen oder einmal negierte Aussagenvariablen sind und wobei gilt: Wenn a_1 eine Aussagenvariable ist, so ist a_2 das Negat dieser Aussagenvariablen, und wenn a_1 das Negat einer Aussagenvariablen ist, so ist a_2 die betreffende Aussagenvariable. Mit Hilfe der de Morganschen Regeln und des Ersetzbarkeitstheorems erhält man (1) aus

(2) $\sim(\sim b_1 \wedge \ldots \wedge \sim b_k \wedge \sim a_1 \wedge \sim c_1 \wedge \ldots \wedge \sim c_l \wedge \sim a_2 \wedge \sim d_1 \wedge \ldots \wedge \sim d_m)$.

Für (2) gibt es einen einfachen indirekten Beweis:

1.	$\sim b_1 \wedge \ldots \wedge \sim b_k \wedge \sim a_1 \wedge \sim c_1 \wedge \ldots \wedge \sim c_l \wedge \sim a_2 \wedge \sim d_1 \wedge \ldots \wedge \sim d_m$	A. d. i. B.
2.	$\sim a_1$	(*BK*, 1.)
3.	$\sim a_2$	(*BK*, 1.)

(Wdspr. 2., 3.)

MT2. Jede tautologische konjunktive Normalform ist im System des natürlichen Schließens beweisbar.

Beweis: *MT2* gilt auf Grund von *MT1* und der Einführunsregel der Konjunktion.

MT3. Im System des natürlichen Schließens gilt für eine beliebige Formel A: $\vdash A \equiv B$, wobei B eine zu A äquivalente Formel in der konjunktiven Normalform ist.

Beweis: Vgl. Übung zu Abschnitt 6!

MT4. Wenn $\vdash A \equiv B$, so $A \approx B$.

Beweis: Wenn die Formel $A \equiv B$ beweisbar ist, so ist sie auf Grund von *MT1* des vorigen Abschnitts eine Tautologie. Wenn $A \equiv B$ eine Tautologie ist, so sind die beiden Formeln A und B auf Grund der semantischen Definition von $\equiv$ äquivalent.

MT5. Wenn $\vdash A \equiv B$, und wenn A eine Tautologie ist, so ist B eine Tautologie.

MT5 folgt unmittelbar aus *MT4*.

MT6. Wenn A eine Tautologie ist, so $\vdash A$ (Theorem der semantischen Vollständigkeit).

Beweis: Nach *MT3* gilt $\vdash A \equiv B$, wobei B eine Formel in der konjunktiven Normalform ist. Da A eine Tautologie ist, ist nach *MT5* auch B eine Tautologie. Dann ist nach *MT2* B beweisbar. Aus $\vdash A \equiv B$ und $\vdash B$ erhalten wir nach *T21* $\vdash A$.

Übungen:

In den folgenden Aufgaben bauen wir ein anderes System des natürlichen Schließens auf. Wir nennen es das *System AR*, während wir das bisher betrachtete System mit *NSch* abkürzen.

1. Im System AR haben wir folgendes Alphabet: p, q, r ohne und mit Indizes als Aussagenvariablen, die Operatoren $\sim$ und $\supset$, sowie Klammern. Formulieren Sie die Formeldefinition für AR!
2. Definieren Sie die Operatoren $\vee$, $\wedge$, $\equiv$, $|$ und $\dagger$ im System AR! Benutzen Sie im Definiens neben den Variablen nur die Operatoren $\sim$ und $\supset$!
3. Im System AR haben wir als einzige Grundregel zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis die Abtrennungsregel. Formulieren Sie die Strukturregel zum Aufbau eines indirekten Beweises!
4. Im System AR setzen wir die folgende Ersetzbarkeitsregel für definitionsgleiche Formeln

   (DR) Wenn $A \equiv_{Def} B$ und $\vdash C$, so $\vdash C[B/A]$.

   Beweisen Sie, daß im System AR außer der Abtrennungsregel alle Grundregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis des Systems *NSch* abgeleitete Regeln sind! Hinweis zur Lösung: Formulieren Sie die Regeln von *NSch* mit Hilfe der Definitionen aus Übung 2 und *DR* nur mit Hilfe der Operatoren $\sim$ und $\supset$, und beweisen Sie die den Regeln zugrundeliegenden Theoreme in AR!

   Hierbei werden folgende Theoreme benötigt:

   1) $p \supset (q \supset p)$
   2) $p \supset (\sim p \supset q)$
   3) $\sim\sim p \supset p$
   4) $\sim p \supset q \supset (\sim q \supset p)$
   5) $p \supset (q \supset \sim(p \supset \sim q))$
   6) $\sim(p \supset \sim q) \supset p$
   7) $\sim(p \supset \sim q) \supset q$
   8) $p \supset q \supset (q \supset p \supset \sim(p \supset q \supset \sim(q \supset p)))$
   9) $\sim(p \supset q \supset \sim(q \supset p)) \supset (p \supset q)$
   10) $\sim(p \supset q \supset \sim(q \supset p)) \supset (q \supset p)$
   11) $\sim p \supset (p \supset \sim q)$
   12) $p \supset p$
   13) $\sim(\sim p \supset q) \supset \sim p$
   14) $\sim(\sim p \supset q) \supset \sim q$
   15) $\sim p \supset (\sim q \supset \sim(\sim p \supset q))$.
5. Beweisen Sie die Widerspruchsfreiheit von AR!
6. Man nennt zwei logische Systeme *deduktiv äquivalent*, wenn in ihnen die gleiche Klasse von Theoremen beweisbar ist. Zeigen Sie, daß die Systeme *NSch* und AR deduktiv äquivalent sind und daß damit das System AR semantisch vollständig ist!

5.9 Anwendung des natürlichen Schließens

Die 11 Grundregeln und alle abgeleiteten Schlußregeln der Aussagenlogik können in beliebigen Wissensbereichen zum logischen Schließen aus bestimmten Voraussetzungen verwendet werden. Wir betrachten im folgenden einige einfache Beispiele:

1. Aufgabe: Aus den Voraussetzungen

(1) Paul oder Michael haben heute Geburtstag.
(2) Wenn Paul heute Geburtstag hat, bekommt er heute einen Fotoapparat.
(3) Wenn Michael heute Geburtstag hat, bekommt er heute ein Briefmarkenalbum.
(4) Michael bekommt heute kein Briefmarkenalbum.

ist der Satz „Paul hat heute Geburtstag“ zu erschließen!
Lösung:

1.	$p \vee q$	Voraussetzung
2.	$p \supset r$	Voraussetzung
3.	$q \supset s$	Voraussetzung
4.	$\sim s$	Voraussetzung
5.	$\sim q$	(*T8*, 4., 3.)
6.	p	(*BA*, 5., 1.)

2. Aufgabe: Voraussetzungen:

(1) Wenn Inge Französisch studiert, studiert sie auch Latein oder Spanisch.
(2) Inge studiert nicht Latein.
(3) Inge studiert Französisch oder Latein oder Spanisch.

Frage: Studiert Inge Spanisch?
Lösung:

1.	$p \supset q \vee r$	Voraussetzung
2.	$\sim q$	Voraussetzung
3.	$p \vee q \vee r$	Voraussetzung
4.	$\sim r$	A. d. i. B.
5.	$p \vee q$	(*BA*, 3., 4.)
6.	p	(*BA*, 5., 2.)
7.	$q \vee r$	(*AR*, 6., 1.)
8.	q	(*BA*, 7., 4.)

(Wdspr. 2., 8.)
Also gilt r.

Die folgende Aufgabe ist rein aussagenlogisch nicht lösbar, da im Beweis Einsetzungen für Zahlenvariablen vorgenommen werden müssen (vgl. Zeile 10 und 23 des folgenden Beweises). Deshalb werden in ihr die logisch einfachen Aussagen nicht durch Aussagenvariablen symbolisiert, sondern in der Symbolisierung wird die innere logische Struktur der einfachen Aussagen berücksichtigt.

3. Aufgabe: Das mathematische Theorem $(a > b) \wedge \sim(c = 0) \supset \sim(ac = bc)$ ist aus den folgenden drei Theoremen abzuleiten.

1.	$(a > b) \wedge (c > 0) \supset (ac > bc)$	Voraussetzung
2.	$(a > b) \wedge (c < 0) \supset (ac < bc)$	Voraussetzung
3.	$\sim(a = b) \equiv (a > b) \vee (a < b)$	Voraussetzung
4.	$(a > b) \wedge \sim(c = 0)$	A. d. B.
5.	$ac = bc$	A. d. i. B.
6.	$a > b$	(*BK*, 4.)
7.	$\sim(c = 0)$	(*BK*, 4.)
8.	$\sim(a = b) \supset (a > b) \vee (a < b)$	(*BB*, 3.)
9.	$(a > b) \vee (a < b) \supset \sim(a = b)$	(*BB*, 3.)
10.	$(ac > bc) \vee (ac < bc) \supset \sim(ac = bc)$	(Einsetzung von ac für a und bc für b in 9.)
11.	$\sim((ac > bc) \vee (ac < bc))$	(Kontraposition, 5., 10.)
12.	$\sim(ac > bc) \wedge \sim(ac < bc)$	(*T23*, 11.)
13.	$\sim(ac > bc)$	(*BK*, 12.)
14.	$\sim(ac < bc)$	(*BK*, 12.)
15.	$\sim((a > b) \wedge (c > 0))$	(*T8*, 13., 1.)
16.	$\sim((a > b) \wedge (c < 0))$	(*T8*, 14., 2.)
17.	$\sim(a > b) \vee \sim(c > 0)$	(*T47*, 15.)
18.	$\sim(a > b) \vee \sim(c < 0)$	(*T47*, 16.)
19.	$\sim(c > 0)$	(*BA*, 6., 17.)
20.	$\sim(c < 0)$	(*BA*, 6., 18.)
21.	$\sim(c > 0) \wedge \sim(c < 0)$	(*EK*, 19., 20.)
22.	$\sim((c > 0) \vee (c < 0))$	(*T48*, 21.)
23.	$\sim(c = 0) \supset (c > 0) \vee (c < 0)$	(Einsetzung von c für a und 0 für b in 8.)
24.	$(c > 0) \vee (c < 0)$	(*AR*, 7., 23.)

(Wdspr. 22., 24.)

Symbolisieren Sie die Voraussetzungen und die Folgerung der folgenden Schlüsse und leiten Sie die symbolisierte Folgerung aus den symbolisierten Prämissen ab!

4. Aufgabe: Voraussetzungen

(1) Im olympischen Eishockeyturnier gewinnt die ČSSR oder die UdSSR die Goldmedaille.
(2) Die ČSSR gewinnt die Goldmedaille genau dann, wenn die ČSSR gegen Schweden gewinnt und die UdSSR gegen Kanada verliert oder unentschieden spielt oder wenn die ČSSR gegen Schweden unentschieden spielt und die UdSSR gegen Kanada verliert.
(3) Die ČSSR spielt gegen Schweden unentschieden.
(4) Die UdSSR spielt gegen Kanada unentschieden.

Frage: Wer gewinnt die Goldmedaille?

5. Aufgabe: Zeigen Sie, daß aus den Voraussetzungen

(1) Wenn das klassische Additionstheorem der Geschwindigkeiten gilt und sich das Licht im Universum in allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit ausbreitet, so breitet es sich auf der Erde nicht in allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit aus.
(2) Das Licht breitet sich im Universum in allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit aus.
(3) Das Licht breitet sich auf der Erde in allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit aus.

folgt, daß das klassische Additionstheorem der Geschwindigkeit nicht gilt!

6. Aufgabe: In seiner Funktion als Gouverneur sollte Sancho Pansa folgendes Problem entscheiden: Ein Grundbesitz wurde durch einen Fluß in zwei Teile geteilt, die durch eine Brücke verbunden waren. Der Besitzer des Grundbesitzes hatte auf einer Seite der Brücke einen Galgen aufstellen lassen und ein Gesetz erlassen, nach dem jeder Passant unter Eid aussagen mußte, aus welchem Grunde er wohin geht. Falls er die Wahrheit aussage, so solle er ohne Hindernisse passieren dürfen, falls er jedoch lüge, so solle er, nachdem er die Brücke überquert habe, unverzüglich gehenkt werden. Die Handhabung des Gesetzes verlief solange ohne Schwierigkeiten, bis ein Passant unter Eid aussagte: „Ich gehe über diese Brücke, um an diesem Galgen gehenkt zu werden.“ Danach überquerte er die Brücke. Die strittige Frage, ob dieser Passant gehenkt werden müsse oder nicht, wurde Sancho Pansa vorgelegt, der dabei natürlich das Gesetz des Besitzers befolgen sollte. Zeige, daß Sancho Pansa vor einer unlösbaren Aufgabe steht, denn wie er auch immer entscheiden mag, das Gesetz wird dabei verletzt werden! Verwende bei der Lösung der Aufgaben folgende Abkürzungen: p für „Der Passant überquert die Brücke“, q für „Der Passant wird gehenkt“, r für „Die Aussage des Passanten ist wahr“ und s für „Das Gesetz wird eingehalten“. Wir haben also folgende Voraussetzungen:

1. $r \equiv p \wedge q$
2. p
3. $s \supset (q \equiv p \wedge \sim r)$.

Zeigen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen $\sim s$ folgt! Führen Sie den Beweis indirekt!

7. Aufgabe: Die Studenten sind genau dann zufrieden, wenn Sie nicht mehr als 300 Seiten in der Woche lesen müssen. Wenn die Studenten zufrieden sind, steigt das Interesse der Lehrkräfte am Unterricht. Wenn das Interesse der Lehrkräfte am Unterricht steigt, erhöhen Sie die Anforderungen im Studium, und wenn Sie die Anforderungen im Studium erhöhen, müssen die Studenten mehr als 300 Seiten in der Woche lesen. Also sind die Studenten nicht zufrieden.

8. Aufgabe: Klaus ist entweder dumm oder faul. Wenn Klaus faul ist, so schreibt er eine Jahresarbeit von höchstens 20 Seiten. Klaus hat eine Jahresarbeit von mehr als 20 Seiten geschrieben. Also stimmt es nicht, daß Klaus eine Jahresarbeit von höchstens 20 Seiten schreibt, wenn er dumm ist.

9. Aufgabe: Das Leitungsgremium einer gesellschaftlichen (oder ökonomischen) Organisation bestehe aus vier Funktionen (z. B. Direktor, stellvertretender Direktor, technischer und ökonomischer Direktor), für welche sechs Kandidaten A, B, C, D, E, F in Frage kommen. Nach gründlicher Prüfung der Personalunterlagen und nach Aussprachen mit den Kandidaten kommt die übergeordnete Leitung zu folgenden Ergebnissen:

(1) A kann nur mit B in die Leitung, kann aber auf keinen Fall stellvertretender Direktor werden;
(2) B kann weder stellvertretender Direktor noch technischer Direktor werden;
(3) C kann nicht mit B zusammenarbeiten, falls nicht auch F Mitglied der Leitung wird;
(4) D lehnt es ab, mit E oder mit F zusammenzuarbeiten;
(5) Wenn A und B gleichzeitig Funktionen erhalten, kann man E nicht in die Leitung aufnehmen;
(6) F kann nur dann in die Leitung, wenn er Direktor wird und wenn außerdem C nicht stellvertretender Direktor wird;
(7) Keiner der Kandidaten ist in der Lage, zwei Funktionen gleichzeitig zu bekleiden.

Denken Sie sich eine solche Symbolisierung dieser Voraussetzungen aus, daß Sie mit Hilfe der Aussagenlogik entscheiden können, ob unter diesen Voraussetzungen überhaupt eine Leitung möglich ist, und wenn ja, wie sie zusammengesetzt ist!

10. Aufgabe: Gegeben seien folgende Voraussetzungen:

(1) Ute ist die Freundin von Anne oder von Gitte.
(2) Anne ist nicht die Freundin von Gitte.
(3) Wenn Ute die Freundin von Anne ist, so ist sie nicht die Freundin von Ria.
(4) Gitte ist die Freundin von Ria oder von Ute.
(5) Ute ist die Freundin von Ria.

Ist Ute die Freundin von Anne oder die Freundin von Gitte?

11. Aufgabe: Gegeben seien folgende Voraussetzungen:

(1) Peter bekommt in der Prüfung eine gute Note genau dann, wenn er lernt, alle Konsultationen besucht und genügend schläft.
(2) Peter kann nicht genügend schlafen, wenn er ständig in die Disko geht.
(3) Peter besucht alle Konsultationen, lernt, geht ständig in die Disko und wird dort von seinem Professor gesehen.

1. Frage: Bekommt Peter in der Prüfung eine gute Note?
2. Frage: Zu welchem Ergebnis kommen Sie, wenn die erste Prämisse durch folgende ersetzt wird:

(1′) Wenn Peter lernt oder alle Konsultationen besucht oder genügend schläft, so bekommt er in der Prüfung eine gute Note.

12. Aufgabe: Der Staatsanwalt hat die Untersuchungen in einem Mordfall zu führen. Ihm stehen die Feststellungen von vier Kriminalisten zur Verfügung:

(1) Wenn das Radio des Opfers nicht eingeschaltet war, so war der Täter eine Frau und hat mit ausländischem Akzent gesprochen.
(2) Wenn der Täter aus Mexiko gekommen ist und mit ausländischem Akzent gesprochen hat, so kann es nur Jane Moore gewesen sein.
(3) Das Radio des Opfers war nicht eingeschaltet.
(4) Der Mörder ist aus Mexiko gekommen.

Nach kurzem Überlegen beantragt der Staatsanwalt einen Haftbefehl gegen Jane Moore. Wäre der Haftbefehl berechtigt (logisch, nicht juristisch), vorausgesetzt, daß die angeführten Feststellungen den Tatsachen entsprechen?

13. Aufgabe: Zwei Freunde treffen sich in der Bibliothek. A liest ein Logikbuch, worauf B ihn fragt, wozu er das brauche. „Oh“, sagt A, „Logik ist sehr nützlich, soll ich es Dir beweisen?“ B hat nichts einzuwenden, und so entspannt sich folgender Dialog:

A: „Hast Du ein Aquarium zu Hause?“
B: „Ja.“
A: „Wenn Du ein Aquarium hast, so liebst Du Fische.“
B: „Das stimmt.“
A: „Wenn Du Fische liebst, so liebst Du auch Tiere.“

B: „Auch das stimmt."
A: „Wenn Du Tiere liebst, so liebst Du auch Menschen."
B: „Richtig."
A: „Wenn Du Menschen liebst, so bist Du kein schlechter Mensch. Mit Hilfe der Logik kann ich nun darauf schließen, daß Du kein schlechter Mensch bist."
B: „Donnerwetter, das ist ja famos!"

Beeindruckt vom Nutzen der Logik versucht B am nächsten Tag seine Kenntnisse in einem Gespräch mit C anzuwenden.

B: „Soll ich Dir zeigen, wie nützlich Logik ist?"
C: „Bitte tu das!"
B: „Hast Du ein Aquarium zu Hause?"
C: „Nein."
B: „Also bist Du ein schlechter Mensch; das habe ich mit Hilfe der Logik herausbekommen!"

C ist mit Recht über diesen „Schluß" empört, denn B hat einen groben logischen Fehler begangen. Nach welcher Regel hat A geschlossen, und nach welcher Regel glaubt B schließen zu dürfen? Weisen Sie die Unkorrektheit von B's „Regel" nach!

Die folgenden drei Aufgaben sollen verdeutlichen, daß zwischen dem Konditionaloperator „wenn ..., so ..." und der Subjunktion $\supset$ ein wesentlicher Unterschied besteht. Stellen wir in ihnen den Konditionaloperator durch eine Subjunktion dar, so werden diese Schlüsse gültig, obwohl sie es mit dem Konditionaloperator nicht sind (vgl. 13. Kapitel).

14. Aufgabe: Wenn Meyer sich im Oktober einen Volvo kauft, muß er ihn auf der Straße parken, wenn er sich nicht auch eine Garage besorgt. Es stimmt nicht, daß er sich eine Garage besorgt, wenn er alle gesetzlichen Bestimmungen einhält. Wenn Meyer aber alle gesetzlichen Bestimmungen einhält, so kauft er sich im Oktober einen Volvo. Also kauft er sich im Oktober tatsächlich einen Volvo und muß ihn auf der Straße parken.

15. Aufgabe: Wenn John in Paris ist, so ist er in Frankreich. Wenn John in Istanbul ist, so ist er in der Türkei. Also: Wenn John in Paris ist, so ist er in der Türkei oder wenn John in Istanbul ist, so ist er in Frankreich. (Cooper 1968, S. 297)

16. Aufgabe: Angenommen, Roy Dyckhoff erklärt, daß John Slaney an einem bestimmten Tag in Edinburgh war, und daß Crispin Wright das verneint. Dann ist die folgende Aussage wahr:

(1) Wenn John in Edinburgh war, hatte Roy recht.

Hingegen sind die beiden folgenden Aussagen falsch:

(2) Wenn Crispin recht hatte, so auch Roy.
(3) Wenn John in Edinburgh war, so hatte Crispin recht.

Die Negation der Aussage 2 ist demzufolge wahr:

(2′) Es gilt nicht: Wenn Crispin recht hatte, so auch Roy.

Zeigen Sie: Wenn wir den Konditionaloperator „wenn ..., so .." in diesen Aussagen mit Hilfe der Subjunktion darstellen, so erhalten wir aus den beiden wahren Aussagen 1 und 2′ die falsche Aussage 3!

5.10 Sequenzenkalkül und semantische Tableaus

Zu Beginn dieses Kapitels wiesen wir darauf hin, daß G. Gentzen als einer der ersten Systeme des natürlichen Schließens aufgestellt hat. Seine Systeme nennt man *Sequenzenkalküle* oder *Systeme vom Gentzenschen Typ*.

Beim Aufbau eines Sequenzenkalküls wird die Definition einer aussagenlogischen Formel vorausgesetzt. Zum Alphabet werden die Kommata und das Sequenzenzeichen $\longrightarrow$ hinzugefügt, wobei diese Zeichen Hilfszeichen und keine logischen Zeichen sind. Anschließend wird definiert, was eine Sequenz ist.

D1. $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow B_1, \ldots, B_m$ (wobei $n \geq 0$, $m \geq 0$) ist eine **Sequenz** genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m$ Formeln sind.

D2. In *D1* sind die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ das **Antezedent** und die Formeln $B_1, \ldots, B_m$ das **Sukzedent** der Sequenz.

Wenn $n = 0$, so hat die Sequenz die Form $\longrightarrow B_1, \ldots, B_m$. Wenn $m = 0$, so hat eine Sequenz die Form $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow$; und wenn $n = 0$ und $m = 0$, so hat sie die Form $\longrightarrow$. Eine Sequenz $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow B_1, \ldots, B_m$ wird gewöhnlich inhaltlich als die Formel $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$ gedeutet. Eine Sequenz der Form $\longrightarrow B_1, \ldots, B_m$ wird als die Formel $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ bzw. als $\vdash B_1 \vee \ldots \vee B_m$ gedeutet, eine Sequenz der Form $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow$ als die Formel $\sim(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ bzw. als $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset f$, wobei f eine konstante falsche Aussage darstellt, und die leere Sequenz $\longrightarrow$ wird als f gedeutet.

Weiter werden die Sequenzenkalküle durch Angabe von Axiomen (Axiomenschemata) und Schlußregeln aufgebaut. Zur Abkürzung der Schreibweise der Schlußregeln verwendet man anstelle der Ausdrücke „Aus X erhält man Y“ und „Aus X und Y erhält man Z“ (wobei X, Y und Z Sequenzen sind) Schemata der Form:

$$\frac{X}{Y} \qquad\qquad \frac{X; Y}{Z}$$

Wir geben einen Sequenzenkalkül an, der den Zusammenhang zwischen dem im Abschnitt 14 des vierten Kapitels dargestellten Kalkül der semantischen Tableaus und dem System des natürlichen Schließens besonders deutlich macht.

Basis des klassischen Sequenzenkalküls *G3* (Kleene 1952): Mit einem Symbol der Form $F_i(A)$ $(i \geq 1)$ stellen wir eine Folge von Formeln $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ dar, von denen eine die Formel A ist, und mit dem Symbol F_i $(i \geq 1)$ eine beliebige Folge von Formeln $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Axiomenschema von *G3*: $\mathbf{A^0}$. $F_1(A) \longrightarrow F_2(A)$.

Schlußregeln von *G3*:

1. *Regel der vorderen Negation* (*VN*):

$$\frac{F_1(\sim A) \longrightarrow F_2, A}{F_1(\sim A) \longrightarrow F_2}$$

2. *Regel der hinteren Negation* (*HN*):

$$\frac{F_1, A \longrightarrow F_2(\sim A)}{F_1 \longrightarrow F_2(\sim A)}$$

3. *Regel der vorderen Subjunktion* (*VS*):

$$\frac{F_1(A \supset B) \longrightarrow F_2, A; F_1(A \supset B), B \longrightarrow F_2}{F_1(A \supset B) \longrightarrow F_2}$$

4. *Regel der hinteren Subjunktion* (*HS*):

$$\frac{F_1, A \longrightarrow F_2(A \supset B), B}{F_1 \longrightarrow F_2(A \supset B)}$$

5. *Regeln der vorderen Konjunktion* (*VK*):

$$\frac{F_1(A \wedge B), A \longrightarrow F_2}{F_1(A \wedge B) \longrightarrow F_2} \quad \frac{F_1(A \wedge B), B \longrightarrow F_2}{F_1(A \wedge B) \longrightarrow F_2}$$

6. *Regel der hinteren Konjunktion* (*HK*):

$$\frac{F_1 \longrightarrow F_2(A \wedge B), A; F_1 \longrightarrow F_2(A \wedge B), B}{F_1 \longrightarrow F_2(A \wedge B)}$$

7. *Regel der vorderen Adjunktion* (*VA*):

$$\frac{F_1(A \vee B), A \longrightarrow F_2; F_1(A \vee B), B \longrightarrow F_2}{F_1(A \vee B) \longrightarrow F_2}$$

8. *Regeln der hinteren Adjunktion* (*HA*):

$$\frac{F_1 \longrightarrow F_2(A \vee B), A}{F_1 \longrightarrow F_2(A \vee B)} \quad \frac{F_1 \longrightarrow F_2(A \vee B), B}{F_1 \longrightarrow F_2(A \vee B)}$$

Regeln für weitere Operatoren lassen sich analog aufstellen.

Außer den angegebenen Regeln kann im Kalkül *G3* die Anordnung der Formeln vor (oder nach) dem Zeichen $\longrightarrow$ beliebig verändert, eine Wiederholung ein und derselben Formel beseitigt und sowohl vor als auch nach dem Zeichen $\longrightarrow$ eine beliebige Formel eingeführt werden.

D3. Einen **Beweis einer Sequenz** nennt man eine Folge von Sequenzen, von denen jede ein Axiom ist oder aus vorhergehenden Sequenzen nach den Schlußregeln gewonnen wurde. Die letzte Sequenz dieser Folge ist eine in *G3* beweisbare Sequenz.

D4. Ein **Theorem von *G3*** nennt man eine Sequenz $\longrightarrow A$, für die es einen Beweis gibt.

Es gelten folgende Metatheoreme:

MT1. Eine Sequenz $\longrightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist genau dann ein Theorem von *G3*, wenn die Formel $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ ein Theorem im Kalkül der semantischen Tableaus ist.

MT2. Eine Sequenz $A_1, A_2, \ldots, A_n \longrightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$ ist genau dann in *G3* beweisbar, wenn die Formel $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$ ein Theorem im System der semantischen Tableaus ist.

Die Beweise von *MT1* und *MT2* geben wir nicht an, wir verdeutlichen nur die Grundgedanken. Wenn wir ein geschlossenes semantisches Tableau für eine Formel A haben, so bilden wir für jedes Teiltableau dieses Tableaus auf folgende Weise eine Sequenz: Alle Formeln des linken Teiltableaus schreiben wir links vom Sequenzenzeichen $\longrightarrow$, und alle Formeln des rechten Teiltableaus schreiben wir rechts vom Sequenzenzeichen $\longrightarrow$. Alle so erhaltenen Sequenzen sind Axiome von *G3*, da ja alle Teiltableaus geschlossen sind. Auf diese Sequenzen wenden wir in *G3* die gleichnamigen Regeln wie im Kalkül der semantischen Tableaus, nur in umgekehrter Reihenfolge, an. Auf diese Weise erhalten wir einen Beweis der Sequenz $\longrightarrow A$. In umgekehrter Richtung wird der Beweis analog geführt.

Wir bauen einen Beweis der Sequenz $\longrightarrow p \wedge q \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$ im Kalkül *G3* auf, indem wir von dem geschlossenen semantischen Tableau der Formel $p \wedge q \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$ im Abschnitt 14 des vierten Kapitels ausgehen.

1. $p \wedge q, p, q, {\sim}p \vee {\sim}q, {\sim}p \longrightarrow p, {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q), p \wedge q \supset {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ (A^0)
2. $p \wedge q, p, q, {\sim}p \vee {\sim}q, {\sim}q \longrightarrow q, {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q), p \wedge q \supset {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ (A^0)
3. $p \wedge q, p, q, {\sim}p \vee {\sim}q, {\sim}p \longrightarrow {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q), p \wedge q \supset {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ (1., *VN*)
4. $p \wedge q, p, q, {\sim}p \vee {\sim}q, {\sim}q \longrightarrow {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q), p \wedge q \supset {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ (2., *VN*)
5. $p \wedge q, p, q, {\sim}p \vee {\sim}q \longrightarrow {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q), p \wedge q \supset {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ (3., 4., *VA*)
6. $p \wedge q, {\sim}p \vee {\sim}q \longrightarrow {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q), p \wedge q \supset {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ (5., *VK*)
7. $p \wedge q \longrightarrow {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q), p \wedge q \supset {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ (6., *HN*)
8. $\longrightarrow p \wedge q \supset {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ (7., *HS*).

6. Kapitel
Axiomatischer Aufbau der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik (Aussagenkalkül)

6.1 Aussagenalgebra und Aussagenkalkül

Von den Tautologien einer gegebenen Aussagenalgebra kann man einige Tautologien auswählen und Regeln angeben, nach denen man aus diesen Tautologien die übrigen Tautologien gewinnen kann. Die ausgewählten Tautologien nennt man dabei *Axiome*, die erwähnten Regeln *Schlußregeln*, die Axiome und die aus den Axiomen mit Hilfe der Schlußregeln gewonnenen Tautologien *Theoreme*. Ein auf solche Weise aufgebautes logisches System gehört zu den sogenannten *Aussagenkalkülen*. Ein Aussagenkalkül wird in diesem Falle mit dem Ziel aufgebaut, daß die Menge der Theoreme und die Menge der Tautologien der gegebenen Aussagenalgebra identisch sind. Den Aufbau eines Aussagenkalküls nennt man hier *eine Axiomatisierung einer gegebenen Aussagenalgebra*. Bei einem solchen Aufbau will man die Untersuchung der Menge aller Tautologien auf die Untersuchung der Eigenschaften einer beschränkten Zahl von Tautologien reduzieren und dafür eine einfache und bequeme Methode angeben.

Bis jetzt haben wir den Aussagenkalkül als ein heuristisches Mittel charakterisiert, das in der Aussagenalgebra verwendet wird. Es ist aber auch die umgekehrte Beziehung möglich. Dabei wird ein Aussagenkalkül unabhängig von einer Aussagenalgebra als selbständiges System aufgebaut: Es werden ein Verzeichnis der Aussagenvariablen und Operatoren, Regeln zur Bildung von Formeln, ein Verzeichnis der als Axiome ausgewählten Formeln, ein Verzeichnis von Schlußregeln usw. angegeben. Die semantischen Termini v und f werden dabei nicht verwendet. Für die Untersuchung der Eigenschaften des Kalküls wird als heuristisches Mittel eine Aussagenalgebra geschaffen oder herangezogen (wenn es sie in fertiger Form gibt). Man macht das, um festzustellen, ob der Kalkül widersprüchlich ist oder nicht oder ob die Menge der in ihm ableitbaren Theoreme ausreichend vollständig ist oder nicht. Eine Aussagenalgebra ist dazu oftmals notwendig und nicht nur ein mögliches heuristisches Mittel.

Doch auch im zweiten Fall werden Aussagenkalküle, wenn sie im Interesse der Wissenschaft der Logik und für die Lösung spezieller logischer Probleme bestimmt sind, so konstruiert, daß existierende oder annehmbare Aussagenalgebren einen wesentlichen Einfluß auf sie ausüben und in gewissem Rahmen die Art und die Eigenschaften ihrer Elemente vorausbestimmen.

Einen Aussagenkalkül nennt man *klassisch*, wenn alle seine Theoreme Tautologien in einer zweiwertigen Aussagenalgebra und alle Tautologien einer zweiwertigen Aussagenalgebra (mit den entsprechenden logischen Operatoren) in dem Kalkül Theoreme sind. *Klassischen Aussagenkalkül* nennt man aber auch den ganzen Bereich der Logik, in dem solche Kalküle dargestellt und ihre Eigenschaften und Beziehungen untersucht werden.

6.2 Basis des Kalküls *NS*

Alphabet des Kalküls *NS*:

1. die Buchstaben p, q, r mit und ohne Indizes - Aussagenvariablen
2. $\sim$ und $\supset$ - die aussagenlogischen Operatoren der Negation und Subjunktion
3. Klammern als Hilfszeichen.

D1. Aussagenlogische Formel:

1. Eine Aussagenvariable ist eine aussagenlogische Formel;
2. wenn A eine aussagenlogische Formel ist, so ist $\sim A$ eine aussagenlogische Formel;
3. wenn A und B aussagenlogische Formeln sind, so ist $(A \supset B)$ eine aussagenlogische Formel;
4. eine aussagenlogische Formel liegt nur vor, wenn es auf Grund der Punkte 1-3 der Fall ist.

D2. Wenn $(A \supset B)$ eine Formel ist, so nennen wir den Operator $\supset$ **Hauptsubjunktion** dieser Formel, die Formel A **Antezedent** und die Formel B **Konsequent** dieser Formel.

D3. Eine Formel A **kommt** in einer Formel B **vor** (hat ein Vorkommen in B) genau dann, wenn A ein graphischer Teil von B ist und dabei der Definition *D1* genügt.

Mit dem Symbol $A\{a/B\}$ stellen wir die Formel dar, die man aus A durch Einsetzen der Formel B für die Variable a überall, wo diese in A vorkommt, erhält.

Mit dem Symbol $A[B/C]$ stellen wir eine Formel dar, die man aus A durch Ersetzen von null oder mehr Vorkommen der Formel B in A (nicht unbedingt aller) durch die Formel C erhält.

Axiome von *NS*:

A1. $(p \supset (q \supset p))$
A2. $((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))$
A3. $((\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p))$.

Das Axiom *A1* nennt man *Gesetz der Prämissenbelastung*, das Axiom *A2 Fregeschen Kettenschluß* (oder *Distributionsgesetz der Subjunktion*) und das Axiom *A3 umgekehrtes Gesetz der Kontraposition*.

Schlußregeln von *NS*:

R1. Wenn a eine Variable ist, so erhält man $A\{a/B\}$ aus A, wobei B eine beliebige Formel ist.

R2. Aus den Formeln $(A \supset B)$ und A erhält man die Formel B.

Die Regel *R1* nennt man *Einsetzungsregel für Variablen*, die Regel *R2 Abtrennungsregel* oder *modus ponens*. In *R2* nennt man die Formel $(A \supset B)$ *große Voraussetzung* und die Formel A *kleine Voraussetzung*. Wir treffen die gleichen Vereinbarungen über Klammereinsparungen wie in der Aussagenalgebra.

6.3 Beweise und Beweise aus Annahmen (Ableitungen)

D1. Ein **Beweis einer Formel A im Kalkül *NS*** ist eine endliche Folge von Formeln, von denen jede entweder ein Axiom von *NS* ist oder aus vorhergehenden Formeln der Folge nach den Schlußregeln *R1* oder *R2* gewonnen wurde, wobei die letzte Formel der Folge A ist. Eine Formel, für die es in *NS* einen Beweis gibt, nennt man **eine in *NS* beweisbare Formel** oder ein **Theorem von *NS***.

So ist beispielsweise die Folge von Formeln

1. $p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$
2. $p \supset (q \supset p) \supset (p \supset q \supset (p \supset p))$
3. $p \supset (q \supset p)$
4. $p \supset q \supset (p \supset p)$
5. $p \supset (q \supset p) \supset (p \supset p)$
6. $p \supset p$

ein Beweis der Formel $p \supset p$ in *NS*. Die Formel in der ersten Zeile ist *A2*, die Formel 2 erhält man nach *R1* aus *A2* (für die Variable r wird die Formel p eingesetzt), die 3. Zeile ist *A1*, die Formel 4 erhält man nach *R2* aus der 2. und 3. Zeile, die Formel 5 erhält man aus 4 nach der Einsetzungsregel (für q wird $(q \supset p)$ eingesetzt), die 6. Formel erhält man schließlich aus 3 und 5 nach *R2*. Damit haben wir das erste Theorem bewiesen:

T1. $p \supset p$

Wir machen darauf aufmerksam, daß ein Beweis einer Formel ein sichtbares „Ding" ist, d. h. eine Folge von sichtbaren Symbolen, die in einer bestimmten Ordnung und nach bestimmten Regeln geschrieben sind. Außerdem ist unser Beweisbegriff im folgenden Sinne effektiv: Von jeder vorgegebenen Folge von Formeln kann man in endlich vielen Schritten entscheiden, ob sie ein Beweis ist oder nicht.

Wenn eine Formel A ein Theorem ist, so schreiben wir dies der Kürze halber mit dem Symbol $\vdash A$.

Dieses Symbol ist nur eine kurze Schreibweise der Behauptung „Die Formel A ist ein Theorem" und nichts anderes. Es ist ein Mittel der Sprache, in der wir über Formeln des Systems *NS* sprechen, und nicht ein Element der Sprache von *NS* selbst. Im weiteren geben wir Beweise von Theoremen als Folgen von Formeln an und schreiben rechts von ihnen in Klammern, auf Grund welcher Theoreme und Regeln dieser oder jener Schritt des Beweises vollzogen wurde.

Mehrmalige Anwendungen von *R1* werden auch nur mit *R1* gekennzeichnet. Wir illustrieren dies am Beispiel des folgenden Theorems.

T2. $\sim p \supset (p \supset q)$

1. $\sim q \supset \sim p \supset (p \supset q)$ (*A3*, *R1*)
2. $\sim q \supset \sim p \supset (p \supset q) \supset (\sim p \supset (\sim q \supset \sim p \supset (p \supset q)))$ (*A1*, *R1*)
3. $\sim p \supset (\sim q \supset \sim p \supset (p \supset q))$ (1., 2., *R2*)
4. $\sim p \supset (\sim q \supset \sim p \supset (q \supset q)) \supset (\sim p \supset (\sim q \supset \sim p) \supset (\sim p \supset (p \supset q)))$ (*A2*, *R1*)
5. $\sim p \supset (\sim q \supset \sim p) \supset (\sim p \supset (p \supset q))$ (3., 4., *R2*)
6. $\sim p \supset (\sim q \supset \sim p)$ (*A1*, *R1*)
7. $\sim p \supset (p \supset q)$ (5., 6., *R2*)

Ein und dasselbe Theorem kann auf verschiedene Weise bewiesen werden. Eine Aufgabe der Entwicklung von Kalkülen besteht darin, Beweisverfahren zu finden, die das Beweisen von Theoremen erleichtern. Mit dem Deduktionstheorem werden wir im Abschnitt 5 ein sehr einfaches und bequemes Verfahren zum Beweis von Theoremen kennenlernen. Vorbereitend müssen wir dazu noch einige neue Begriffe einführen.

D2. Eine **Variante einer Formel** A nennen wir eine Formel B, die man aus A durch eine solche Einsetzung von Variablen erhält, bei der zwei Vorkommen ein und derselben Variablen in A Vorkommen ein und derselben Variablen und zwei Vorkommen verschiedener Variablen in A Vorkommen verschiedener Variablen bleiben. Beispielsweise sind die Formeln $r \supset (q \supset r)$, $q \supset (p \supset q)$ Varianten der Formel $p \supset (q \supset p)$. Entsprechend verwenden wir die Ausdrücke **Variante eines Axioms**, **Variante eines Theorems** und **Variantenbeweis**.

D3. Ein **Beweis einer Formel** B **aus den Annahmeformeln** $A_1, \ldots, A_n$ (symbolisch: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$) ist eine endliche Folge von Formeln, deren letztes Glied die Formel B ist und von denen jede entweder eine Variante eines Axioms oder eine der Annahmeformeln $A_1, \ldots, A_n$ ist oder aus zwei vorhergehenden Gliedern der Folge mit Hilfe der Abtrennungsregel *R2* oder aus einem vorhergehenden Glied der Folge mit Hilfe der Einsetzungsregel *R1* gewonnen wurde, wobei bei einer Anwendung von *R1* nur für solche Variablen eingesetzt wird, die nicht in den

Annahmeformeln $A_1, \ldots, A_n$ vorkommen. Anstelle des Ausdrucks „Beweis einer Formel B aus den Annahmeformeln $A_1, \ldots, A_n$" sprechen wir auch von einer **Ableitung einer Formel** B **aus den Formeln** $A_1, \ldots, A_n$.

Eine Ableitung unterscheidet sich von einem Beweis dadurch, daß in einer Ableitung außer den Axiomen auch Varianten von Axiomen und die jeweiligen Annahmeformeln verwendet werden können und daß die Anwendung der Einsetzungsregel eingeschränkt wird.

Wir können einen Beweis als einen Spezialfall einer Ableitung betrachten, bei dem $n = 0$ ist, da in diesem Falle auch die Beschränkung der Einsetzungsregel aufgehoben ist.

Beispiel für einen Beweis aus Annahmen: Wir beweisen die Ableitbarkeitsbeziehung

T3. $p \supset q, q \supset r, p \vdash r$

(in Abschnitt 5 wird deutlich, warum wir Ableitbarkeitsbeziehungen als Theoreme mitzählen). Ableitung:

1.	$p \supset q$	(AF)
2.	$q \supset r$	(AF)
3.	p	(AF)
4.	q	(1., 3., *R2*)
5.	r	(2., 4., *R2*)

Die Einschränkung für die Einsetzungsregel in Beweisen aus Annahmen ist wesentlich. Würde man diese Einschränkung nicht treffen, hätte beispielsweise folgende Ableitbarkeitsbeziehung Gültigkeit: $p \vdash q$. Solch ein Ableitbarkeitsbegriff wäre aber wertlos. Wir hatten beim wahrheitsfunktionalen Aufbau der Aussagenlogik festgestellt, daß die Einsetzungsregel zwar von Tautologien stets zu Tautologien und von Kontradiktionen stets zu Kontradiktionen führt, daß sie aber nicht von logisch indeterminierten Formeln stets zu logisch indeterminierten Formeln führt. Mit anderen Worten, für die Einsetzungsregel gilt nicht: Wenn die Voraussetzungen der Regel bei einer bestimmten Wertkombination der Variablen den Wert v haben, so haben auch die Folgerungen bei dieser Kombination den Wert v. Da die Annahmeformeln in einer Ableitung beliebige Formeln (Tautologien, Kontradiktionen, oder logisch indeterminierte Formeln) sein können, sind Einsetzungen für Variablen, die in den Annahmeformeln vorkommen, verboten. Um trotzdem in Ableitungen alle Einsetzungen in Axiomen und Theoremen zu ermöglichen, wurden die Begriffe „Variante eines Axioms" und „Variante eines Theorems" eingeführt.

Übungen:

Beweisen Sie folgende Ableitbarkeitsbeziehungen:

1. $q \supset r, p \supset q, p \vdash r$
2. $p \supset q \supset r, q \vdash r$
3. $\sim p \supset \sim q, q \vdash r \supset p$!

6.4 Abgeleitete Operatoren

Im System *NS* haben wir nur die Negation und die Subjunktion als Grundoperatoren. Andere aussagenlogische Operatoren lassen sich mit Hilfe folgender Definitionen einführen.

D1. $(A \vee B) \equiv_{Def} (\sim A \supset B)$
D2. $(A \wedge B) \equiv_{Def} \sim(A \supset \sim B)$

D3. $(A \mid B) \equiv_{Def} (\sim A \vee \sim B)$
D4. $(A \dagger B) \equiv_{Def} (\sim A \wedge \sim B)$
D5. $(A \not\equiv B) \equiv_{Def} (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$
D6. $(A \equiv B) \equiv_{Def} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Mit diesen Definitionen haben wir die Entscheidung getroffen, daß jeweils die Formel links vom Definitionszeichen $\equiv_{Def}$ *(Definiendum)* eine Abkürzung für die Formel rechts vom Definitionszeichen *(Definiens)* ist. Auf Grund unserer Entscheidung sind die Formeln rechts und links vom Definitionszeichen jeweils bedeutungsgleich. Wenn wir eine Definition der Form $A \equiv_{Def} B$ akzeptiert haben, so stellen die Symbole C, $C[A/B]$ die gleiche Formel dar. Wir können deshalb folgende Ersetzungsregel für definitionsgleiche Formeln akzeptieren:

RD: Wenn $A \equiv_{Def} B$ und $\vdash C$, so $\vdash C[A/B]$ und $\vdash C[B/A]$.

6.5 Deduktionstheorem

MT1. (Deduktionstheorem). Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, so $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$.

Beweis: Nach der Bedingung von *MT1* ist ein Beweis von B aus den Annahmeformeln $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$ gegeben. Die folgende Folge von Formeln sei der Beweis von B aus den Annahmeformeln $A_1, \ldots, A_n$:

(I) B_1
.
.
.
B_{n-1}
B_n
.
.
.
.
B_r

B_r ist dann die Formel B. Wir beweisen *MT1* durch Angabe eines effektiven Verfahrens, nach dem man jeden Beweis aus Annahmen $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ in den Beweis aus Annahmen $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ umformen kann. Dazu formen wir die Ableitung I in folgende Formelfolge um:

(II) $A_n \supset B_1$
.
.
.
$A_n \supset B_{n-1}$
$A_n \supset B_n$
.
.
.
.
$A_n \supset B_r$.

Die Formelfolge II ist noch keine Ableitung. Wir zeigen jetzt durch Induktion über den Index von B, wie man diese Formelfolge durch sukzessive Einschiebungen in die Ableitung

(III) $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$

umformen kann.

Anfangsschritt des Induktionsbeweises: Aus der Definition eines Beweises aus Annahmen ergibt sich, daß B_1 in (I) eine Annahmeformel (AF) oder eine Variante eines Axioms (*VA*) sein kann. Ist B_1 eine Annahmeformel, so sind wieder zwei Fälle möglich: B_1 kann die Annahmeformel A_n oder eine Annahmeformel verschieden von A_n sein. Wir haben also die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

a) $B_1 = VA$
b) $B_1 = AF \neq A_n$
c) $B_1 = AF = A_n$.

Wir geben jetzt für diese Fälle die Einschiebungen an, die die Anfangsformel von (II) in einen Anfang der Ableitung (III) verwandeln.

a)	1.	B_1	(*VA*)
	2.	$B_1 \supset (A_n \supset B_1)$	(*A1*, *R1*)
	3.	$A_n \supset B_1$	(1., 2., *R2*)
b)	1.	B_1	($AF \neq A_n$)
	2.	$B_1 \supset (A_n \supset B_1)$	(*A1*, *R1*)
	3.	$A_n \supset B_1$	(1., 2., *R2*)
c)		$A_n \supset B_1$	(*T1*, *R1*, $B_1 = A_n$).

Damit ist der Anfangsschritt des Induktionsbeweises beendet.

Induktionsannahme: In der Formelfolge (II) wurden bis zur Formel $A_n \supset B_{n-1}$ alle erforderlichen Einschiebungen vorgenommen.

Induktionsschritt: Wir zeigen jetzt, welche Einschiebungen man in (II) vor $A_n \supset B_n$ machen muß. Dazu unterscheiden wir wieder alle Fälle, wie B_n in (I) gewonnen werden kann. Außer den drei im Anfangsschritt des Beweises betrachteten Fällen, die hier genauso behandelt werden, sind nach der Definition eines Beweises aus Annahmen noch folgende zwei Fälle möglich:

d) B_n wird aus zwei vorhergehenden Formeln der Folge $B_k \supset B_n$ und B_k nach der Abtrennungsregel *R2* gewonnen,
e) B_n wird aus einer vorhergehenden Formel B_i der Folge mit Hilfe der Einsetzungsregel *R1* gewonnen, wobei die Aussagenvariable, für die eine Einsetzung vorgenommen wird, nicht in den Annahmeformeln $A_1, \ldots, A_n$ vorkommt.

Im Fall d) nehmen wir folgende Einschiebungen vor:

d)	1.	$A_n \supset (B_k \supset B_n) \supset (A_n \supset B_k \supset (A_n \supset B_n))$	(*A2*, *R1*)
	2.	$A_n \supset B_k \supset (A_n \supset B_n)$	(1., $A_n \supset (B_k \supset B_n)$, *R2*)
	3.	$A_n \supset B_n$	(2., $A_n \supset B_k$, *R2*).

Die beiden Formeln $A_n \supset (B_k \supset B_n)$ und $A_n \supset B_k$ stehen auf Grund der Induktionsannahme in der vorhergehenden Folge.

Im Falle e) sind keine Einschiebungen erforderlich, da wir $A_n \supset B_n$ nach der gleichen Einsetzung aus $A_n \supset B_i$ erhalten, nach der man B_n aus B_i erhält. A_n verändert sich bei dieser

Einsetzung wegen der Einschränkung der Einsetzungsregel in Beweisen aus Annahmen nicht. Damit ist der Beweis des Deduktionstheorems beendet.

Beim Beweis des Deduktionstheorems verwendeten wir nur die folgenden drei Theoreme:

$p \supset (q \supset p)$,
$p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$ und
$p \supset p$.

In einem axiomatischen System der Aussagenlogik mit den entsprechenden Grundoperatoren genügt der Beweis dieser drei Theoreme, um das Deduktionstheorem zu beweisen. Als Folgerung aus dem Deduktionstheorem erhalten wir:

MT2. Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, so $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_n \supset B) \ldots)$.

Das Deduktionstheorem konstatiert einen wesentlichen Zusammenhang zwischen Beweisen und Ableitungen. Wenn wir im weiteren Theoreme beweisen wollen, so genügt es, zunächst die entsprechende Ableitbarkeitsbeziehung zu beweisen und darauf das Deduktionstheorem anzuwenden. Als abgeleitete Schlußregel erleichtert uns das Deduktionstheorem das Finden von Beweisen. Aus der in Abschnitt 3 bewiesenen Ableitbarkeitsbeziehung

$p \supset q, q \supset r, p \vdash r$

erhalten wir durch dreimalige Anwendung von *MT1*

T3. $\vdash p \supset q \supset (q \supset r \supset (p \supset r))$.

Im weiteren schreiben wir die Beweise nicht immer vollständig auf, sondern fassen manchmal mehrere offensichtliche Beweisschritte zu einem zusammen. Außerdem schreiben wir als Beweiszeilen auch Ableitbarkeitsbeziehungen der Form $A \vdash B$, machen von der Transitivität der Ableitbarkeitsbeziehung Gebrauch und verwenden das Deduktionstheorem.

T4. $\sim p \supset p \supset p$

1. $\sim p \supset (p \supset q)$ (*T2*)
2. $\sim p \supset p \supset (\sim p \supset q)$ (1., *A2*, *R1*, *R2*)
3. $\sim p \supset p \supset (\sim p \supset \sim (p \supset p))$ (2., *R1*)
4. $\sim p \supset p \vdash \sim p \supset \sim (p \supset p)$ (3., *R2*)
5. $\sim p \supset \sim (p \supset p) \vdash p \supset p \supset p$ (*A3*, *R1*, *R2*)
6. $\sim p \supset \sim (p \supset p) \vdash p$ (5., *T1*, *R2*)
7. $\sim p \supset p \vdash p$ (4., 6.)
8. $\vdash \sim p \supset p \supset p$ (7., *DT*)

Die Zeile 7 erhalten wir aus den Zeilen 4 und 6 wegen der Transitivität der Ableitbarkeitsbeziehung.

T5. $(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim q \supset p)$

Dazu beweisen wir zunächst die folgende Ableitbarkeitsbeziehung:

$\sim p \supset q, \sim p \supset \sim q \vdash p$,

und wenden darauf zweimal das Deduktionstheorem an.

1. $\sim p \supset q$ (*AF*)
2. $\sim p \supset \sim q$ (*AF*)
3. $\sim p \supset \sim q \supset (q \supset p)$ (*A3*)

4. $q \supset p$ (2., 3., *R2*)
5. $\sim p \supset p$ (1., 4., *T3*, *R1*, *R2*)
6. p (5., *T4*, *R2*).

MT3. Wenn $A_1, \ldots, A_n, \sim B \vdash C$ und $A_1, \ldots, A_n, \sim B \vdash \sim C$, so $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Beweis von *MT3*: Auf die beiden Voraussetzungen von *MT3* wenden wir jeweils *MT1* an und erhalten:

(1) $A_1, \ldots, A_n \vdash \sim B \supset C$
(2) $A_1, \ldots, A_n \vdash \sim B \supset \sim C$.

Durch Einsetzung in *T5* erhalten wir:

(3) $\vdash (\sim B \supset C) \supset (\sim B \supset \sim C \supset B)$.

Durch zweimalige Anwendung von *R2* ergibt sich:

$A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Übungen:

1. Mit dem Beweis des Deduktionstheorems wurde gleichzeitig ein effektives Verfahren gegeben, nach dem man eine Anwendung des Deduktionstheorems eliminieren kann. In einer gegebenen Ableitung muß man nur die entsprechenden Umformungen und Einschiebungen vornehmen, die im Beweis des Deduktionstheorems in allgemeiner Form angegeben wurden. Formen Sie die Ableitung von *T3* so um, daß sie ein Beweis von *T3* ohne Anwendung von *MT1* wird!
2. Beweisen Sie folgende Theoreme:

   T6. $\sim\sim p \supset p$
   T7. $p \supset \sim\sim p$
   T8. $p \supset q \supset (\sim q \supset \sim p)$
   T9. $p \supset (\sim q \supset \sim(p \supset q))$
   T10. $p \supset q \supset (\sim p \supset q \supset q)$!

6.6 Semantische Interpretation und Widerspruchsfreiheit des Kalküls *NS*

Eine *semantische Interpretation* eines Kalküls ist die Gesamtheit von Regeln, nach denen den Formeln des Kalküls Wahrheitswerte zugeschrieben werden. Ein solches Regelsystem ist eine Aussagenalgebra. Wir verwenden als semantische Interpretation des Kalküls *NS* die in der zweiwertigen Aussagenalgebra behandelten Regeln, nach denen Formeln mit der Subjunktion und der Negation Wahrheitswerte zugeschrieben werden. Wir benutzen auch die dort eingeführte Terminologie. Die hier angegebene Interpretation nennen wir *semantische Hauptinterpretation* des Kalküls *NS*.

MT1. Jedes Theorem des Kalküls *NS* ist eine Tautologie.

Beweis: Der Beweis wird induktiv geführt. Wir zeigen zunächst, daß alle Axiome von *NS* Tautologien sind. Dann überzeugen wir uns davon, daß die Schlußregeln von *NS* stets von Tautologien zu Tautologien führen. Aus folgenden Tabellen ist ersichtlich, daß die Axiome Tautologien sind:

p	$\supset$	$(q$	$\supset$	$p)$
v	v	v	v	v
v	v	f	v	v
f	v	v	f	f
f	v	f	v	f

$\sim$	p	$\supset$	$\sim$	q	$\supset$	$(q$	$\supset$	$p)$
f	v	v	f	v	v	v	v	v
f	v	v	v	f	v	f	v	v
v	f	f	f	v	v	v	f	f
v	f	v	v	f	v	f	v	f

p	$\supset$	$(q$	$\supset$	$r)$	$\supset$	$(p$	$\supset$	q	$\supset$	$(p$	$\supset$	$r))$
v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
v	f	v	f	f	v	v	v	v	f	v	f	f
v	v	f	v	v	v	v	f	f	v	v	v	v
v	v	f	v	f	v	v	f	f	v	v	f	f
f	v	v	v	v	v	f	v	v	v	f	v	v
f	v	v	f	f	v	f	v	v	v	f	v	f
f	v	f	v	v	v	f	v	f	v	f	v	v
f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f

Nach *T3* aus Abschnitt 5 des vierten Kapitels wissen wir bereits, daß die Einsetzungsregel *R1* stets von Tautologien zu Tautologien führt, d. h., die Regel *R1* erhält die Allgemeingültigkeit. Wenn $A \supset B$ und A Tautologien sind, so ist nach der Wahrheitstabelle für die Subjunktion auch B eine Tautologie, d. h., auch die Regel *R2* vererbt die Allgemeingültigkeit. Damit ist *MT1* bewiesen.

MT2. (Theorem der Widerspruchsfreiheit bezüglich der Negation). Zwei Formeln A und $\sim A$ können nicht beide Theoreme von *NS* sein.

Beweis: Angenommen, A und $\sim A$ wären beide Theoreme, dann müßten sie nach *MT1* beide Tautologien sein. Das ist aber auf Grund der Definition der Negation nicht möglich.

MT3. Das System *NS* ist absolut widerspruchsfrei.

Der Beweis von *MT3* ergibt sich unmittelbar aus *MT2.*

6.7 Semantische Vollständigkeit des Kalküls *NS*

Angenommen, B sei eine Formel, und $b_1, \ldots, b_n$ seien alle in ihr vorkommenden paarweise verschiedenen Variablen, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sei eine beliebige Wertkombination, die den Variablen zugeschrieben wird. Weiter sei A_i die Variable b_i $(i = 1, \ldots, n)$, wenn b_i der Wert v bei der gegebenen Wertkombination zugeschrieben wird; und A_i sei $\sim b_i$, wenn b_i der Wert f zugeschrieben wird. Schließlich sei B^* die Formel B, wenn B bei der gegebenen Wertkombination $\beta_1, \ldots, \beta_n$ der Variablen den Wert v hat, und B^* sei $\sim B$, wenn B bei dieser Wertkombination den Wert f annimmt.

MT1. $A_1, \ldots, A_n \vdash B^*$.

Beweis: Wir führen den Beweis induktiv über die Zahl der Vorkommen von logischen Operatoren in B. Angenommen, B sei eine der Variablen $b_1, \ldots, b_n$. Wenn B der Wert v zugeschrieben wird, so kommt sie unter den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ ohne Negation vor, und B^* ist eine der

Variablen ohne Negation. Wenn B der Wert f zugeschrieben wird, so kommt $\sim B$ unter den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ vor, und B^* ist die Formel $\sim B$. Nach der Definition eines Beweises aus Annahmen gilt dann in beiden Fällen

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

Wir nehmen an, B sei $\sim C$, und das Theorem sei für C gültig, d. h.

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C^*,$$

wobei C^* eine der Formeln C oder $\sim C$ in Abhängigkeit davon ist, ob C den Wert v oder f hat.

Nehmen wir an, C^* sei C. Dann gilt nach *T7*

$$A_1, \ldots, A_n \vdash \sim\sim C,$$

und da $\sim\sim C$ die Formel $\sim B$ ist, gilt

$$A_1, \ldots, A_n \vdash \sim B.$$

Angenommen, C^* sei $\sim C$. Dann gilt

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B,$$

da $\sim C$ die Formel B ist. Und wenn für die gegebene Wertkombination $\beta_1, \ldots, \beta_n$ die Formel C den Wert v annimmt, so nimmt B den Wert f an, und B^* ist $\sim B$. Wenn hingegen C den Wert f hat, so hat B den Wert v, und B^* ist B. Wir erhalten also

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B^*.$$

Angenommen, B sei $C \supset D$. Nach der Induktionsannahme gilt dann

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C^*,$$
$$A_1, \ldots, A_n \vdash D^*,$$

wobei C^* und D^* entsprechend die Formeln C und D oder $\sim C$ und $\sim D$ in Abhängigkeit davon sind, ob sie den Wert v oder f annehmen. Es sind folgende Fälle möglich:

1) D^* ist D; dann ist B^* die Formel $C \supset D$, da D den Wert v hat und nach der Definition von $\supset$ auch die Formel $C \supset D$ den Wert v hat;
2) C^* ist $\sim C$; dann ist B^* gleichfalls die Formel $C \supset D$, weil C den Wert f hat und folglich $C \supset D$ den Wert v;
3) C^* ist C, und D^* ist $\sim D$; dann ist B^* die Formel $\sim(C \supset D)$.

Für den ersten Fall erhält man das Theorem nach der Regel *R2* aus

$$A_1, \ldots, A_n \vdash D,$$
$$A_1, \ldots, A_n \vdash D \supset (C \supset D),$$

wobei $D \supset (C \supset D)$ eine Einsetzung in eine passende Variante von *A1* ist. Für den zweiten Fall erhält man das Theorem analog aus

$$A_1, \ldots, A_n \vdash \sim C,$$
$$A_1, \ldots, A_n \vdash \sim C \supset (C \supset D),$$

wobei $\sim C \supset (C \supset D)$ eine Einsetzung in eine passende Variante von *T2* ist. Für den dritten Fall erhält man das Theorem aus

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C,$$
$$A_1, \ldots, A_n \vdash \sim D,$$

$A_1, \ldots, A_n \vdash C \supset (\sim D \supset \sim(C \supset D))$

nach der Regel *R2*, wobei $C \supset (\sim D \supset \sim(C \supset D))$ eine Einsetzung in eine Variante von *T9* ist.

MT2. (Theorem der semantischen Vollständigkeit). Wenn B eine Tautologie ist, so $\vdash B$.

Beweis: Angenommen, $A_1, \ldots, A_n$, B^* seien die gleichen Formeln wie in *MT1*. Da B eine Tautologie ist, ist B^* immer die Formel B. Nach *MT1* gilt

$A_1, \ldots, A_n \vdash B.$

Dies gilt sowohl in dem Fall, wo b_n der Wert v zugeschrieben wird und A_n die Variable b_n ist, als auch in dem Fall, wo b_n der Wert f zugeschrieben wird und A_n die Formel $\sim b_n$ ist. Es gilt also

$A_1, \ldots, A_{n-1}, b_n \vdash B,$
$A_1, \ldots, A_{n-1}, \sim b_n \vdash B.$

Nach dem Deduktionstheorem erhalten wir

$A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash b_n \supset B,$
$A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash \sim b_n \supset B.$

Nach *R2* und *T10* erhalten wir hieraus

$A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash B.$

Auf diese Weise haben wir die Annahme A_n beseitigt. Wenn wir auf analoge Weise die übrigen Annahmen $A_{n-1}, \ldots, A_1$ eliminieren, so erhalten wir schließlich $\vdash B$.

D1. Ein logisches System ist **semantisch vollständig im engeren Sinne** genau dann, wenn gilt:

Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, so $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

MT3. Der Kalkül *NS* ist semantisch vollständig im engeren Sinne.

Beweis: Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, so ist $A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)$ eine Tautologie und auf Grund von *MT2* beweisbar. Mit Hilfe von *R2* erhalten wir, daß dann gilt: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Übung:

Beweisen Sie die semantische Vollständigkeit von *NS*, indem Sie die deduktive Äquivalenz von *NS* und dem System *AR* aus den Übungen zu Abschnitt 8 des fünften Kapitels beweisen!

6.8 Ein anderer Vollständigkeitsbeweis für den Kalkül *NS*

In diesem Abschnitt geben wir einen Vollständigkeitsbeweis für die Aussagenlogik an, dessen Grundgedanken auf L. Henkin (Henkin 1949) zurückgehen. Die sogenannten Henkin-Vollständigkeitsbeweise sind vor allem für die Quantorenlogik und eine ganze Klasse anderer logischer Systeme wichtig, da sie dort die einfachsten Vollständigkeitsbeweise sind. Die Darstellung eines solchen Beweises für die Aussagenlogik dient vor allem dazu, dem Leser die Grundgedanken dieser Beweise deutlich zu machen und ihm das Verständnis des entsprechenden Beweises für die Quantorenlogik zu erleichtern. Die Henkin-Beweise machen von einigen mengentheoretischen Begriffen Gebrauch, die wir im weiteren angeben, und sind keine effektiven Beweise (zum Begriff des effektiven Beweises vgl. Übung 1 zu Abschnitt 5 des 6. Kap.).

D1. Wenn K eine Klasse von Formeln ist und B eine Formel, so sagen wir, daß B aus K **ableitbar** ist (symbolisch $K \vdash B$), wenn es eine endliche Folge $A_1, \ldots, A_n$ von Formeln aus K derart gibt, daß $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

D2. Eine Formelklasse K ist **inkonsistent** genau dann, wenn es eine Formel B derart gibt, daß $K \vdash B$ und $K \vdash {\sim}B$.

D3. Eine Formelklasse K ist **konsistent** genau dann, wenn es keine Formel B derart gibt, daß $K \vdash B$ und $K \vdash {\sim}B$.

D4. Wenn K eine konsistente Formelklasse und A eine Formel ist, so sagen wir, daß A mit der Klasse K **verträglich** ist, wenn die Klasse, deren Elemente A und alle Formeln aus K sind, konsistent ist. Im entgegengesetzten Falle ist A mit K **unverträglich**.

D5. Eine Formelklasse K wird **maximal konsistente Klasse** genannt, wenn K konsistent ist und wenn jede Formel A, die nicht Element von K ist, mit K unverträglich ist.

Es gilt folgendes Existenztheorem einer maximal konsistenten Klasse:

T1. Jede konsistente Klasse K läßt sich zu einer maximal konsistenten Klasse K^+ erweitern, d. h., es existiert eine maximal konsistente Klasse K^+, zu deren Elementen alle Elemente von K gehören.

Beweis: Wir beweisen *T1* dadurch, daß wir eine Regel angeben, nach der die maximal konsistente Klasse K^+ eindeutig bestimmt wird, wenn eine konsistente Klasse K gegeben ist. Da wir es mit unendlichen Klassen zu tun haben, läßt sich nach dieser Regel die betreffende Klasse K^+ natürlich nicht effektiv konstruieren.

Zunächst nehmen wir an, daß alle Formeln durchnumeriert sind. Da wir nur abzählbar unendlich viele Formeln haben, ist eine solche Numerierung möglich. Wir können dann von der ersten, zweiten, …, n-ten Formel dieser Numerierung derart sprechen, daß für jede Formel eine positive ganze Zahl n existiert, die ihr bei dieser Numerierung zugeordnet ist. Wenn eine konsistente Formelklasse K gegeben ist, so bilden wir auf folgende Weise eine unendliche Folge von Formelklassen K^0, K^1, K^2, … Die Klasse K^0 ist identisch mit K. Wenn die $(n+1)$-te Formel mit K^n verträglich ist, so ist K^{n+1} die Klasse, deren Elemente die $(n+1)$-te Formel und alle Elemente von K^n sind. Wenn die $(n+1)$-te Formel nicht mit K^n verträglich ist, so sind K^n und K^{n+1} identisch.

Die Konsistenz der Formelklassen K^0, K^1, K^2, … folgt induktiv aus der Konsistenz der Formelklasse K, denn K^0 ist identisch mit K, und die Konsistenz von K^{n+1} folgt aus der Konsistenz von K^n.

Mit K^+ bezeichnen wir die Vereinigung der Klassen K^0, K^1, K^2, …, d. h., eine Formel A ist Element der Klasse K^+ genau dann, wenn ein solches n existiert, daß A Element der Klasse K^n ist.

Wenn K eine konsistente Klasse ist, so ist auch K^+ eine konsistente Klasse. Wenn nämlich K^+ inkonsistent ist, so existiert eine solche endliche Zahl von Formeln $A_1, \ldots, A_m$ aus K^+ und eine solche Formel B, daß $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ und $A_1, \ldots, A_m \vdash {\sim}B$. Nehmen wir an, k sei die größte Zahl, die in der gegebenen Numerierung den Formeln $A_1, \ldots, A_m$ zugeordnet ist. Dann sind alle Formeln $A_1, \ldots, A_m$ Elemente der Klasse K^k, und folglich ist die Klasse K^k inkonsistent. Dies widerspricht jedoch der vorausgesetzten Konsistenz der Klassen K^0, K^1, K^2, … Außerdem gilt, wenn die Klasse K konsistent ist, so ist die Klasse K^+ maximal konsistent.

Angenommen, A sei eine Formel, die mit der Klasse K^+ verträglich ist, und A sei die $(n+1)$-te Formel unserer Numerierung. Da A mit K^+ verträglich ist, muß A auch mit K^n verträglich sein. Definitionsgemäß gehört A dann zur Klasse K^{n+1} und folglich zur Klasse K^+.

Wir betrachten im weiteren nur solche maximal konsistenten Klassen K^+, die irgendeinen axiomatisierten Aussagenkalkül, beispielsweise den Kalkül *NS*, enthalten, und geben einige Eigenschaften solcher Klassen an.

T2. Wenn eine Formel A Element von K^+ ist, so ist die Formel $\sim A$ kein Element von K^+.

Beweis: *T2* gilt, da K^+ konsistent ist.

T3. Wenn eine Formel A kein Element von K^+ ist, so ist die Formel $\sim A$ Element von K^+.

Beweis: Wenn A kein Element von K^+ ist, so ist A mit K^+ unverträglich, d. h., es gibt eine solche Formel B, daß aus der Klasse K^+ vereinigt mit A sowohl B als auch $\sim B$ ableitbar sind. Mit Hilfe des Deduktionstheorems erhalten wir:

$$K^+ \vdash A \supset B \wedge \sim B.$$

Nach dem Gesetz der Kontraposition gilt dann

$$K^+ \vdash \sim(B \wedge \sim B) \supset \sim A,$$

und nach dem Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch erhalten wir

$$K^+ \vdash \sim A.$$

Also ist $\sim A$ mit K^+ verträglich und Element von K^+.

Nach *T2* und *T3* gilt demnach für jede Formel A: Entweder A oder $\sim A$ ist ein Element von K^+.

Als Folgerung aus *T2* und *T3* erhalten wir, daß jedes Theorem der Aussagenlogik in jeder maximal konsistenten Formelklasse enthalten ist. Denn wenn gilt $\vdash A$, so ist $\sim A$ eine Kontradiktion und kann zu keiner konsistenten Formelklasse gehören. Folglich gehört A zu jeder maximal konsistenten Formelklasse.

T4. Wenn B ein Element der Klasse K^+ ist, so ist auch $A \supset B$ ein Element der Klasse K^+.

Beweis: Aus $K^+ \vdash B$ erhalten wir mit Hilfe von $p \supset (q \supset p)$, daß $K^+ \vdash A \supset B$. Die Formel $A \supset B$ ist also mit K^+ verträglich und folglich ein Element von K^+.

T5. Wenn A kein Element von K^+ ist, so ist $A \supset B$ ein Element von K^+.

Beweis: Auf Grund von *T3* ist $\sim A$ Element von K^+, wenn A kein Element von K^+ ist. Aus $K^+ \vdash \sim A$ erhalten wir $K^+ \vdash \sim A \vee B$ und $K^+ \vdash A \supset B$. Die Formel $A \supset B$ ist also mit K^+ verträglich und folglich ein Element von K^+.

T6. Wenn A ein Element und B kein Element von K^+ ist, so ist $A \supset B$ kein Element von K^+.

Beweis: Nach *T3* ist $\sim B$ ein Element von K^+, wenn B kein Element ist. Wenn nun $A \supset B$ ein Element von K^+ wäre, so wäre K^+ inkonsistent.

T7. Jede konsistente Formelklasse K ist gemeinsam erfüllbar, d. h., es gibt eine Kombination von Wahrheitswerten für die Aussagenvariablen, bei der alle Formeln der Klasse K den Wert v annehmen.

Beweis: Zu K gibt es nach *T1* eine maximal konsistente Klasse K^+. Wir ordnen allen Aussagenvariablen, die Element von K^+ sind, den Wert v und allen anderen den Wert f zu. Durch Induktion über die Anzahl von logischen Operatoren in A zeigen wir jetzt, daß für alle Formeln A gilt $A = v$ genau dann, wenn A Element von K^+ ist. Wenn A keine logischen Operatoren enthält, gilt die Behauptung auf Grund der oben angegebenen Zuordnung der Wahrheitswerte zu den Aussagenvariablen. Wenn A n Operatoren enthält ($n \neq 0$), so kann es die Form $\sim B$ oder $B \supset C$ haben (wir betrachten hier eine Sprache der Aussagenlogik mit nur diesen beiden Operatoren), und nach Induktionsvoraussetzung gilt für die Formeln B und C, daß sie genau dann Element von K^+ sind, wenn sie den Wert v haben. Ist $\sim B$ in K^+, so ist nach *T2* die Formel B kein Element von K^+, und nach der Induktionsvoraussetzung gilt $B = f$ und folglich $\sim B = v$. Ist $\sim B$ kein Element von K^+, so ist nach *T3* B Element von K^+ und $B = v$, folglich $\sim B = f$. Ist $B \supset C$ Element von K^+, so ist nach *T6* B kein Element oder C ein Element von K^+, d. h., $B = f$ oder $C = v$. In beiden Fällen gilt $B \supset C = v$. Ist $B \supset C$ kein Element von K^+, so ist nach *T4* C kein Element von K^+, und nach *T5* ist B ein Element von K^+, d. h., nach der Induktionsvoraussetzung gilt $C = f$ und $B = v$. Folglich gilt: $B \supset C = f$. Es gibt also eine Wertkombination für die Variablen, bei der alle Formeln aus K^+ und damit auch die aus K den Wert v annehmen. Damit ist der Beweis von *T7* beendet.

Wir können nun zum Beweis von *MT3* des vorhergehenden Abschnitts übergehen. Wir beweisen den Satz: Wenn nicht gilt $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, so gilt auch nicht $A_1, \ldots, A_n \models B$. Durch Kontraposition erhalten wir daraus die Behauptung von *MT3* des vorhergehenden Abschnitts. Wenn die Ableitbarkeitsbeziehung $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ nicht gilt, so ist die Klasse $A_1, \ldots, A_n$, $\sim B$ konsistent und nach *T7* gemeinsam erfüllbar. Es gibt also eine Wertkombination für die Variablen, bei der gilt $A_1 = v$, ..., $A_n = v$ und $B = f$, d. h. aber, daß B nicht semantisch aus $A_1, \ldots, A_n$ folgt. Damit ist *MT3* bewiesen.

Die Behauptung *MT2* des vorhergehenden Abschnitts erhalten wir für den Fall, daß $n = 0$.

6.9 Syntaktische Vollständigkeit des Kalküls *NS*

D1. Wir nennen ein deduktives System **syntaktisch vollständig** genau dann, wenn für jede Formel A des Systems gilt: Entweder A ist ein Theorem, oder ein Hinzufügen von A als Axiom zum System macht dieses widersprüchlich.

MT1. (Theorem der syntaktischen Vollständigkeit). Das System *NS* ist syntaktisch vollständig.

Beweis: Angenommen, die Formel A ist kein Theorem von *NS*. Dann ist auf Grund des Theorems der semantischen Vollständigkeit A keine Tautologie. Dies bedeutet, daß es eine Wertkombination für die in A vorkommenden Variablen gibt, bei der A den Wert f annimmt. Wir fügen A zu den Axiomen von *NS* hinzu. Nach der Regel für simultane Einsetzungen können wir aus A eine Formel B auf folgende Weise erhalten: Wenn bei der erwähnten Wertkombination für die Variablen, bei der A den Wert f annimmt, der Variablen a der Wert v zugeschrieben wird, so setzen wir für a die Formel $a \supset a$ ein, die immer den Wert v hat. Wird hingegen der Variablen a der Wert f zugeschrieben, so setzen wir für sie die Formel $\sim(a \supset a)$ ein, die immer den Wert f hat. Offensichtlich nimmt die durch diese Einsetzung aus A gewonnene Formel B immer den Wert f an und ist eine Kontradiktion. Folglich ist die Formel $\sim B$ eine Tautologie, und auf Grund des Theorems über die semantische Vollständigkeit gilt $\vdash \sim B$. Wenn wir jedoch $\vdash A$ zulassen, müssen wir auf Grund der Einsetzungsregel auch $\vdash B$ zulassen. Damit ist das Theorem bewiesen.

Das Theorem der syntaktischen Vollständigkeit von *NS* bedeutet, daß sich die Klasse der Theoreme dieses Kalküls nicht ohne Widerspruch erweitern läßt. *NS* ist also ein maximal weites System.

6.10 Unabhängigkeit des Kalküls *NS*

D1. Ein Axiom A^i nennt man **unabhängig** von den übrigen Axiomen und Schlußregeln eines Kalküls genau dann, wenn es kein Theorem in dem Kalkül ist, den man durch Ausschluß von A^i aus der Zahl der Axiome erhält.

D2. Eine Grundregel R^i nennt man **unabhängig** von den übrigen Axiomen und Grundregeln eines Kalküls genau dann, wenn sie keine abgeleitete Schlußregel in dem Kalkül ist, den man durch Ausschluß von R^i aus dem ursprünglichen Kalkül erhält.

D3. Einen logischen Kalkül nennen wir **unabhängig** genau dann, wenn alle seine Axiome und Grundregeln unabhängig sind.

Die Unabhängigkeit von Axiomen und Grundregeln wird auf folgende Art und Weise bewiesen: Will man die Unabhängigkeit eines Axioms A^i von den übrigen Axiomen und Grundregeln eines Axiomensystems beweisen, so sucht man eine Eigenschaft, die dem Axiom A^i nicht zukommt, die den übrigen Axiomen zukommt und die von den Grundregeln des Systems vererbt wird, d. h., wenn die Voraussetzungen einer Regel diese Eigenschaft besitzen, so besitzt auch die Folgerung dieser Regel diese Eigenschaft. Gelingt es, eine solche Eigenschaft anzugeben, so ist damit gezeigt, daß das Axiom A^i nicht aus den übrigen Axiomen mit Hilfe der Grundregeln des Systems abgeleitet werden kann.

Will man die Unabhängigkeit einer Grundregel R^i von den Axiomen und übrigen Regeln eines Systems beweisen, so sucht man wieder eine Eigenschaft, die allen Axiomen des Systems zukommt und die von den übrigen Grundregeln des Systems vererbt wird. Außerdem gibt man ein Theorem des Systems an, das diese Eigenschaft nicht besitzt. Gelingt dies, so kann das betreffende Theorem nur mit der Regel R^i bewiesen werden. Damit ist die Unabhängigkeit von R^i bewiesen.

Sehr geeignet für den Beweis der Unabhängigkeit von Axiomen und Schlußregeln sind Methoden der mehrwertigen Logik. Anstelle von zwei Wahrheitswerten wird ein Komplex von mehr als zwei Wahrheitswerten eingeführt. Diese Wahrheitswerte werden in *ausgezeichnete* und *nichtausgezeichnete Wahrheitswerte* eingeteilt. Den Aussagenvariablen werden die Wahrheitswerte genauso wie in der zweiwertigen Aussagenalgebra zugeschrieben. In der mehrwertigen Aussagenlogik gibt es dabei natürlich mehr mögliche Wertkombinationen. Für die Operatoren werden Wertetabellen analog denen der zweiwertigen Aussagenalgebra angegeben. Eine *Tautologie* wird hier definiert als eine Formel, die nur ausgezeichnete Wahrheitswerte annimmt. Als die Eigenschaft, von der bei der allgemeinen Erläuterung der Grundgedanken von Unabhängigkeitsbeweisen die Rede war, wählt man jetzt die Eigenschaft, eine Tautologie in einer solchen mehrwertigen Aussagenalgebra zu sein. Es ist offensichtlich, daß es für solche Unabhängigkeitsbeweise nicht erforderlich ist, den gewählten Wahrheitswerten eine inhaltliche Deutung zu geben.

MT1. Das Axiomensystem *NS* ist unabhängig.

Beweis: Für den Beweis der Unabhängigkeit von *R1* ändern wir die Hauptinterpretation des Kalküls *NS* in folgender Weise. Wenn in einer Formel eine Variable vorkommt, die nicht in den Axiomen vorkommt, so hat diese Formel den Wert f. Bei dieser Interpretation sind alle Axiome Tautologien.

Wenn $A \supset B$ und A Tautologien sind, so kommen in A und B keine Variablen vor, die nicht in den Axiomen vorkommen, d. h., die Regel *R2* führt von Tautologien stets zu Tautologien. Die Formel $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$, die man mit Hilfe von *R1* erhält, hat (nach der zusätzlichen Regel) den Wert f.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *R2* wählen wir die Hauptinterpretation mit folgender Ergänzung: Wenn eine Formel nicht mehr als ein Vorkommen des logischen Operators $\supset$ enthält, so hat sie den Wert f. Die Axiome und die aus ihnen mit Hilfe der Regel *R1* gewonnenen Formeln sind hierbei Tautologien, weil die Axiome alle mehr als einen Operator $\supset$ enthalten und eine Einsetzung die Zahl der Vorkommen dieses Operators nicht verringern kann. Mit Hilfe der Regel *R2* erhält man das Theorem $p \supset p$, dem gemäß der zusätzlichen Regel der Wert f zugeschrieben wird.

Kurz gesagt, die Unabhängigkeit der Einsetzungsregel ist daraus ersichtlich, daß man ohne sie kein Theorem erhalten kann, das länger als *A2* ist, während die Unabhängigkeit der Abtrennungsregel daraus ersichtlich ist, daß man ohne sie kein Theorem erhalten kann, das kürzer als *A1* ist.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *A1* wählen wir folgende Aussagenalgebra. Zu den Wahrheitswerten v und f fügen wir einen dritten Wert n hinzu. Die Operatoren $\sim$ und $\supset$ definieren wir durch folgende Tabellen:

A	$\sim A$
v	f
n	n
f	v

$A \supset B$	v	n	f
v	v	f	f
n	v	v	f
f	v	v	v

Tautologien nehmen immer den Wert v an. Bei dieser Interpretation nimmt $p \supset (q \supset p)$ den Wert f an, wenn $p = n$ und $q = v$.

Um festzustellen, daß *A2* bei dieser Interpretation eine Tautologie bleibt, ist es nicht nötig, alle 27 Wertkombinationen für die Variablen p, q, r durchzuprobieren, da eine Subjunktion definitionsgemäß nicht den Wert n annehmen kann. Es reicht aus, die Fälle zu überprüfen, in denen $(p \supset (q \supset r)) = v$ und $((p \supset q) \supset (p \supset r)) = f$. Da $(p \supset q)$ und $(p \supset r)$ nicht den Wert n annehmen können, verbleiben nur die Fälle, in denen $(p \supset q) = v$ und $(p \supset r) = f$. Schließlich gilt $(p \supset r) = f$, wenn entweder $p = v$ und $r = n$, oder $p = v$ und $r = f$, oder $p = n$ und $r = f$. Wenn $(p \supset (q \supset r)) = v$ und $p = v$, so $(q \supset r) = v$; wenn $r = n$, so muß $q = n$ oder $q = f$ gelten, wenn aber $q = n$ oder $q = f$, so $(p \supset q) = f$, da $p = v$. Es gilt aber $(p \supset q) = v$, und dieser Fall entfällt. Wenn $(p \supset (q \supset r)) = v$, $p = v$ und $r = f$, so $(q \supset r) = v$, $q = f$, $(p \supset q) = f$, was der Bedingung $(p \supset q) = v$ widerspricht, d. h., auch dieser Fall entfällt. Wenn $(p \supset (q \supset r)) = v$, $p = n$ und $r = f$, so $(q \supset r) = v$ oder $(q \supset r) = n$. Das letztere ist ausgeschlossen. Angenommen, $(q \supset r) = v$, dann gilt $q = f$ und $(p \supset q) = f$, was der Bedingung $(p \supset q) = v$ widerspricht, so daß auch dieser Fall entfällt.

Um festzustellen, daß *A3* eine Tautologie ist, genügt es zu prüfen, ob ein Fall möglich ist oder nicht, in dem $(\sim p \supset \sim q) = v$ und $(q \supset p) = f$. Wenn $(q \supset p) = f$, so gilt entweder $q = v$ und $p = n$, oder $q = v$ und $p = f$, oder $q = n$ und $p = f$. Wenn $q = v$ und $p = n$, so $\sim p = n$ und $\sim q = f$, folglich $(\sim p \supset \sim q) = f$. Wenn $q = v$ und $p = f$, so $\sim p = v$ und $\sim q = f$, folglich $(\sim p \supset \sim q) = f$. Wenn $q = n$ und $p = f$, so $\sim p = v$ und $\sim q = n$, folglich $(\sim p \supset \sim q) = f$. *A3* nimmt also immer den Wert v an.

Die Regeln *R1* und *R2* erhalten die Allgemeingültigkeit der Theoreme. Eine Einsetzung kann nur die Zahl der möglichen Werte verringern, die eine Teilformel in einer Formel annehmen kann, und nach der Definition der Subjunktion gilt: Wenn $(A \supset B) = v$ und $A = v$, so $B = v$.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *A2* wählen wir folgende Interpretation. Wir definieren die Operatoren $\sim$ und $\supset$ durch die Tabellen

A	$\sim A$
v	f
n	n
f	v

$A \supset B$	v	n	f
v	v	n	f
n	v	v	n
f	v	v	v

wobei n ein dritter Wahrheitswert ist. Tautologien nehmen immer den Wert v an. Bei dieser Interpretation nimmt *A2* den Wert n an, wenn $p = n$, $q = n$ und $r = f$. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß alle übrigen Axiome Tautologien sind, indem man alle möglichen Wertkombinationen für die in ihnen vorkommenden Variablen betrachtet. Die Regeln *R1* und *R2* führen von Tautologien stets wieder zu Tautologien.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *A3* wählen wir die Hauptinterpretation und folgende Ergänzung: Alle Vorkommen der Form $\sim C$ in einer Formel werden durch C ersetzt (d. h., die Negationen werden überall aus den Formeln ausgeschlossen). Bei der Feststellung des Wertes einer Formel wird zunächst die Ersetzung der Vorkommen $\sim C$ durch C vorgenommen, und danach wird die Hauptinterpretation angewandt. Dabei wird *A3* in die Formel $(p \supset q) \supset$ $\supset (q \supset p)$ umgeformt, die den Wert f annimmt, wenn $q = v$ und $p = f$. Die Axiome *A1* und *A2* bleiben unverändert und sind offensichtlich Tautologien. Für *R1* spielt die Form der einzusetzenden Formeln keine Rolle. Im Falle einer Anwendung von *R2* wird die Umformung im Antezedent A und im Konsequent B der großen Voraussetzung $A \supset B$ und in der kleinen Voraussetzung A vorgenommen. Wenn dabei B in eine Formel umgeformt wird, die keine Tautologie ist, so muß auch A in eine Formel umgeformt werden, die keine Tautologie ist. Sonst wäre $A \supset B$ keine Tautologie. Eine Umformung von A ergibt aber eine Tautologie, folglich ergibt auch eine Umformung von B eine Tautologie. Damit ist *MT1* bewiesen.

Wir haben absichtlich unterschiedliche Beweisverfahren der Unabhängigkeit für einzelne Axiome und Grundregeln angeführt, um verschiedene mögliche Methoden zu demonstrieren.

Das Wesen der betrachteten Beweisverfahren besteht darin, zu zeigen, daß bei einer Interpretation, die zum Beweis der Unabhängigkeit eines Axioms A^i gewählt wird, A^i keine Tautologie ist, alle übrigen Axiome Tautologien sind und man A^i nicht als Theorem aus den übrigen Axiomen ableiten kann. Analog gilt für eine Grundregel: Alle Theoreme, die man ohne R^i gewinnt, sind Tautologien, während einige Theoreme, die man mit Hilfe von R^i gewinnt, keine Tautologien sind, und diese Theoreme kann man folglich nicht ohne R^i erhalten.

Übungen:

1. Beweisen Sie, daß das folgende von G. Frege stammende Axiomensystem *AF* widerspruchsfrei und vollständig ist!

Axiome:	**A1.**	$p \supset (q \supset p)$
	A2.	$p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$
	A3.	$p \supset (q \supset r) \supset (q \supset (p \supset r))$
	A4.	$p \supset q \supset (\sim q \supset \sim p)$
	A5.	$\sim\sim p \supset p$
	A6.	$p \supset \sim\sim p$
Schlußregeln:	**R1.**	*Einsetzungsregel*
	R2.	*Abtrennungsregel*

   Hinweis zur Lösung: Beweisen Sie die semantische Vollständigkeit von *AF*, indem Sie die deduktive Äquivalenz von *NS* und *AF* beweisen! Beweisen und verwenden Sie dazu das Deduktionstheorem in *AF*!
2. Beweisen Sie, daß *A3* in *AF* abhängig ist und die übrigen Axiome unabhängig sind!
3. Formulieren und beweisen Sie für den Kalkül *NS* das Ersetzbarkeitstheorem! Führen Sie den Beweis analog wie im System des natürlichen Schließens (Abschnitt 6 des fünften Kapitels) und benutzen Sie dabei die semantische Vollständigkeit von *NS*!

7. Kapitel
Aussagenlogische Theorie der logischen Folgebeziehung

7.1 Klassische Theorien der logischen Folgebeziehung und ihre Paradoxien

Eine logische Folge (logische Ableitung, Deduktion) der einen Aussage aus anderen ist eine Gewinnung der einen Aussage aus anderen nach in der Logik aufgestellten Regeln. Unter der aussagenlogischen oder allgemeinen Theorie der logischen Folgebeziehung verstehen wir jenen Bereich der Logik, in dem Regeln der logischen Folgebeziehung für solche Aussagen aufgestellt werden, die mittels der aussagenlogischen Operatoren der Negation, der Konjunktion, der Adjunktion und anderer mit ihrer Hilfe definierbarer Operatoren zusammengesetzt sind. In diesem Kapitel geben wir zunächst eine kurze historische Skizze der Problematik und führen dabei auch längere Zitate aus Texten an, die für die Herausbildung der Theorie der logischen Folgebeziehung wesentlich sind.

Die Grundlagen der aussagenlogischen Theorie der logischen Folgebeziehung wurden von G. Frege in seiner „Begriffsschrift“ (1879) gelegt. Er definiert dort die Subjunktion (materiale Implikation; Frege nennt sie *Bedingtheit*) in der bekannten wahrheitsfunktionalen Weise. Die Fregesche Definition stieß weitgehend auf Unverständnis. Er selbst schreibt 1906 verbittert und resignierend: „Wenn man zwei Gedanken hat, so sind nur vier Fälle möglich:

1. der erste ist wahr und desgleichen der zweite;
2. der erste ist wahr, der zweite falsch;
3. der erste ist falsch, der zweite ist wahr;
4. beide sind falsch.

Wenn nun der *dritte* dieser Fälle nicht stattfindet, so besteht die Beziehung, die ich durch den *Bedingungsstrich* bezeichnet habe. Der Satz, der den ersten Gedanken ausdrückt, ist der Folgesatz; der Satz, der den zweiten Gedanken ausdrückt, ist der Bedingungssatz. Es sind nun fast 28 Jahre her, seit ich diese Erklärung ausgesprochen habe. Damals glaubte ich, ich brauchte nur anzutippen, und die anderen wüßten alsbald mehr als ich. Und jetzt, nachdem mehr als ein Vierteljahrhundert vergangen ist, hat die große Mehrzahl der Mathematiker keine Ahnung von der Sache, und ebenso wird es bei den Logikern sein. Welche Stumpfheit! Wie erinnert mich dies Verhalten der Gelehrten an das des Ochsen vor dem neuen Tore; er glotzt, er brüllt, er sucht sich seitwärts vorbeizudrücken; aber hindurchgehen, das könnte gefährlich sein. Daß es zunächst befremdlich ist, glaube ich gern, aber wenn es das nicht wäre, wäre es längst gefunden. Muß man sich denn durch den ersten flüchtigen Eindruck bestimmen lassen? Hat man gar keine Zeit, darüber nachzusinnen? Nein, denn was könnte Gescheites dabei herauskommen! Man vermißt wahrscheinlich eine innere Verbindung zwischen den Gedanken; es will nicht recht einleuchten, daß von dem Gedanken nur in Betracht kommen soll, ob er wahr oder falsch ist, gar nicht eigentlich der Gedankeninhalt selbst.“ (Frege 1973, S. 77)

Es sei hervorgehoben, daß Frege bei der Einführung der Subjunktion auf zwei wichtige Umstände aufmerksam machte. Erstens wies er ausdrücklich darauf hin, daß seine hypothetische Satzverbindung (die Subjunktion) nicht mit der umgangssprachlichen „Wenn ..., so ...“-Verknüpfung identisch ist. Zweitens unterschied er deutlich zwischen einer Subjunktion $A \supset B$

und einem logischen Schluß, bei dem nach der einzigen bei Frege akzeptierten Schlußregel von $A \supset B$ und A auf B geschlossen wird.

Die Fregesche Auffassung der Subjunktion wurde von A. N. Whitehead und B. Russell übernommen und ist in der „Principia Mathematica“ enthalten. „Definition der Implikation: Wenn eine Aussage q aus einer Aussage p folgt, so daß, wenn p wahr ist, auch q wahr sein muß, so sagen wir ‚p impliziert q‘. Der Begriff der Implikation in der Form, wie wir ihn verwenden, läßt sich definieren. Die Bedeutung, die wir im folgenden der Implikation geben, mag auf den ersten Blick etwas künstlich erscheinen, aber obwohl es andere berechtigte Bedeutungen gibt, ist die hier gewählte für unsere Ziele am passendsten. Die wesentliche Eigenschaft, die wir von der Implikation verlangen, ist folgende: ‚Was von einer wahren Aussage impliziert wird, ist wahr‘. Es ist eine Folge dieser Eigenschaft, daß eine Implikation Beweise liefert. Aber diese Eigenschaft bestimmt keineswegs, ob etwas - und wenn, was - durch eine falsche Aussage impliziert wird. Was sie bestimmt ist, daß wenn p die Aussage q impliziert, so kann es nicht sein, daß p wahr und q falsch ist, d. h., es muß gelten, daß entweder p falsch ist oder q wahr ist. Es ist umgekehrt angebrachter zu sagen, daß wenn p falsch ist oder q wahr, so ist ‚p impliziert q‘ wahr. Folglich wird ‚p impliziert q‘ definiert durch ‚Entweder p ist falsch oder q ist wahr‘. Also setzen wir: $p \supset q. = .\sim p \vee q._{Def.}$“ (Whitehead/Russell 1962, S. 94)

Whitehead und Russell nannten die hier definierte Implikation *materiale Implikation,* im Unterschied zu der von ihnen auch verwendeten formalen Implikation der Prädikatenlogik $\forall x(A(x) \supset B(x))$. Diese von ihnen geprägte Bezeichnung ist heute vor allem in der mathematisch orientierten Logikliteratur vorherrschend, obwohl sie in doppelter Hinsicht unglücklich gewählt und irreführend ist. In der Literatur wurde auch mehrfach darauf hingewiesen, daß die Bezeichnung „*materiale* Implikation“ unpassend ist, da bei dieser Verknüpfung gerade vom Inhalt der verknüpften Aussagen bis auf ihren Wahrheitswert abgesehen wird. Unseres Erachtens ist es überhaupt nicht angebracht, im vorliegenden Fall von einer Implikation oder Folgebeziehung zu sprechen. Gemäß der von Russell und Whitehead getroffenen symbolischen Definition ist $\supset$ ein zweistelliger aussagenbildender Operator, und eine Aussage $p \supset q$ ist definitionsgemäß gleichbedeutend mit der zusammengesetzten Aussage $\sim p \vee q$, während die Aussage „aus p folgt logisch q“ bzw. „p impliziert q“ eine ganz andere logische Struktur besitzt, die dann deutlicher wird, wenn wir sie folgendermaßen formulieren: „Aus der Aussage p folgt logisch die Aussage q“ bzw. „Die Aussage p impliziert die Aussage q“. Diese beiden Sätze sind logisch einfache Aussagen mit den beiden Subjekten „die Aussage p“ und „die Aussage q“ und dem zweistelligen Prädikat „aus dem ersten folgt logisch das zweite“ bzw. „das erste impliziert das zweite“. Wenn man also die Aussage $p \supset q$ als „aus p folgt logisch q“ oder als „p impliziert q“ liest, so verwechselt man einen aussagenbildenden logischen Operator und ein zweistelliges Prädikat. Bei den Aussagen „$p \supset q$“ und „aus p folgt logisch q“ ist von ganz verschiedenen Gegebenheiten die Rede. Während sich die Aussage „$p \supset q$“ auf die Sachverhalte bezieht, die mit p und q ausgedrückt sind, und behauptet, daß $\sim p \vee q$ gilt, wird in der Aussage „aus p folgt logisch q“ über sprachliche Gebilde, nämlich über die Aussagen p und q gesprochen. Um die genannte Verwechslung auch in der Bezeichnung zu vermeiden, nennen wir den Operator $\supset$ *Subjunktion* und unterscheiden ihn von der *logischen Folgebeziehung oder Implikation*, für die wir das Zeichen $\vdash$ verwenden.

Trotzdem hat das von Russell und Whitehead vorgeschlagene Verfahren zum Aufbau der allgemeinen Theorie der logischen Folgebeziehung vernünftige Gründe. Die Regeln der logischen Folgebeziehung werden mit dem Ziel ausgearbeitet, daß man aus wahren Voraussetzungen stets wahre Folgerungen erhält. Die klassische Subjunktion erfüllt diese Forderung vollkommen: Wenn $A \supset B$ wahr ist und A wahr ist, so ist B auf Grund der Definition von $\supset$ wahr. Wenn die Formel $A \supset B$ also eine Tautologie oder ein Theorem des klassischen Aussagenkalküls ist, und wir verwenden sie als Schlußregel, so können wir aus einem wahren A nicht ein falsches B erhalten. Unter solchen Bedingungen ist B stets wahr.

Die klassische Theorie der logischen Folgebeziehung ist widerspruchsfrei und vollständig. Wenn man zu den Axiomen des klassischen Aussagenkalküls eine Formel hinzufügt, die in ihm nicht beweisbar ist, so erhält man ein widersprüchliches System. Die klassische allgemeine Theorie der logischen Folgebeziehung ist also eine maximal umfassende widerspruchsfreie Theorie für Aussagen mit der betrachteten Struktur.

Die klassische Subjunktion besitzt aber auch folgende Eigenschaften. Nach ihrer Definition in der Aussagenalgebra ist der Ausdruck $A \supset B$ eine Wahrheitsfunktion der Aussagen A und B. Um festzustellen, ob $A \supset B$ wahr ist oder nicht, genügt es, die Wahrheitswerte von A und B unabhängig voneinander zu ermitteln. Nach der Definition von $\supset$ gilt:

1) Wenn B wahr ist, so ist $A \supset B$ bei beliebigem A wahr;
2) wenn A falsch ist, so ist $A \supset B$ bei beliebigem B wahr.

Wenn wir die Subjunktion als Zeichen der logischen Folgebeziehung interpretieren, so müssen wir die angegebenen Eigenschaften der Subjunktion folgendermaßen deuten:

1) Eine wahre Aussage folgt aus einer beliebigen Aussage;
2) aus einer falschen Aussage folgt eine beliebige Aussage.

Beispielsweise sind die folgenden Subjunktionen wahr:

$(2 \cdot 2 \neq 4) \supset$ (Die Erde ist ein Würfel),
$(2 \cdot 2 \neq 4) \supset$ (Das Atom ist teilbar),
(Die Zahl 4 ist eine Primzahl) $\supset$ (Das Elektron ist positiv geladen),
(5 ist ohne Rest durch 2 teilbar) $\supset$ (Das Elektron ist negativ geladen).

Wenn wir die Subjunktion als logische Folgebeziehung deuten, erhalten wir Behauptungen wie:

Daraus, daß $2 \cdot 2 \neq 4$, folgt, daß die Erde ein Würfel ist.
Daraus, daß 5 ohne Rest durch 2 teilbar ist, folgt, daß das Elektron negativ geladen ist.

Solche Behauptungen stehen aber nicht im Einklang mit der intuitiven Auffassung der logischen Folgebeziehung.

Ein analoges Ergebnis erhält man auf eine andere Weise. Im klassischen Aussagenkalkül sind die Formeln $A \supset (B \supset A)$ und $\sim A \supset (A \supset B)$ beweisbar (sie sind Tautologien in der zweiwertigen Algebra). Wir interpretieren sie als Regeln in der logischen Folgebeziehung und erhalten die Folgerungen:

1) Wenn A wahr ist, so ist $B \supset A$ wahr, wobei B eine beliebige Aussage ist, d. h., ein wahres A folgt aus einem beliebigen B;
2) wenn A falsch ist, so ist $\sim A$ wahr und $A \supset B$ wahr, wobei B ebenfalls eine beliebige Aussage ist, d. h., aus einem falschen A folgt ein beliebiges B.

Die eben formulierten Folgerungen aus der Interpretation der klassischen Subjunktion (der materialen Implikation) als logischer Folgebeziehung erhielten die Bezeichnung *Paradoxien der materialen Implikation*. Diese Bezeichnung ist irreführend, denn faßt man die materiale Implikation (Subjunktion) als Operator auf, dann haben die genannten Formeln nichts Paradoxes an sich. Die Paradoxien entstehen nur, wenn man die Subjunktion als logische Folgebeziehung deutet. Bei dieser Deutung ergeben sich aber weitaus mehr Paradoxien. Es seien einige von ihnen angeführt:

1. $p \equiv {\sim}p \supset p$
   Da „${\sim}p \supset p$“ in der Logik häufig als „p ist notwendig“ gedeutet wird, besteht keine Möglichkeit, zwischen p und „p ist logisch notwendig“ zu unterscheiden.
2. ${\sim}p \equiv p \supset {\sim}p$
   Da „$p \supset {\sim}p$“ häufig als „p ist logisch unmöglich“ gedeutet wird, sind ${\sim}p$ und „p ist logisch unmöglich“ äquivalent.
3. ${\sim}(p \supset q) \supset (p \supset {\sim}q)$
   Wenn q nicht aus p folgt, so folgt ${\sim}q$ aus p.
4. ${\sim}(p \supset {\sim}q) \supset (p \supset q)$
   Wenn ${\sim}q$ nicht aus p folgt, so folgt q aus p.
5. ${\sim}(p \supset q) \supset (q \supset p)$
   Wenn q nicht aus p folgt, so folgt p aus q.
6. ${\sim}(p \supset q) \supset ({\sim}p \supset q)$
   Wenn q nicht aus p folgt, so folgt q aus ${\sim}p$.
7. ${\sim}(p \supset q) \supset (q \supset {\sim}p)$
   Wenn q nicht aus p folgt, so folgt ${\sim}p$ aus q.
8. ${\sim}(p \supset q) \supset ({\sim}p \supset {\sim}q)$
   Wenn q nicht aus p folgt, so folgt ${\sim}q$ aus ${\sim}p$.
9. $(p \supset q) \vee (p \supset {\sim}q)$
   q folgt aus p, oder ${\sim}q$ folgt aus p.
10. $(p \supset q) \vee ({\sim}p \supset q)$
    q folgt aus p, oder q folgt aus ${\sim}p$.

Die Reaktionen auf diese Paradoxien waren sehr unterschiedlich. Wir wollen drei verschiedene Reaktionsrichtungen kurz charakterisieren. Die erste ist zwar für die Logik theoretisch belanglos, aber auch heute noch weit verbreitet. Ihre Vertreter sehen in den Paradoxien einen Grund mehr, die ganze mathematische Logik abzulehnen, und sie ersparen sich damit die Anstrengung, Kenntnisse in diesem Wissensbereich zu erwerben. Als Beleg für diese Richtung mag das folgende Zitat dienen, in dem auf solche Beispielsätze für die Subjunktion wie „Wenn $2 \cdot 2 = 4$, so ist der Schnee weiß“ Bezug genommen wird: „Alle Aussagen sind nur Symbole der ‚Wahrheit‘ oder ‚Falschheit‘, und deshalb ist es ohne Bedeutung, welche Aussagen wir überhaupt verbinden. Wie aus dem Beispiel hervorgeht, werden beliebige Grundaussagen verbunden, die untereinander in keiner Beziehung stehen, gemäß dem Prinzip: ‚Im Garten ist der Holunder und in Kiew ist mein Onkel.‘ Ein solches Verfahren ist für das Buch von Hilbert und Ackermann kennzeichnend. Die Autoren verbergen ihre idealistischen Ansichten hinter speziellen mathematischen Berechnungen und versuchen, jeder Logik die mathematische Logik zu unterschieben.“ (Kuczynski/Steinitz 1952, S. 101) Trotz ihrer theoretischen Bedeutungslosigkeit für die Logik wirkt sie sich aber hindernd bei der Anwendung logischer Methoden in anderen philosophischen Disziplinen aus und trägt zur Senkung des allgemeinen philosophischen Niveaus bei.

Da die klassische zweiwertige Aussagenlogik syntaktisch vollständig ist, d. h. nicht ohne Widerspruch erweitert werden kann, war für die anderen beiden Richtungen der Weg zur Konstruktion eines paradoxienfreien Systems der logischen Folgebeziehung schon vorgezeichnet; er konnte nur in einer Einengung der klassischen Aussagenlogik bestehen. Eine weitere Richtung, die wir die *nichtklassische* nennen wollen, verwarf den klassischen Aussagenkalkül als Basis für eine paradoxienfreie Theorie der logischen Folgebeziehung und konstruierte konkurrierende nichtklassische Aussagenkalküle, in denen anstelle der klassischen Subjunktion andere

Implikationsoperatoren auftreten. Diese Richtung erbrachte im einzelnen interessante logische Ergebnisse, sie löste aber nicht die Problematik der logischen Folgebeziehung. Wir gehen im folgenden auf sie ein. Die dritte Richtung versuchte, die Problematik der logischen Folgebeziehung auf der Basis der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik zu lösen. Wir nennen sie deshalb die *klassische.* Um die Paradoxien der Folgebeziehung auszuschließen, mußten innerhalb dieser Richtung - offenbar außer der Bedingung, daß bei der logischen Folgebeziehung wahre Voraussetzungen stets wahre Folgerungen ergeben müssen, die ja auch bei der Deutung von Russell und Whitehead erfüllt ist - noch zusätzliche Bedingungen hinsichtlich einer gültigen Regel der logischen Folgebeziehung gestellt werden.

Einen wesentlichen Schritt bei der Herausarbeitung solcher Bedingungen leistete K. Ajdukiewicz. Er schrieb 1921: „All das, was gewöhnlich über die Folgebeziehung (entailment) in einführenden Lehrbüchern der symbolischen Logik gesagt wird, z. B. daß aus a die Aussage b folgt, wenn es unmöglich ist, daß b falsch, während a wahr ist usw., ist bloß eine Erklärung von außerlogischem Charakter; es ist ein Appell an unsere Intuition, ähnlich, als wenn wir sagen, daß drei Punkte eine gerade Linie bilden, wenn wir sie von einer entsprechenden Position aus als einen Punkt sehen können. Unsere Intuition ist in beiden Fällen unterschiedlich, trotzdem wird an sie appelliert. Es ist nicht immer der Fall, daß wenn wir ‚$a \supset b$' schreiben, aus ‚a' tatsächlich ‚b' (im rein logischen Sinne) folgt. Dies ist nur der Fall, wenn ‚$a \supset b$' ein logisches Theorem ist ... Wir wiederholen noch einmal, daß aus a (logisch) b folgt, wenn es unter den Theoremen oder Axiomen der Logik eine Folge von Symbolen ‚$a \supset b$' gibt." (Ajdukiewicz 1966, S. 18) Diese Auffassung der logischen Folgebeziehung, nach der in den Tautologien (Theoremen) der klassischen Aussagenlogik die Subjunktion nur dann als Folgebeziehung gedeutet werden darf, wenn sie als Hauptoperator auftritt, wurde zu der heute am stärksten verbreiteten. Sie entspricht beispielsweise genau der Carnapschen Auffassung der L-Implikation.

Wenn wir im weiteren von der klassischen Theorie der Folgebeziehung sprechen, so meinen wir immer den auf Ajdukiewicz zurückgehenden Standpunkt. Bei dieser Deutung der logischen Folgebeziehung werden zwar die oben erwähnten Paradoxien der logischen Folgebeziehung vermieden, es treten aber andere Paradoxien auf. So erhält man beispielsweise aus den Tautologien der Aussagenlogik $p \wedge \sim p \supset q$ und $q \supset p \vee \sim p$, daß aus einer logisch falschen Aussage jede beliebige Aussage logisch folgt und daß eine logisch wahre Aussage aus einer beliebigen Aussage logisch folgt. Beim praktischen Schließen sind diese Paradoxien (wie auch die oben behandelten) im allgemeinen nicht schädlich, insbesondere führen sie nicht zu einem Widerspruch, da man vernünftigerweise keine logisch falsche Prämisse setzt und nicht auf eine logisch wahre Aussage schließt. Trotzdem gibt es wichtige Gründe für den Aufbau einer Theorie der Folgebeziehung, die auch diese Paradoxien nicht enthält. Beim logischen Schließen ist sie erforderlich, wenn man es mit widersprüchlichen wissenschaftlichen Theorien zu tun hat. Darüber hinaus ist eine paradoxienfreie Theorie der Folgebeziehung als Basistheorie für den Aufbau anderer Bereiche der Logik in vielen Fällen wünschenswert.

Wenn Ajdukiewicz' Auffassung der logischen Folgebeziehung die Problematik auch nicht löst, so enthält sie doch implizit einen wesentlichen Gedanken, der in jeder Theorie der logischen Folgebeziehung berücksichtigt werden muß. Wenn wir uns fragen, warum in den Tautologien der klassischen Aussagenlogik nur der Hauptoperator der Subjunktion als logische Folgebeziehung gedeutet werden darf, so ist die Antwort darauf trivial. Denn eine Aussage über die logische Folgebeziehung hat die Struktur „Aus der Aussage A folgt logisch die Aussage B" mit den Subjekten „die Aussage A" und „die Aussage B" und dem zweistelligen Prädikat „aus dem ersten folgt logisch das zweite". In Aussagen über die Folgebeziehung auf aussagenlogischer Ebene kann das Zeichen der Folgebeziehung also nur einmal vorkommen. Obwohl diese Tatsache offensichtlich ist, wird sie von vielen Logikern nicht berücksichtigt.

Wir unterstreichen noch einmal, daß es sich bei den auftretenden Paradoxien nicht um eine Widersprüchlichkeit der klassischen Theorie der Folgebeziehung (in beiden Deutungen) handelt (sie ist widerspruchsfrei), sondern um eine Nichtübereinstimmung einiger ihrer Behauptungen mit dem intuitiven (üblichen) Verständnis der logischen Folgebeziehung, das sich unabhängig von und vor der klassischen Logik herausgebildet hat. Dieses intuitive Verständnis schließt offenbar nicht nur die Forderung ein, daß man aus wahren Voraussetzungen stets wahre Folgerungen erhält (wie wir sahen, erfüllt die materiale Implikation diese Forderung), sondern noch irgendetwas Zusätzliches. Und dieses Zusätzliche erfüllt die materiale Implikation offensichtlich nicht. Man nennt diese zusätzliche Forderung *Sinnzusammenhang* (oder *inhaltlicher Zusammenhang*) zwischen Voraussetzung und Folgerung. Wir erklären kurz, was gemeint ist.

Die Gewohnheiten bei der Gewinnung der einen Aussage aus anderen auf rein logischem Wege (die Gewohnheiten des Schließens, des Schlußfolgerns, des Ableitens usw.) bilden sich bei den Menschen so heraus, daß es für den Akt des Schließens selbst bedeutungslos ist, ob die Voraussetzungen wahr sind oder nicht. Die Menschen können Schlüsse ziehen und tun das auch häufig, ohne zu wissen, ob die Aussagen, aus denen sie logische Folgerungen ziehen, wahr sind oder nicht. Welche Folgerungen man aus gegebenen Voraussetzungen erhält, hängt davon ab, welche Termini, Aussagen und logischen Operatoren in ihnen vorkommen und wie sie gegenseitig angeordnet sind. Wenn eine gewisse Gesamtheit von Voraussetzungen gegeben ist, so kann man selbst dann nicht beliebige Aussagen als Folgerungen aus ihr erhalten, wenn sich mit der Zeit herausstellt, daß es unter den Voraussetzungen falsche Aussagen gab. Analog kann man nicht aus beliebigen Voraussetzungen eine gegebene Folgerung herleiten, selbst wenn sie sich als wahr erweist. So gibt es keine logischen Regeln, die es gestatten, aus der Aussage „$2 \cdot 2 \neq 4$“ als logische Folgerung die Aussagen „Das Elektron ist positiv geladen“, „Das Elektron ist negativ geladen“, „Die Erde ist ein Würfel“, „Waren haben einen Wert“ usw. zu erhalten.

Offensichtlich fordert die Intuition von der logischen Folgebeziehung noch zusätzlich, daß die Voraussetzungen und die Folgerungen irgendein gemeinsames „Material“ - Termini, Aussagen usw. - enthalten. Wenn die Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ gegeben sind und es steht die Aufgabe, aus ihnen die zulässigen Folgerungen zu ziehen oder die möglichen Voraussetzungen zu ermitteln, aus denen sie als Folgerung zu gewinnen sind, so beschäftigen wir uns für die Lösung dieser Aufgabe nicht mit der Überprüfung von $A_1, \ldots, A_n$, sondern wir untersuchen ihre Struktur. Wir ermitteln, welche Termini, Aussagen und Operatoren in ihnen vorkommen und wie diese Elemente gegenseitig angeordnet sind. Erst danach (oder unter dieser Bedingung) vollziehen wir Schlüsse. Erst nachdem die Ableitungen durchgeführt sind, gewinnt die Frage nach den Wahrheitswerten der Aussagen Bedeutung. Wenn die Voraussetzungen wahr sind, so werden auch die gewonnenen Folgerungen als wahr akzeptiert; wenn man unter den Folgerungen falsche Aussagen erhält, so gibt es auch unter den Voraussetzungen falsche Aussagen. Bei den Paradoxien der materialen Implikation verhält es sich umgekehrt: Die Wahrheitswerte der Aussagen sind vorher bekannt, wobei sie als Voraussetzungen falsch und als Folgerungen wahr sind.

Die Paradoxien der materialen Implikation führen praktisch nicht zu negativen Folgen in der Erkenntnis. Bei gegebenen Aussagen mit nicht bekannten Wahrheitswerten und der Aufgabe, ihre möglichen Folgerungen oder Voraussetzungen zu suchen, sind die paradoxen Behauptungen der klassischen Theorie der logischen Folgebeziehung praktisch nutzlos, d. h., man kann sie einfach nicht anwenden. Wenn hingegen die Wahrheitswerte gegebener Aussagen bekannt sind, so verlieren diese Behauptungen gleichfalls jeden praktischen Sinn: Offenbar falsche Aussagen werden nicht als Grundlage für die Deduktion gewählt, und offenbar wahre Aussagen bleiben wahr, ganz gleich, welche anderen Aussagen man zu ihren Voraussetzungen erklärt. Dieser Umstand entkräftet jedoch nicht die oben dargelegten Überlegungen. Jedenfalls wurden in der Logik Versuche unternommen, eine Theorie der logischen Folgebeziehung ohne die der materialen Implikation analogen Paradoxien aufzubauen.

Die wichtigsten nichtklassischen Theorien der logischen Folgebeziehung sind die verschiedenen intuitionistischen Logiksysteme, die Systeme der strikten Implikation von C. I. Lewis, das System der analytischen Implikation von W. T. Parry, die Systeme der strengen Implikation von W. Ackermann und deren Modifikationen in den Systemen E (entailment) von A. R. Anderson und N. D. Belnap. Die intuitionistische Logik behandeln wir ausführlich in einem besonderen Kapitel, da sie aus ganz anderen Gründen als die hier betrachteten Systeme aufgebaut wurde und in ihr die meisten der hier betrachteten paradoxen Formeln beweisbar sind.

7.2 Ein System der strikten Implikation

Von dem amerikanischen Logiker C. I. Lewis wurden verschiedene Systeme der strikten Implikation konstruiert, in denen die Paradoxien der materialen Implikation ausgeschlossen werden sollten (Lewis/Langford 1959). Die Systeme der strikten Implikation waren vor allem für die Entwicklung der modalen Logik von Bedeutung. In unserem Zusammenhang der logischen Folgebeziehung ist der Unterschied der verschiedenen Systeme der strikten Implikation nicht relevant. Wir geben eine rein aussagenlogische Darstellung eines Systems der strikten Implikation *SI* (Schmidt 1960). Bei der Beschreibung des Systems *SI* und der folgenden Systeme der nichtklassischen Richtung verwenden wir die Symbolik der klassischen Aussagenlogik und ergänzen deren Alphabet durch einen besonderen Implikationsoperator $\rightarrow$, der dann die jeweilige nichtklassische Implikation - in diesem Abschnitt die strikte Implikation - darstellt. Zur Formeldefinition der klassischen Aussagenlogik fügen wir folgenden Punkt hinzu: Wenn A und B Formeln sind, so ist $(A \rightarrow B)$ eine Formel. Ansonsten verwenden wir die gleichen Definitionen und Abkürzungen wie in der klassischen Aussagenlogik.

Axiome von *SI*:

A1. $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$
A2. $p \wedge q \rightarrow p$
A3. $p \rightarrow p \wedge p$
A4. $(p \wedge q) \wedge r \rightarrow p \wedge (q \wedge r)$
A5. $p \rightarrow \sim\sim p$
A6. $\sim\sim p \rightarrow p$
A7. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
A8. $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
A9. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
A10. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge \sim r \rightarrow \sim q)$
A11. $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Schlußregeln von *SI*:

R1. *Einsetzungsregel* für Variablen.
R2. *Abtrennungsregel* des Antezedents.
R3. (Ersetzbarkeitsregel). Wenn $(A \rightarrow B)$ und $(B \rightarrow A)$, so $C \rightarrow C\,[A/B]$.
R4. (Vereinigungsregel). Aus A und B erhält man $A \wedge B$.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß das System *SI* widerspruchsfrei ist (alle Theoreme sind Tautologien in der zweiwertigen Aussagenalgebra, wenn wir $\rightarrow$ als $\supset$ interpretieren).

Von prinzipiellem Interesse sind für uns die Eigenschaften von *SI*, die in folgenden Theoremen fixiert sind.

MT1. Die Formel $p \to (q \to p)$ ist kein Theorem von *SI*.

Beweis: Wir wählen die folgende vierwertige Interpretation der Operatoren $\sim$, $\wedge$ und $\to$ mit den ausgezeichneten Wahrheitswerten 1 und 2 (Lewis/Langford 1959, S. 493):

A	$\sim A$
1	4
2	3
3	2
4	1

$A \wedge B$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

$A \to B$	1	2	3	4
1	2	4	4	4
2	2	2	4	4
3	2	4	2	4
4	2	2	2	2

Bei dieser Interpretation sind alle Axiome Tautologien, und die Schlußregeln vererben den tautologischen Charakter von Formeln. Hingegen nimmt die Formel $p \to (q \to p)$ bei $p = 3$ und $q = 3$ den nichtausgezeichneten Wert 4 an, sie ist also in dem Axiomensystem nicht herleitbar und kein Theorem von *SI*.

Aus dem Beweis von *MT1* folgt gleichfalls:

MT2. Die Formeln $(p \to (q \to p))\ \{p/A\}$ und $(p \to (q \to p))\ \{q/A\}$ sind keine Theoreme von *SI*.

MT3. Die Formel $\sim p \to (p \to q)$ ist kein Theorem von *SI*.

Beweis: Bei der oben angegebenen vierwertigen Interpretation nimmt sie bei $p = 2$ und $q = 2$ den nichtausgezeichneten Wert 4 an, ist deshalb keine Tautologie und folglich kein Theorem von *SI*.

MT4. Die Formeln $(\sim p \to (p \to q))\ \{p/A\}$ und $(\sim p \to (p \to q))\ \{q/A\}$ sind keine Theoreme von *SI*.

Aus *MT1-MT4* folgt, daß man bei einer Interpretation von *SI* als Theorie der logischen Folgebeziehung die Paradoxien der klassischen Theorie der logischen Folgebeziehung, die wir bei der Russellschen Deutung behandelt haben, nicht erhält.

T1. In *SI* ist aber die Formel $\sim p \wedge p \to q$ beweisbar.

1. $(\sim p \wedge \sim q \to \sim p) \to (\sim p \wedge \sim\sim p \to \sim\sim q)$ (*A10*, *R1*)
2. $\sim p \wedge \sim q \to \sim p$ (*A2*, *R1*)
3. $\sim p \wedge \sim\sim p \to \sim\sim q$ (*R2*, 1., 2.)
4. $\sim p \wedge p \to \sim\sim q$ (3., *R3*, *A5*, *A6*)
5. $\sim p \wedge p \to q$ (4., *A5*, *A6*, *R1*, *R3*)

In *SI* ist ebenfalls beweisbar:

T2. $q \to \sim(\sim p \wedge p)$

(man erhält dieses Theorem aus *T1* durch Anwendung von *A9*, *R2*, *R1*, *R3*, *A5* und *A6*).

Bei einer Interpretation von *T1* und *T2* als Regeln der logischen Folgebeziehung erhalten wir:

1) Aus einem Widerspruch folgt eine beliebige Aussage.
2) Eine logisch wahre Aussage folgt aus einer beliebigen.

Da in der ursprünglichen Variante von *SI* ein Widerspruch $\sim p \wedge p$ als eine unmögliche Aussage definiert wurde und seine Negation $\sim(\sim p \wedge p)$ als eine notwendige Aussage, gab man den angegebenen Folgerungen bei dieser Interpretation von *SI* folgende Form:

1) Aus einer unmöglichen Aussage folgt jede beliebige.
2) Eine notwendige Aussage folgt aus jeder beliebigen.

Diese Interpretation von *T1* und *T2* erhielt die Bezeichnung *Paradoxien der strikten Implikation*. Die Gründe für eine intuitive Ablehnung solcher Behauptungen sind den oben dargestellten analog. Auch das Verhältnis zu diesen Paradoxien ist analog.

Lewis hat die Problematik der logischen Folgebeziehung nicht befriedigend gelöst. Er ging bei der Konstruktion seiner Systeme der strikten Implikation zwar von dem richtigen Gedanken aus, daß für eine Bestimmung der logischen Folgebeziehung die Forderung „Aus wahren Voraussetzungen muß man wahre Folgerungen erhalten“ nicht ausreichend ist, daß vielmehr ein inhaltlicher Zusammenhang zwischen Voraussetzung und Folgerung bestehen müsse. Leider präzisierte er nicht, was er unter diesem inhaltlichen Zusammenhang versteht. Er glaubt ihn aber dadurch realisieren zu können, daß er die Definition der klassischen Subjunktion $A \supset B \equiv_{Def} \sim(A \wedge \sim B)$ bei seiner strikten Implikation dahingehend verstärkt, daß er fordert, $A \wedge \sim B$ dürfe nicht nur nicht gelten, sondern müsse unmöglich sein: $A \to B \equiv_{Def} \sim\Diamond(A \wedge \sim B)$, wobei $\Diamond$ der Möglichkeitsoperator ist.

Damit ist auch schon auf einen ersten Mangel der Systeme von Lewis aufmerksam gemacht, der versucht, die logische Folgebeziehung mit Hilfe modaler Termini zu definieren. Unseres Erachtens ist das methodisch nicht korrekt. Eine Definition der aussagenlogischen Folgebeziehung ist eine Grundvoraussetzung, um modale Termini überhaupt erst einführen zu können. Ein zweiter Mangel besteht darin, daß in seinen Systemen zwar die im Zusammenhang mit der Auffassung von Russell und Whitehead diskutierten Paradoxien ausgeschlossen sind, nicht jedoch die Paradoxien der klassischen Folgebeziehung in der Deutung von Ajdukiewicz. Ein dritter Mangel besteht schließlich darin, daß die strikte Implikation als logischer Operator verstanden wird und in beweisbaren Formeln der Aussagenlogik mehrmals vorkommen kann.

7.3 Ein System der strengen Implikation

Zu den Systemen der strengen Implikation gehören Aussagenkalküle, in denen nicht nur Paradoxien der materialen Implikation, sondern auch die der strikten Implikation ausgeschlossen werden (Ackermann 1956). Wir bezeichnen sie als *SIA*. Wir betrachten ein System *SIA* mit folgenden Axiomen und Schlußregeln.

Axiome von *SIA*:

A1. $p \to p$
A2. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
A3. $(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$
A4. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
A5. $p \wedge q \to p$
A6. $p \wedge q \to q$
A7. $(p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r)$
A8. $p \to p \vee q$
A9. $q \to p \vee q$
A10. $(p \to r) \wedge (q \to r) \to (p \vee q \to r)$
A11. $p \wedge (q \vee r) \to q \vee (p \wedge r)$
A12. $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$
A13. $(p \wedge \sim q) \to \sim(p \to q)$

A14. $p \to \sim\sim p$

A15. $\sim\sim p \to p$.

Schlußregeln von *SIA*:

R1. *Einsetzungsregel* für Variablen.

R2. *Abtrennungsregel.* Aus $A \to B$ und A erhält man B.

R3. *Vereinigungsregel.* Aus A und B erhält man $A \wedge B$.

R4. Aus $\sim A \vee B$ und A erhält man B.

R5. Aus $A \to (B \to C)$ und B erhält man $A \to C$.

MT1. In *SIA* sind die folgenden Formeln keine Theoreme:

1. $A \to (B \to A)$
2. $\sim A \to (A \to B)$
3. $\sim A \wedge A \to B$
4. $B \to \sim A \vee A$.

Für den Beweis von *MT1* benutzen wir eine vierwertige Aussagenalgebra folgender Form: Wahrheitswerte sind 1, 2, 3, 4, ausgezeichnete Werte sind 3 und 4. Negation und Implikation werden durch Tabellen definiert.

A	$\sim A$
1	4
2	3
3	2
4	1

$A \to B$	1	2	3	4
1	3	3	3	3
2	1	3	3	3
3	1	2	3	3
4	1	1	1	3

Die Konjunktion wird als min (A, B) und die Adjunktion als max (A, B) definiert, d. h., die Konjunktion nimmt den kleinsten und die Adjunktion den größten der beiden Argumentwerte an. Alle Theoreme des *SIA* sind bei einer solchen Interpretation Tautologien. Die Formeln 1-4 sind hingegen keine Tautologien.

$$
\begin{array}{llllll}
(A \to (B \to A)) & = 1 & \text{bei} & A = 3 & \text{und} & B = 4; \\
(\sim A \to (A \to B)) & = 1 & \text{bei} & A = 3 & \text{und} & B = 1; \\
(\sim A \wedge A \to B) & = 1 & \text{bei} & A = 3 & \text{und} & B = 1; \\
(B \to \sim A \vee A) & = 1 & \text{bei} & A = 3 & \text{und} & B = 4.
\end{array}
$$

Nach *MT1* kann man im System *SIA* keine Paradoxien erhalten, die denen der materialen und der strikten Implikation analog sind. Trotzdem kann man das System *SIA* nicht als befriedigende Lösung des Problems der logischen Folgebeziehung ansehen. Es gibt viele Gründe dafür, das System *SIA* und auch das System *SI* als mißglückte Lösungsversuche dieses Problems anzusehen. Wir möchten uns hier auf einige beschränken.

Im System *SIA* ist die Formel $(A \vee B) \wedge \sim A \to B$ kein Theorem. In der oben angegebenen vierwertigen Logik nimmt sie bei $A = 3$ und $B = 1$ den Wert 1 an. Vom intuitiven Standpunkt aus ist diese Formel aber vollkommen akzeptabel (die Behauptung „Wenn A oder B und dabei *nicht-A*, so B“ ist als Teil einer Definition von $\vee$ oder als Folgerung aus einer solchen offenbar richtig). So erweist sich der Fortschritt in der einen Hinsicht (Ausschluß paradoxer Formeln) als ein Rückschritt in einer anderen Hinsicht: Es werden logische Regeln verworfen, an deren Berechtigung kein Zweifel besteht (oder zumindest werden keine überzeugenden Argumente für einen solchen Ausschluß angeführt).

Übung:

Zeigen Sie, daß die folgenden Formeln keine Theoreme des Systems *SIA* sind:

$A \wedge B \to (A \to B)$
$A \wedge B \to (B \to A)$
$\sim A \wedge \sim B \to (A \to B)$
$\sim A \wedge \sim B \to (B \to A)$
$\sim A \wedge B \to (A \to B)$
$\sim(A \to B) \to \sim B$
$\sim(A \to B) \to (\sim A \to B)$.

Benutzen Sie dazu die im Text angegebene vierwertige Aussagenalgebra!

7.4 Das System *E* (entailment)

Angeregt durch die Arbeiten von W. Ackermann zur strengen Implikation konstruierten A. R. Anderson und N. D. Belnap ein System der Folgebeziehung E (abgeleitet von dem englischen Wort *entailment*) (Anderson/Belnap 1962, 1963, 1975).

In dem reinen Kalkül der Folgebeziehung (pure calculus of entailment) E werden folgende Axiomenschemata gesetzt:

Folgebeziehung (*entailment*)

E1. $A \to A \to B \to B$
E2. $A \to B \to (B \to C \to (A \to C))$
E3. $A \to (A \to B) \to (A \to B)$

Konjunktion

E4. $A \wedge B \to A$
E5. $A \wedge B \to B$
E6. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$

Beziehung von Modalitäten und Konjunktion

E7. $NA \wedge NB \to N(A \wedge B)$

(N ist hier der Notwendigkeitsoperator und wird folgendermaßen definiert: $NA \equiv_{Def} A \to \to A \to A$)

Adjunktion

E8. $A \to A \vee B$
E9. $B \to A \vee B$
E10. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

Beziehung zwischen Konjunktion und Adjunktion

E11. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee C$

Negation

E12. $A \to \sim A \to \sim A$
E13. $A \to \sim B \to (B \to \sim A)$
E14. $\sim\sim A \to A$

Schlußregeln:

R1. Aus A und $A \to B$ erhält man B.
R2. Aus A und B erhält man $A \wedge B$.

Für ein Teilsystem des Systems E hat J. M. Dunn eine adäquate semantische Deutung gefunden (Dunn 1980). Dieses Teilsystem betrifft die Folgebeziehungen der ersten Stufe des Systems E (the first-degree entailments). Eine Formel $A \to B$ ist dabei eine *Folgebeziehung der ersten Stufe,* wenn die Formeln A und B nur wahrheitsfunktionale Operatoren ($\wedge$, $\vee$, $\sim$) enthalten. Dunn diskutiert zunächst die folgende, von G. H. v. Wright, P. Geach und T. J. Smiley vorgeschlagene Deutung der Folgebeziehung, die von A. R. Anderson und N. D. Belnap *das WGS-Kriterium* genannt wurde (Anderson/Belnap 1975).

Aus A folgt logisch B genau dann, wenn

1. $A \supset B$ eine Einsetzung in eine Tautologie $A' \supset B'$ ist, wobei
2. A' keine Kontradiktion und
3. B' keine Tautologie ist.

Das *WGS*-Kriterium kann nicht als Kriterium für eine gültige logische Folgebeziehung akzeptiert werden, da - wie leicht zu zeigen ist - die logische Folgebeziehung nach diesem Kriterium nicht transitiv ist. Gültig sind nach ihm die beiden Formeln der Folgebeziehung 1) $p \to$ $\to p \wedge (q \vee \sim q)$ und 2) $p \wedge (q \vee \sim q) \to q \vee \sim q$, während die Formel 3) $p \to q \vee \sim q$, die man nach der Transitivitätsregel für $\to$ aus 1 und 2 erhält, nicht gültig ist. C. Lewy will diese Schwierigkeiten beheben (Lewy 1958, 1976), indem er auch die Formel 1 als der Intuition widersprechend verwirft, da nach seiner Auffassung das Konsequent dieser Formel eine partielle Tautologie ist, d. h., daß sie als Konjunktionsglied eine Tautologie enthält. An diese Gedanken von Lewy anknüpfend formuliert Dunn das folgende L-Kriterium für die logische Folgebeziehung:

Aus A folgt logisch B genau dann, wenn

1. $A \supset B$ eine Einsetzung in eine Tautologie $A' \supset B'$ ist, wobei
2. A' keine partielle Kontradiktion und
3. B' keine partielle Tautologie ist.

Die Termini *partielle Kontradiktion* und *partielle Tautologie* wurden von Dunn eingeführt. Bei ihrer Definition verwendet er die analytischen Tableaus von R. M. Smullyan, die er *Wahrheits-* (bzw. *Falschheits-)bäume* nennt. Die Grundidee dieser Wahrheits- (bzw. Falschheits-) bäume besteht darin, von einer beliebigen vorgegebenen Formel nach bestimmten Regeln in Form eines baumartigen Diagramms die Bedingungen zu ermitteln, unter denen die Formel den Wahrheitswert „wahr" (bzw. „falsch") annehmen kann. Diejenigen Äste eines Wahrheits- (bzw. Falschheits-)baumes einer Formel, die sowohl eine Aussagenvariable als auch deren Negat enthalten, geben unmögliche Bedingungen an, und sie werden *geschlossene Äste* genannt, die übrigen *offene*. Sind alle Äste eines Wahrheits- (bzw. Falschheits-)baumes geschlossen, so wird er *geschlossen* genannt. Es werden folgende Regeln zur Herstellung eines Wahrheitsbaumes für die Negation, Konjunktion und Adjunktion gewählt:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}} \qquad \frac{\sim(A \wedge B)}{\sim A \ \sim B} \qquad \frac{A \vee B}{A \ B} \qquad \frac{\sim(A \vee B)}{\begin{array}{c} \sim A \\ \sim B \end{array}} \qquad \frac{\sim\sim A}{A}$$

Die entsprechenden Regeln für die Herstellung eines Falschheitsbaumes sind:

$$\frac{A \wedge B}{A \; B} \qquad \frac{\sim(A \wedge B)}{\begin{array}{c}\sim A\\ \sim B\end{array}} \qquad \frac{A \vee B}{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}} \qquad \frac{\sim(A \vee B)}{\sim A \; \sim B} \qquad \frac{\sim\sim A}{A}$$

Es ist bekannt, daß eine Formel genau dann eine Kontradiktion ist, wenn ihr Wahrheitsbaum geschlossen ist, und genau dann eine Tautologie, wenn ihr Falschheitsbaum geschlossen ist. In Analogie hierzu wird nun definiert, daß eine Formel eine *partielle Tautologie* genau dann ist, wenn ihr Falschheitsbaum mindestens einen geschlossenen Ast besitzt, und eine *partielle Kontradiktion* genau dann, wenn ihr Wahrheitsbaum mindestens einen geschlossenen Ast besitzt. Unter Verwendung dieser Definitionen beweist Dunn das folgende Theorem:

MT1. $A \rightarrow B$ ist eine Folgebeziehung der ersten Stufe des Systems E von Anderson und Belnap genau dann, wenn aus A logisch B gemäß dem L-Kriterium folgt.

Das von Dunn vorgeschlagene L-Kriterium entspricht nicht der intuitiven Auffassung der logischen Folgebeziehung. Dies wird an folgendem Beispiel deutlich. Nach dem L-Kriterium ist die Formel $(A \vee B) \wedge \sim A \rightarrow B$ keine gültige Regel der logischen Folgebeziehung, da die Formel $(A \vee B) \wedge \sim A$ eine partielle Kontradiktion ist und die Gesamtformel $(A \vee B) \wedge \sim A \rightarrow B$ auch nicht durch eine Einsetzung aus einer Formel gewonnen werden kann, die dem L-Kriterium genügt.

Betrachten wir den Wahrheitsbaum der Formel $(A \vee B) \wedge \sim A$:

$$\begin{array}{ccc} & (A \vee B) \wedge \sim A & \\ & \sim A & \\ & A \vee B & \\ \underline{A} & & B. \end{array}$$

Der unterstrichene Ast des Wahrheitsbaumes ist geschlossen, weil er A und $\sim A$ enthält, und die Formel ist eine partielle Kontradiktion. Doch bedeutet das keineswegs, daß der Schluß von $(A \vee B) \wedge \sim A$ auf B nicht gültig ist. Im Gegenteil, der Wahrheitsbaum der Formel $(A \vee B) \wedge \sim A \rightarrow$ $\rightarrow B$ ist gerade eine notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Schlusses. Wenn die Formel $(A \vee B) \wedge \sim A$ wahr ist, so müssen $\sim A$ und $A \vee B$ wahr sein. Der geschlossene Ast des Wahrheitsbaumes der Formel $(A \vee B) \wedge \sim A$ ist also eine notwendige Voraussetzung für den Schluß auf B. Da nach dem L-Kriterium vollkommen akzeptable Regeln der Folgebeziehung verworfen werden, ist das L-Kriterium für die Lösung des Problems der logischen Folgebeziehung nicht brauchbar.

Das L-Kriterium und das von Dunn bewiesene *MT1* erleichtern aber eine Einschätzung des Systems E. Zunächst ist aufschlußreich, daß *MT1* nur für die Folgebeziehung der ersten Stufe gilt. Unseres Erachtens ist das nicht zufällig, denn bei einer inhaltlichen Deutung des Operators $\rightarrow$, beispielsweise in den Axiomen *E1-E3* oder auch in *E6*, müssen verschiedene Vorkommen des gleichen Operators verschiedene inhaltliche Deutungen bekommen.

Mit *MT1* haben wir aber ein allgemeines Kriterium für die im System E beweisbaren Formeln der ersten Stufe. Wenn wir das L-Kriterium als ein adäquates Kriterium für die logische Folgebeziehung ansehen, so müssen wir auch die im System E beweisbaren Formeln der ersten Stufe als adäquate Formalisierung der Folgebeziehung ansehen.

Unseres Erachtens sind aber die Forderungen des L-Kriteriums vom inhaltlichen Standpunkt aus nicht überzeugend. Einer Meinung mit Dunn sind wir, daß man von Tautologien der Aussagenlogik der Form $A \supset B$ ausgehen und dann weitere Forderungen an A und B stellen muß. Betrachten wir zunächst die Punkte 2 und 3 des L-Kriteriums unabhängig vom Punkt

1. Die Forderungen, daß A keine partielle Kontradiktion und B keine partielle Tautologie sein dürfen, sind u. E. zu stark. Wir schließen in unserer Theorie der strikten Folgebeziehung, die später dargestellt wird, nur die Fälle aus, in denen A eine Kontradiktion oder B eine Tautologie ist. Für diesen Ausschluß lassen sich vernünftige Gründe angeben, während das bei den Punkten 2 und 3 des L-Kriteriums nicht der Fall ist. Das L-Kriterium wurde durch ein Studium des zunächst nur syntaktisch aufgebauten Systems E gefunden und nicht auf Grund allgemeiner Erwägungen über die Folgebeziehung aufgestellt.

Betrachten wir wieder die - wie Dunn sagt - „verrufene" („infamous") Beseitigungsregel der Adjunktion. Nach dem L-Kriterium kann man aus den beiden Voraussetzungen $A \vee B$ und $\sim A$ keinen Schluß ziehen. Wir haben im System E für die Adjunktion zwar sehr liberale Einführungsregeln, es fehlt aber eine Beseitigungsregel.

Die strengen Forderungen der Punkte 2 und 3 des L-Kriteriums werden durch den Punkt 1 dieses Kriteriums gemildert. Nach Punkt 1 ist nämlich jede Einsetzung in eine Tautologie $A \supset B$, die den Punkten 2 und 3 genügt, eine korrekte Regel der Folgebeziehung. Vom inhaltlichen Standpunkt ist Punkt 1 des L-Kriteriums nicht einsichtig. Die Einsetzungsregel ist ja eigentlich keine logische Schlußregel im echten Sinne des Wortes. Sie erfüllt in der Logik im wesentlichen die Aufgabe einer Hilfsregel. Sie ist eine Kalkülregel, die es gestattet, aus Tautologien (bzw. Kontradiktionen) neue Tautologien (bzw. Kontradiktionen) zu erhalten. Auf keinen Fall gilt $A \vdash A\{a/B\}$. Durch eine Einsetzung erhalten wir aus Tautologien der Aussagenlogik $A \supset B$, die den Punkten 2 und 3 des L-Kriteriums genügen, wieder Formeln $A' \supset B'$, in denen A' eine partielle Kontradiktion, ja sogar eine Kontradiktion, und B' eine partielle Tautologie bzw. eine Tautologie sein kann. Das L-Kriterium ist inhaltlich nicht einsichtig, zumindest wird keine ausreichende Begründung geliefert, und damit liefert es auch keine semantische Rechtfertigung des Systems E.

Obwohl es in den Systemen der strengen Implikation und dem System E gelungen ist, die bekannten Paradoxien der materialen und der strikten Implikation auszuschließen, bilden diese Systeme keine adäquate Theorie der logischen Folgebeziehung. Erstens werden in ihnen mit den Paradoxien auch vollkommen akzeptable Formeln ausgeschlossen. Dies betrifft insbesondere die Beseitigungsregel der Adjunktion $(A \vee B) \wedge \sim A \rightarrow B$; hingegen ist die problematische Einführungsregel der Adjunktion $A \rightarrow A \vee B$ in ihnen beweisbar. Zweitens sind in diesen Systemen zwar die bekannten Paradoxien ausgeschlossen, aber es gibt bei ihnen kein allgemeines Kriterium für die Paradoxienfreiheit. Es ist also nicht garantiert, daß diese Systeme wirklich paradoxienfrei sind. Drittens wird die logische Folgebeziehung in ihnen wieder als Implikationsoperator gefaßt, der in Axiomen und Theoremen mehrfach vorkommen kann. Aus diesen Gründen sind die betreffenden Systeme keine gelungene Theorie der logischen Folgebeziehung.

7.5 Das System der analytischen Implikation

Ein interessantes System einer analytischen Implikation wurde von W. T. Parry entworfen (Parry 1933). Diesem Kalkül liegt folgende Idee zugrunde: Wenn eine Formel A eine Formel B analytisch impliziert, so kommen in B nur solche Aussagenvariablen vor, die auch in A vorkommen. Auf diese Art wird auf logischer Ebene die Forderung nach einem inhaltlichen Zusammenhang zwischen der Voraussetzung und der Folgerung eines logischen Schlusses realisiert. Wir geben das System von Parry in einer von J. M. Dunn modifizierten Form an (Dunn 1972).

Die Subjunktion (materiale Implikation) wird in üblicher Weise definiert:

$A \supset B \equiv_{Def} \sim A \vee B.$

Für die analytische Implikation werden folgende Axiomenschemata und Schlußregeln gesetzt:

A1. $A \wedge B \to B \wedge A$
A2. $A \to A \wedge A$
A3. $A \to \sim\sim A$
A4. $\sim\sim A \to A$
A5. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A6. $A \vee (B \wedge \sim B) \to A$
A7. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$
A8. $(A \to B \wedge C) \to (A \to C)$
A9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \to (A \wedge C \to B \wedge D)$
A10. $(A \to B) \wedge (C \to D) \to (A \vee C \to B \vee D)$
A11. $(A \to B) \to (A \supset B)$
A12. $(A \leftrightarrow B) \wedge F(A) \to F\,[A/B]$
A13. $F(A) \to (A \to A)$
A14. $A \wedge \sim B \to \sim(A \to B)$
A15. $A \to (\sim A \to A)$

In *A12* und *A13* steht $F(A)$ für eine beliebige Formel, die die Teilformel A enthält, und $F\,[A/B]$ steht für eine Formel, die aus $F(A)$ dadurch gewonnen wird, daß die Formel A in $F(A)$ an null oder mehr Stellen ihres Vorkommens durch B ersetzt wird. Das Symbol $\leftrightarrow$ in *A12* steht für die analytische Äquivalenz.

Die Schlußregeln des Systems der analytischen Implikation sind:

R1. Aus A und $A \to B$ erhält man B.
R2. Aus A und B erhält man $A \wedge B$.

Wir wollen den Kalkül der analytischen Implikation hier nicht im Detail analysieren. Er stellt schon deshalb keine Lösung des Problems der logischen Folgebeziehung dar, weil in ihm wieder die logische Folgebeziehung (die analytische Implikation) als Operator aufgefaßt wird und in Axiomen und Theoremen mehr als einmal vorkommen kann. Angeführt wurde das System von Parry, weil bei ihm zum ersten Mal der Gedanke ausgesprochen wird, daß in der Folgerung nur solche Variablen vorkommen dürfen, die auch in der Voraussetzung enthalten sind. Dieser Gedanke spielt auch in unseren Systemen der strengen und strikten Folgebeziehung, deren Autoren zur Zeit der Konstruktion ihrer Systeme allerdings die Arbeiten von Parry noch nicht kannten, eine wichtige Rolle.

Im Zusammenhang mit den betrachteten Systemen der Folgebeziehung der nichtklassischen Richtung ergeben sich folgende Fragen:

1. Gibt es irgendwelche Garantien dafür, daß mit dem Ausschluß der oben betrachteten paradoxen Formeln auch beliebige andere paradoxe Formeln nicht beweisbar sind?
2. Gibt es Garantien dafür, daß der Ausschluß der paradoxen Formeln nicht zum Ausschluß von Formeln führt, die nicht paradox sind?
3. Gibt es allgemeine Kriterien, nach denen man für eine beliebige Formel entscheiden kann, ob sie paradox ist oder nicht?
4. Kann man ein logisches System aufbauen, in dem alle paradoxen Formeln nicht beweisbar, alle nichtparadoxen Formeln aber beweisbar sind?

Die Aufzählung solcher Fragen ließe sich noch fortsetzen. Sie alle lassen sich aber ohne eine klare Konzeption bezüglich der Natur der Regeln der logischen Folgebeziehung und ohne eine genaue Definition dessen, was man beim gegebenen Problem als logische Intuition ansieht, nicht beantworten. Ausführlich betrachten wir diese Problematik in dem folgenden Abschnitt.

7.6 Die logische Struktur von Aussagen über die logische Folgebeziehung

Nach dem kritischen Überblick über die klassische Theorie der logischen Folgebeziehung und einiger Systeme der nichtklassischen Richtung stellen wir jetzt eine Theorie der Folgebeziehung dar, die sich wesentlich von der genannten unterscheidet.

Anstelle von „Aus der Aussage A folgt logisch die Aussage B“ verwenden wir das kürzere und anschaulichere Symbol $A \vdash B$, und statt „Aus der Aussage A folgt nicht logisch die Aussage B“ das Symbol $\sim(A \vdash B)$. Wir nennen A die *Voraussetzung* und B die *Folgerung*. Da wir hier nur die logische Folgebeziehung behandeln, lassen wir das Wort „logisch“ weg.

Die Theorie der logischen Folgebeziehung besteht aus Aussagen des Typs $A \vdash B$, die als Axiome akzeptiert werden, oder die man aus Folgerung aus den Axiomen erhält.

Eine Aussage $A \vdash B$ ist eine elementare Aussage, wenn dies auch auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheinen mag, da in ihr ja scheinbar die Aussagen A und B vorkommen. Teile dieser Aussage sind aber nicht die Aussagen A und B selbst, sondern die Termini „die Aussage A“ und „die Aussage B“, die A und B enthalten und sie bezeichnen. Wenn wir den Operator t einführen, der aus einer Aussage A einen Namen dieser Aussage tA bildet, so können wir die Termini „die Aussage A“ und „die Aussage B“ als tA und tB darstellen. Das Symbol $\vdash$ ist hier kein Operator, der die Aussagen A und B verknüpft, sondern das zweistellige Prädikat „Aus der ersten Aussage folgt logisch die zweite“. Eine Aussage über die Folgebeziehung hat folgende logische Form $tA \vdash tB$. Die von uns verwendete Schreibweise $A \vdash B$ ist nur eine Abkürzung für $tA \vdash tB$.

Es wäre also falsch, Aussagen über die logische Folgebeziehung der einen Aussagen aus anderen als zusammengesetzte Aussagen zu betrachten. In $A \vdash B$ wird nicht über die Gegenstände gesprochen, auf die sich A und B beziehen, sondern über den Zusammenhang der Aussagen A und B als besonderen Gegenständen. Aus A und B gebildete, zusammengesetzte Aussagen beziehen sich auf den gleichen Gegenstandsbereich wie die Aussagen A und B. Eine Aussage $A \vdash B$ hingegen steht in keinerlei Beziehung zu dem Gegenstandsbereich, auf den sich A und B beziehen. Den Gegenstandsbereich, auf den sich diese Aussage bezieht, bilden vielmehr A und B selbst als besondere wahrnehmbare Gegenstände.

Obwohl das bisher Gesagte einfach und offensichtlich ist, wird diese Eigenschaft der Aussagen $A \vdash B$ in den meisten uns bekannten Arbeiten zur Theorie der Folgebeziehung ignoriert. Hiervon zeugt schon, daß man zur Beschreibung der Eigenschaften der Folgebeziehung verschiedenartige Implikationen (vor allem $A \supset B$) sucht, die als zusammengesetzte Aussagen interpretierbar sind, daß man $A \vdash B$ mit konditionalen Aussagen „wenn A, so B“ verwechselt usw.

Aus dem Gesagten ergibt sich für die allgemeine Theorie der logischen Folgebeziehung die Folgerung: Da in ihr der Subjekt-Prädikat-Aufbau der Aussagen nicht berücksichtigt wird, darf in den Regeln $A \vdash B$ in A und in B das Prädikat $\vdash$ nicht vorkommen. Wenn deshalb ein logisches System als allgemeine Theorie der logischen Folgebeziehung interpretiert wird, so kann jeweils nur ein Operator in einer in ihm beweisbaren Formel als Zeichen der Folgebeziehung betrachtet werden. Und wenn in solchen Formeln ein als $\vdash$ zu interpretierender Operator mehr als einmal vorkommt, so müssen seine übrigen Vorkommen anders interpretiert werden. Wenn beispielsweise die Formel $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$ als Formel der Folgebeziehung interpretiert wird, so ist eine solche Interpretation $(A \supset B) \vdash (\sim B \supset \sim A)$, während die im Antezedent und Konsequent der Formel vorkommenden Operatoren $\supset$ nicht als $\vdash$ betrachtet werden dürfen.

7.7 Grundprinzipien der Deduktion

Regeln der logischen Folgebeziehung werden mit dem Ziel aufgestellt, daß man aus wahren Voraussetzungen wahre Folgerungen erhält. Sind diese Regeln aber erst einmal ausgearbeitet, so kehrt sich diese Beziehung um, und es gelten folgende Prinzipien:

1) Wenn $A \vdash B$ und dabei A wahr ist, so ist B wahr.
2) Wenn $A \vdash B$ und dabei B falsch ist (oder $\sim B$ wahr ist), so ist A falsch (oder $\sim A$ wahr).

Wir nennen diese Prinzipien *Grundprinzipien der Deduktion*. Auf Grund dieser Prinzipien akzeptieren die Menschen Folgerungen aus wahren Voraussetzungen und verwerfen die Voraussetzungen von falschen Folgerungen. Damit ist die Rolle der Grundprinzipien der Deduktion vollständig erschöpft.

Die Grundprinzipien der Deduktion rechnen wir nicht zu den Regeln der logischen Folgebeziehung, denn in diesen Regeln dürfen überhaupt keine semantischen Termini vorkommen. Sie sind vielmehr Bedingung für ein Aufstellen und für die Anwendung der Regeln der Folgebeziehung. Deshalb dürfen in einem logischen System, das die Klasse der Regeln der logischen Folgebeziehung definiert, keine beweisbaren Formeln vorkommen, die als $A \wedge (A \vdash B) \vdash B$ interpretiert werden. Neben der bereits oben erwähnten Tatsache, daß das Zeichen $\vdash$ in Aussagen der Folgebeziehung nur einmal vorkommen darf, sind hier noch folgende Überlegungen von Bedeutung. Formeln der eben angegebenen Art machen die Grundprinzipien der Deduktion nicht überflüssig. Um B als wahr zu akzeptieren, muß man $A \wedge (A \vdash B)$ als wahr akzeptieren. Wenn wir aber $A \wedge (A \vdash B)$ als wahr akzeptieren, so haben wir auch ohne die Formel $A \wedge (A \vdash B) \vdash B$ das Recht, nach dem ersten Grundprinzip der Deduktion B als wahr anzuerkennen. Die oben angegebene Formel ist also überhaupt überflüssig.

Die Regeln der logischen Folgebeziehung gestatten zu behaupten, daß aus A logisch B folgt. Darüber hinaus ist noch notwendig, B zu akzeptieren, nachdem man A als etwas nicht mehr Erforderliches beiseite läßt. Hierdurch wird ein Fortschreiten der Erörterungen realisiert, das durch die Grundprinzipien der Deduktion gewährleistet wird.

7.8 Regeln der Folgebeziehung und Wahrheitswerte

Manchmal definiert man die logische Folgebeziehung folgendermaßen: Aus A folgt B genau dann, wenn B immer wahr ist, falls A wahr ist. Diese Definition ist aber unzureichend. Sie bestimmt nicht die Klasse der Fälle, in denen die in ihr angegebene Beziehung von A und B gilt. Als Definition der Klasse dieser Fälle wird dann auf die Tautologien der zweiwertigen Logik, die Theoreme des Aussagenkalküls usw. hingewiesen, und man gelangt zu dem Punkt, von dem man ausgegangen ist. Außerdem kann zwischen den Aussagen A und B eine Abhängigkeit bestehen, die dieser Definition genügt, während dabei zwischen A und B keineswegs eine logische Folgebeziehung besteht. Das ist etwa bei Konditionalaussagen „wenn A, so B“ der Fall, die als Ergebnis von empirischen Untersuchungen gewonnen wurden, als Axiome gesetzt wurden oder Teile bzw. Folgerungen von Definitionen sind. In der Aussage „Wenn durch einen Leiter elektrischer Strom fließt, so bildet sich um ihn herum ein Magnetfeld“ folgt beispielweise der zweite Teil der Aussage nicht logisch aus dem ersten.

Die logische Folgebeziehung zu definieren bedeutet, die Fälle aufzuzählen, in denen die einen Aussagen aus anderen logisch folgen, d. h., es sind die Regeln der logischen Folgebeziehung selbst aufzuzählen. Dabei sind die Beziehungen der Wahrheitswerte der Aussagen zu berücksichtigen, damit die Grundprinzipien der Deduktion erfüllt sind. Dies ist aber nur eine Bedingung für die Aufstellung der Regeln der Folgebeziehung und noch nicht deren Definition. Außerdem handelt es sich nur um eine der Bedingungen. Sie ist notwendig, aber nicht hinreichend.

In jedem Bereich der Logik wird eine Klasse von Regeln der Folgebeziehung für die Aussagenstrukturen aufgestellt, die in diesem Bereich betrachtet werden. Für diese Strukturen werden auch Definitionen der Wahrheitswerte eingeführt, so daß diese Seite der Sache kein Problem darstellt. Prinzipielle Bedeutung hat hier die Tatsache, daß die Zahl der Wahrheitswerte keinen Einfluß auf die Klasse der Regeln der logischen Folgebeziehung hat. Für die Aufstellung dieser Regeln ist nur wichtig, daß man aus wahren Voraussetzungen wahre Folgerungen erhält (das zweite Prinzip der Deduktion kann man als Folgerung des ersten ansehen). Welche Wahrheitswerte neben dem Wert „wahr“ und seiner Negation noch möglich sind, spielt hier keine Rolle.

Betrachten wir z. B. die Regel $A \wedge B \vdash A$. Um diese Regel aufzustellen, war folgende Definition des Prädikates v für Aussagen mit dem Operator $\wedge$ nötig:

$(A \wedge B) = v$ genau dann, wenn $A = v$ und $B = v$.

Aus der Definition ist ersichtlich: wenn $(A \wedge B) = v$, so $A = v$; wenn $A \neq v$, so $(A \wedge B) \neq v$. Wenn diese Regel aber erst einmal akzeptiert ist, so spielt die Zahl der Wahrheitswerte, die wir den Aussagen zuschreiben, schon keine Rolle mehr. Außerdem muß dieses Zuschreiben von Wahrheitswerten selbst damit abgestimmt werden, daß die betrachtete Regel akzeptiert ist. Insbesondere müssen Fälle ausgeschlossen werden, in denen $A \wedge B$ der Wert v zugeschrieben wird, während A dabei einen von v verschiedenen Wert zugeschrieben bekommt.

Im Falle von drei und mehr Wahrheitswerten hängt es von den vorhandenen Regeln der Folgebeziehung ab, auf welche Weise den Aussagen Wahrheitswerte zugeschrieben werden, und nicht umgekehrt.

7.9 Sinnzusammenhang

Wenn $A \vdash B$ gilt, so wird vorausgesetzt, daß A und B nicht nur bezüglich der Wahrheitswerte, sondern auch bezüglich des Sinns verknüpft sind.

D1. Wir nehmen an, daß der **Sinn einer Aussage** A der Person, die sie verwendet, bekannt ist genau dann, wenn bekannt ist, was alle in A vorkommenden Termini $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ bedeuten, und wenn die Eigenschaften aller in A vorkommenden logischen Operatoren $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 1)$ bekannt sind.

Beispielsweise ist der Sinn der Aussage „Alle geraden Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbar“ genau dann bekannt, wenn der Person, die diese Aussage verwendet, bekannt ist, was die Termini „gerade Zahl“ und „ohne Rest durch 2 teilbar“ bedeuten, sowie welche Eigenschaften der logische Operator „alle“ und der Prädikationsoperator hat, der hier durch das Wort „sind“ ausgedrückt wird. Da wir hier die Regeln der Folgebeziehung auf der Ebene der allgemeinen Theorie der Folgebeziehung betrachten, in der die Aufgliederung der Aussagen in Subjekte und Prädikate (in Termini) und in Operatoren des Prädizierens nicht berücksichtigt wird, ist es angebracht, die eben angegebene Definition auf einfache Aussagen zu beziehen, die nur in Termini und Operatoren aufgegliedert sind und keine anderen Aussagen als Bestandteile enthalten. Für zusammengesetzte Aussagen bietet sich folgende Definition an:

D2. Wir nehmen an, daß der **Sinn einer zusammengesetzten Aussage** A genau dann bekannt ist, wenn der Sinn aller in A vorkommenden einfachen Aussagen $B_1, \ldots, B_n$ $(n \geq 1)$ und die Eigenschaften aller in A vorkommenden logischen Operatoren $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 1)$ bekannt sind.

Beispielsweise ist der Sinn der Aussage $(A \vee B) \supset C$ genau dann bekannt, wenn der Sinn der Aussagen A, B, C und die Eigenschaften der Operatoren $\vee$ und $\supset$ bekannt sind.

D3. Die in einer gegebenen Aussage A vorkommenden einfachen Aussagen $B_1, \ldots, B_n$ nennen wir **Sinneinheiten (Sinnelemente)** von A.

In unserem Beispiel sind die einfachen Aussagen A, B und C Sinneinheiten der Aussage $(A \vee B) \supset C$.

Beziehungen des Sinnes von Aussagen sind vielfältig, und der für die Theorie der logischen Folgebeziehung nötige Sinnzusammenhang ist eine dieser Beziehungen. Die Erklärung, daß in $A \vdash B$ die Aussagen A und B dem Sinn nach verknüpft sind, bedeutet also noch gar nichts. Sie ist unbestimmt und leer. Aus dem bisher Gesagten ist gleichfalls ersichtlich, daß man ganz ohne die Worte „Sinn“, „Sinnzusammenhang“ usw. auskommt. Ihre Verwendung ist nur eine andere Darstellungsweise von bereits Bekanntem.

Wenn man die einen Aussagen aus anderen nach den Regeln der logischen Folgebeziehung erhält, so erhält man die einen aus dem Material (aus den Termini und Aussagen) der anderen. Und dieser Umstand beeinflußt das intuitive Verständnis der Folgebeziehung. Wenn man etwa die Formel $A \vdash B \vee \sim B$ als Regel der logischen Folgebeziehung verwirft, so wird implizit vorausgesetzt, daß in der Voraussetzung und in der Folgerung einer gültigen Regel der Folgebeziehung „ähnliches Material“, nämlich gleiche Termini oder Aussagen vorkommen. Auf der Ebene der allgemeinen Theorie der Folgebeziehung sind dies gleiche Sinneinheiten. In der angeführten Formel ist diese Bedingung aber nicht erfüllt. Die intuitive Auffassung der logischen Folgebeziehung schließt also implizit gewisse Bedingungen der Sinneinheiten der Voraussetzungen und der Folgerungen ein. Je nachdem, welche Forderungen an diese Bedingungen gestellt werden, gibt es verschiedene Formen der intuitiven Auffassung der logischen Folgebeziehung. Solche Forderungen können etwa sein:

1) Die Menge der Sinneinheiten der Folgerung ist in der Menge der Sinneinheiten der Voraussetzung enthalten.
2) Die Menge der Sinneinheiten der Voraussetzung und der Folgerung überschneiden sich, d. h., es gibt Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind.
3) Die Mengen der Sinneinheiten in der Voraussetzung und in der Folgerung sind gleich.

Bezüglich jeder dieser Forderungen läßt sich eine Theorie der Folgebeziehung aufbauen.

Während die Forderung „Aus wahren Voraussetzungen muß man wahre Folgerungen erhalten“ an alle Formen der Folgebeziehung gestellt wird, sind bezüglich der Mengen der Sinneinheiten der Voraussetzungen und der Folgerungen Variationen möglich. Dabei ist keine Form der Folgebeziehung für sich genommen besser oder schlechter als die anderen; sie sind einfach verschieden. In der Natur gibt es nirgendwo eine „echte“ Folgebeziehung, die man als Maßstab für diese verschiedenen Formen der Folgebeziehung wählen könnte. Das Problem der logischen Folgebeziehung nimmt deshalb folgende Form an: Es sind verschiedene logische Systeme aufzubauen, die den erwähnten Formen der intuitiven Auffassung der Folgebeziehung entsprechen. Wir betrachten im weiteren eine strenge und eine strikte logische Folgebeziehung. Andere Systeme der Folgebeziehung sind in Sinowjew/Wessel 1975 dargestellt.

7.10 Ein System der strengen logischen Folgebeziehung

Systeme der strengen logischen Folgebeziehung wurden mit dem Ziel aufgebaut, einerseits die den Paradoxien der materialen und strikten Implikation analogen Formeln als gültige Regeln der Folgebeziehung auszuschließen, aber andererseits ein ausreichend vollständiges Regelsystem der logischen Folgebeziehung zu erhalten. Außer der Forderung, daß man aus wahren Voraussetzungen stets wahre Folgerungen erhält, die an jede Form der Folgebeziehung gestellt wird,

wird bei der strengen logischen Folgebeziehung ein Sinnzusammenhang im oben angegebenen Sinne zwischen der Voraussetzung und der Folgerung gefordert. Die Folgerung soll nur solche Sinneinheiten enthalten, die auch in der Voraussetzung vorkommen. Offenbar läßt sich diese Forderung des Sinnzusammenhangs zwischen Voraussetzung und Folgerung auf logischer Ebene dadurch realisieren, daß bei einer gültigen Regel der strengen logischen Folgebeziehung $A \vdash B$ in der Formel B nur solche Variablen vorkommen, die auch in A enthalten sind. Das hier skizzierte Verständnis der strengen logischen Folgebeziehung läßt sich in folgender Definition zusammenfassen:

D1. Eine Formel $A \vdash B$ ist eine **gültige Regel der strengen logischen Folgebeziehung** genau dann, wenn

1. $A \supset B$ eine Tautologie der klassischen Logik ist;
2. B nur solche Variablen enthält, die auch in A vorkommen.

Ein axiomatischer Aufbau eines Systems der strengen logischen Folgebeziehung S^S ist in Sinowjew/Wessel 1975 angegeben.

Gegenüber den Systemen der nichtklassischen Richtung besitzt das System S^S den Vorzug, daß ein Vollständigkeitsbegriff formuliert werden und die Vollständigkeit im Sinne dieses Begriffs bewiesen werden kann.

Für das System S^S gelten folgende Metatheoreme:

MT1. (Widerspruchsfreiheitstheorem). Wenn eine Formel $A \vdash B$ ein Theorem von S^S ist, so ist $A \supset B$ eine Tautologie.

MT2. (Vollständigkeitstheorem). Wenn eine Formel $A \supset B$ eine Tautologie ist und B nur solche Variablen enthält, die auch in A vorkommen, so ist $A \vdash B$ ein Theorem von S^S.

MT3. (Theorem des Sinnzusammenhangs). Wenn $A \vdash B$ ein Theorem von S^S ist, so enthält B nur solche Variablen, die auch in A vorkommen.

In der Literatur wird *MT3* auch als *Theorem der Paradoxienfreiheit* bezeichnet, da auf Grund dieses Metatheorems die den Paradoxien der materialen und strikten Implikation analogen Formeln in S^S nicht beweisbar sind. Damit schien das lange diskutierte Problem der Paradoxien in der Theorie der logischen Folgebeziehung eine positive Lösung gefunden zu haben. Doch auch das System S^S der strengen logischen Folgebeziehung ist nicht paradoxienfrei. Auf Grund von *MT2* sind in S^S folgende Formeln beweisbar:

1. $A \wedge \sim A \wedge B \vdash \sim B$
2. $A \wedge \sim A \wedge \sim B \vdash B$
3. $A \wedge \sim A \wedge (B \vee \sim B) \vdash B$
4. $A \wedge \sim A \wedge (B \vee \sim B) \vdash \sim B$
5. $A \wedge \sim A \wedge B \vdash B \wedge \sim B$
6. $A \wedge \sim A \wedge \sim B \vdash B \wedge \sim B$
7. $A \wedge \sim A \wedge (B \vee \sim B) \vdash B \wedge \sim B$.

Diese Formeln haben aber offenbar paradoxen Charakter. Nach 1 folgt die Negation einer beliebigen Aussage aus der Konjunktion dieser Aussage und einer Kontradiktion; nach 2 folgt jede beliebige Aussage aus der Konjunktion der Negation dieser Aussage und einer Kontradiktion. Da die Formel $B \vee \sim B$ für jede beliebige Aussage gilt (logisch wahr ist), kann sie als Prämisse in einem beliebigen Schluß hinzugefügt werden, und damit ergeben 3 und 4 den gleichen Effekt wie die Paradoxien der strikten Implikation: Aus einem Widerspruch folgt eine beliebige Aussage. Die Formeln 5 bis 7 gestatten es, in der praktischen Anwendung beim logischen Schließen von einem Widerspruch $A \wedge \sim A$ zu einem Widerspruch $B \wedge \sim B$ von beliebigen in der betreffenden Theorie formulierbaren Aussagen B überzugehen.

In S^S sind auch alle Formeln der Form

8. $A \vdash A \vee B$,

in denen B nur solche Variablen enthält, die auch in A vorkommen, beweisbar.

9. $A \vdash A \vee \sim A$

ist ebenfalls beweisbar. Die Formel 9 wird von einigen Autoren mit der Begründung als paradox bezeichnet, sie sei ein Spezialfall der Paradoxie der strikten Implikation $B \vdash A \vee \sim A$.

Diese Begründung ist nicht stichhaltig, da es bei der Diskussion der Paradoxien offenbar nur sinnvoll ist, in einem Kalkül von einem Spezialfall einer beweisbaren und nicht einer beliebigen Formel zu sprechen, und die Formel $B \vdash A \vee \sim A$ ist in S^S nicht beweisbar. Trotzdem ist die Formel 9 problematisch und in gewisser Hinsicht paradox, da nach dieser Regel der Folgebeziehung aus einer logisch indeterminierten Formel eine logisch wahre Formel folgt.

Obwohl die Theorie der strengen logischen Folgebeziehung sowohl in der Problemstellung als auch in ihrer Bewältigung ein wichtiger Fortschritt gegenüber den Systemen der nichtklassischen Richtung ist, löst sie die Paradoxienproblematik noch nicht befriedigend.

Übung:

Beweisen Sie mit Hilfe der in Abschnitt 3 angegebenen vierwertigen Aussagenalgebra, daß die paradoxen Formeln 1-7 im System der strengen Implikation nicht beweisbar sind!

7.11 Die entartete logische Folgebeziehung

In der Theorie der logischen Folgebeziehung werden neben Regeln der Form $A \vdash B$ auch Behauptungen der Form $\vdash A$ betrachtet. Solche Behauptungen bedeuten, daß eine Aussage A aus rein logischen Gründen akzeptiert wird. Beispiele für solche Aussagen sind die Tautologien der zweiwertigen Aussagenalgebra: $\sim A \vee A$, $\sim(A \wedge \sim A)$, $A \supset A$.

Wir nennen Ausdrücke der Form $\vdash A$ *entartete logische Folgebeziehung.* Auf der Ebene der allgemeinen Theorie der logischen Folgebeziehung wird an die Theorie der entarteten Folgebeziehung folgende Forderung gestellt: Sie muß der zweiwertigen Aussagenalgebra und dem klassischen Aussagenkalkül äquivalent sein. Alle allgemeinen Fragen, die mit einer solchen Theorie verbunden sind, haben wir bereits ausführlich in den vorhergehenden Kapiteln behandelt.

Ein vollständiges System der entarteten Folgebeziehung erhält man, wenn man zu dem System der strengen logischen Folgebeziehung folgende Ergänzung hinzufügt:

Zusätzliches Axiomenschema:

$\mathbf{A}^d$. $\vdash \sim(A \wedge \sim A)$

Zusätzliche Schlußregel:

$\mathbf{R}^d$. Wenn $A \vdash B$ und $\vdash A$, so $\vdash B$.

7.12 Intuitive Grundlagen der strikten logischen Folgebeziehung

Analysiert man die im System der strengen logischen Folgebeziehung auftretenden Paradoxien, so zeigt sich, daß sie immer noch in dieser oder jener Form auf den beiden klassischen Prinzipien „Aus einem Widerspruch folgt logisch eine beliebige Aussage“ und „Eine Tautologie folgt logisch aus einer beliebigen Aussage“ beruhen. Diese beiden Prinzipien sollten aber gerade als gültige Regeln der Folgebeziehung ausgeschlossen werden.

Um die oben genannten paradoxen Formeln als gültige Regeln der Folgebeziehung auszuschließen, schlagen wir folgende Definition einer strikten logischen Folgebeziehung vor:

D1. Eine Formel $A \vdash B$ ist eine **gültige Regel der strikten logischen Folgebeziehung** genau dann, wenn

1. $A \supset B$ eine Tautologie der klassischen Logik ist;
2. B nur solche Variablen enthält, die auch in A vorkommen;
3. A keine Kontradiktion und B keine Tautologie ist.

Die Forderung des Punktes 3 besagt inhaltlich folgendes: Anstelle des klassischen Prinzips „Aus einem Widerspruch folgt logisch eine beliebige Aussage" setzen wir das Prinzip „Aus einem Widerspruch folgt logisch keine Aussage" oder „Aus einem Widerspruch darf nicht geschlossen werden", und anstelle des Prinzips „Eine Tautologie folgt logisch aus einer beliebigen Aussage" setzen wir das Prinzip „Eine Tautologie folgt logisch aus keiner Aussage, da sie schon allein aus logischen Gründen gilt".

Für die praktische Anwendung der Theorie der logischen Folgebeziehung bedeutet diese Einschränkung keinen Verlust, denn in der klassischen Theorie der Folgebeziehung haben wir zwar einerseits Regeln, nach denen aus einem Widerspruch auf eine beliebige Aussage geschlossen werden darf, diese Regeln sind aber beim praktischen Schließen nicht anwendbar, und andererseits haben wir Regeln, nach denen aus beliebigen Aussagen auf eine Tautologie geschlossen werden darf. Diese Regeln sind aber überflüssig, da eine Tautologie schon allein aus logischen Gründen gilt.

Als einen Mangel unserer Definition der strikten Folgebeziehung und insbesondere ihrer folgenden Axiomatisierung könnte man die Verwendung der semantischen Termini „Tautologie" und „Kontradiktion" ansehen. Mit Hilfe der Normalformtheorie ließen sich diese semantischen Termini leicht vermeiden, und man könnte eine rein syntaktische Formulierung angeben. Aus Gründen der Einfachheit verwenden wir aber diese semantischen Termini.

7.13 Basis des Axiomensystems von F^S

In Wessel 1979 sowie in früheren Auflagen dieses Lehrbuches wurde eine unvollständige Axiomatisierung der strikten logischen Folgebeziehung angegeben, und die Beweise einiger Theoreme und insbesondere der Beweis des Vollständigkeitssatzes waren falsch. Darauf hat A. Pietruszczak (1998) aufmerksam gemacht. Die folgende korrekte Axiomatisierung stammt vom gleichen Autor.

Alphabet von F^S:

1. p, q, r - mit und ohne Indizes als Aussagenvariablen;
2. $\wedge$, $\vee$, $\sim$ - die satzbildenden Operatoren der Konjunktion, der Adjunktion und der Negation;
3. $\vdash$ - Zeichen der strikten logischen Folgebeziehung;
4. Klammern als Hilfszeichen.

D1. Satzformel:

1. Aussagenvariablen sind Satzformeln;
2. wenn A eine Satzformel ist, so ist $\sim A$ eine Satzformel;
3. wenn A und B Satzformeln sind, so sind $(A \wedge B)$ und $(A \vee B)$ Satzformeln;
4. eine Satzformel liegt nur vor, wenn es auf Grund von 1-3 der Fall ist.

D2. $(A \supset B) \equiv_{Def} (\sim A \vee B)$

D3. $(A \equiv B) \equiv_{Def} ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$

Festlegungen zur Klammereinsparung:

1) Außenklammern können weggelassen werden;
2) die Bindungsstärke der satzbildenden Operatoren nimmt in folgender Reihenfolge ab: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$;
3) bei gleichen Operatoren wird kanonisch geklammert, d. h. von links nach rechts.

D4. **Formel der Folgebeziehung**: $A \vdash B$ ist eine Formel der Folgebeziehung genau dann, wenn A und B Satzformeln sind.

D5. In einer Formel $A \vdash B$ nennen wir A das **Antezedent** und B das **Konsequent** dieser Formel.

D6. $A \dashv\vdash B$ bedeutet, daß $A \vdash B$ und $B \vdash A$ gilt.

Mit dem Symbol $C\,[A/B]$ bezeichnen wir jede Formel, die man aus der Formel C erhält, wenn man in ihr die Formel A an null oder mehr Stellen ihres Vorkommens durch die Formel B ersetzt.

Axiome von F^S sind alle Formeln, die die logische Form eines der Axiomenschemata *A1-A10* haben und folgende einschränkende Bedingungen erfüllen:

E1. In einer Formel $A \vdash B$ kommen in B keine Variablen vor, die nicht in A vorkommen.

E2. In einer Formel $A \vdash B$ ist A keine Kontradiktion und B keine Tautologie.

A1. $A \vdash \sim\sim A$

A2. $\sim\sim A \vdash A$

A3. $A \wedge B \vdash A$

A4. $A \wedge B \vdash B \wedge A$

A5. $\sim(A \wedge B) \vdash \sim A \vee \sim B$

A6. $\sim A \vee \sim B \vdash \sim(A \wedge B)$

A7. $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee B$

A8. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$

A9. $A \vee B \vdash A$, wobei B eine Kontradiktion ist,

A10. $B \vee A \vdash A$, wobei B eine Kontradiktion ist.

Schlußregeln:

R1. Wenn $A \vdash B$ und $B \vdash C$, so $A \vdash C$.

R2. Wenn $A \vdash B$ und $A \vdash C$, so $A \vdash B \wedge C$.

R3. Wenn $A \dashv\vdash B$, so $C \vdash C\,[A/B]$, wobei C keine Kontradiktion und $C\,[A/B]$ keine Tautologie ist.

R4. Wenn $A \vdash B$, so $A \vdash B \wedge C$, wobei C eine Tautologie ist und nur Variablen enthält, die in A vorkommen.

R5. Wenn $A \vdash B$, so $A \vdash B \vee C$, wobei C eine Kontradiktion ist und nur Variablen enthält, die in A vorkommen.

R6. Wenn $A \vdash B$, so $A \vdash C \vee B$, wobei C eine Kontradiktion ist und nur Variablen enthält, die in A vorkommen.

Theoreme von F^S sind alle Formeln, die die logische Form eines der Theoremschemata haben und außerdem *E1* und *E2* genügen. Das System F^S unterscheidet sich vom System S^S dadurch, daß in S^S anstelle von *A9* und *A10* das Axiomenschema *A9'*. $A \vdash B \vee \sim B$ mit *E1* gesetzt und daß in F^S zusätzlich *E2* gefordert und außerdem die Regeln *R4-R6* akzeptiert werden.

7.14 Einige Theoremschemata von $\boldsymbol{F}^S$

In F^S lassen sich die folgende Theoremschemata mit den Einschränkungen *E1* und *E2* beweisen. Wir geben sie ohne Beweis an (vgl. Pietruszczak 1998).

T1. $A \wedge B \vdash B$
T2. $A \vdash A$
T3. $A \vdash A \wedge A$
T4. $A \vdash A \vee B$, wobei B eine Kontradiktion ist,
T5. $A \vdash B \vee A$, wobei B eine Kontradiktion ist,
T6. $A \vdash A \wedge B$, wobei B eine Tautologie ist.

In F^S gilt folgende abgeleitete Schlußregel:

R7. Wenn $A \vdash B$, $C_1 \vdash D_1$, $D_1 \vdash C_1$, $C_2 \vdash D_2$ und $D_2 \vdash C_2$, so $A\,[C_1/D_1] \vdash B\,[C_2/D_2]$.

T7. $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$
T8. $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$
T9. $A \vdash A \vee A$
T10. $A \vee A \vdash A$
T11. $A \vee B \vdash \sim(\sim A \wedge \sim B)$
T12. $\sim(\sim A \wedge \sim B) \vdash A \vee B$
T13. $A \vee B \vdash B \vee A$
T14. $\sim(A \vee B) \vdash \sim A \wedge \sim B$
T15. $\sim A \wedge \sim B \vdash \sim(A \vee B)$
T16. $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
T17. $(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$
T18. $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$
T19. $(A \wedge B) \vee C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
T20. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$
T21. $A \vdash A \vee B$

Übung:

Beweisen Sie die Theoremschemata *T1-T21* sowie die Regel *R7*!

7.15 Einige Metatheoreme von $\boldsymbol{F}^S$

MT1. (Widerspruchsfreiheit). Wenn $A \vdash B$ ein Theorem von F^S ist, so ist $A \supset B$ eine Tautologie.

Beweis: Wenn wir das Zeichen der Folgebeziehung $\vdash$ in den Axiomenschemata *A1-A10* durch die Subjunktion $\supset$ ersetzen, so nehmen sie folgende Form an:

1. $A \supset \sim\sim A$
2. $\sim\sim A \supset A$
3. $A \wedge B \supset A$
4. $A \wedge B \supset B \wedge A$
5. $\sim(A \wedge B) \supset \sim A \vee \sim B$
6. $\sim A \vee \sim B \supset \sim(A \wedge B)$

7. $(A \vee B) \wedge C \supset (A \wedge C) \vee B$
8. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \supset (A \wedge B) \vee C$
9. $A \vee B \supset A$, wobei B eine Kontradiktion ist.
10. $B \vee A \supset A$, wobei B eine Kontradiktion ist.

Alle Formeln dieser Form sind Tautologien.

Die Schlußregeln von F^S nehmen nach der Ersetzung folgende Form an:

1. Wenn $A \supset B$ und $B \supset C$, so $A \supset C$.
2. Wenn $A \supset B$ und $A \supset C$, so $A \supset B \wedge C$.
3. Wenn $A \supset B$ und $B \supset A$, so $C \supset C\,[A/B]$.
4. Wenn $A \supset B$, so $A \supset B \wedge C$, wobei C eine Tautologie ist.
5. Wenn $A \supset B$, so $A \supset B \vee C$, wobei C eine Kontradiktion ist.
6. Wenn $A \supset B$, so $A \supset C \vee B$, wobei C eine Kontradiktion ist.

Wenn die Voraussetzungen dieser Regeln Tautologien sind, so sind es auch die Folgerungen. Folglich gilt die Behauptung von *MT1.*

MT2. (Sinnzusammenhang). Wenn $A \vdash B$ ein Theorem von F^S ist, so enthält B nur solche Variablen, die in A vorkommen.

Beweis: Wenn $A \vdash B$ ein Axiom von F^S ist, so gilt die Behauptung von *MT2* auf Grund von *E1.* Bei den Schlußregeln *R1-R6* ist offensichtlich, daß gilt: Wenn die Voraussetzungen der Regeln die Bedingungen von *MT2* erfüllen, so erfüllt auch die Folgerung die Bedingungen.

Folgerung aus *MT2*: In F^S sind folgende den Paradoxien der materialen und strikten Implikation analoge Formeln nicht beweisbar:

$A \vdash B \supset A$ $\quad A \vdash {\sim}A \supset B$
$A \wedge {\sim}A \vdash B$ $\quad B \vdash A \vee {\sim}A$
$A \vdash A \vee B$ $\quad A \vdash B \vee A.$

MT3. (Paradoxienfreiheit). Wenn $A \vdash B$ ein Theorem von F^S ist, so ist A keine Kontradiktion und B keine Tautologie.

Beweis: Für die Axiome gilt *MT3* auf Grund von *E2.* Für die Regeln *R1* und *R2* gilt: Wenn die Voraussetzungen die Forderung *E2* erfüllen, so erfüllt die Folgerung ebenfalls die Forderung *E2.* Die Regeln *R3-R6* sind so eingeschränkt, daß auch sie die Bedingung *E2* vererben.

Folgerung aus *MT3:* In F^S sind folgende Paradoxien der strengen logischen Folgebeziehung nicht beweisbar:

$A \wedge {\sim}A \wedge B \vdash {\sim}B$ $\quad A \wedge {\sim}A \wedge {\sim}B \vdash B$
$A \wedge {\sim}A \wedge (B \vee {\sim}B) \vdash B$ $\quad A \wedge {\sim}A \wedge (B \vee {\sim}B) \vdash {\sim}B$
$A \wedge {\sim}A \wedge B \vdash B \wedge {\sim}B$
$A \wedge {\sim}A \wedge {\sim}B \vdash B \wedge {\sim}B$
$A \wedge {\sim}A \wedge (B \vee {\sim}B) \vdash B \wedge {\sim}B.$

Auf Grund von *MT3* sind in F^S auch die folgenden Formeln nicht beweisbar:

1. $A \wedge {\sim}A \vdash A$
2. $A \wedge {\sim}A \vdash {\sim}A$
3. $A \vdash A \vee {\sim}A$
4. ${\sim}A \vdash A \vee {\sim}A.$

Diese Formeln scheinen als Regeln der Folgebeziehung akzeptabel zu sein, da 1 und 2 nur Spezialfälle der in S^S beweisbaren Beseitigungsregel der Konjunktion $A \wedge B \vdash A$ bzw. $A \wedge B \vdash B$

sind, während 3 und 4 nur Spezialfälle der in S^S beweisbaren Einführungsregel der Adjunktion $A \vdash A \vee B$ bzw. $A \vdash B \vee A$ mit *E1* sind. Mit dem Ausschluß dieser Formeln erleidet die Theorie der Folgebeziehung aber keinen echten Verlust, denn die ersten beiden Regeln sind nicht anwendbar, und das Konsequent der beiden letzten Regeln gilt voraussetzungslos.

MT4. Wenn $A \vdash B$ ein Theorem von F^S ist, so ist B keine Kontradiktion.

Beweis: *MT4* folgt unmittelbar aus *MT1* und *MT3*.

MT5. Wenn $A \vdash B$ ein Theorem von F^S ist, so ist A keine Tautologie.

Beweis: *MT5* folgt unmittelbar aus *MT1* und *MT3*.

MT6. Wenn $A \vdash B$ ein Theorem von F^S ist, so sind A und B logisch indeterminierte Formeln.

Beweis: *MT6* folgt unmittelbar aus *MT3-MT5*.

Wir verwenden die Definition *D2* einer *ausgezeichneten adjunktiven Normalform* aus Abschnitt 4.14.

MT7. Für jede logisch indeterminierte Satzformel A läßt sich eine Formel A^N in der ausgezeichneten adjunktiven Normalform derart angeben, daß in F^S gilt: $A \dashv\vdash A^N$.

Beweis: *MT7* läßt sich induktiv über die Anzahl der logischen Operatoren in A mit Hilfe der Axiome und Schlußregeln von F^S sowie der Theoremschemata *T1-T21* beweisen.

Folgerung aus *MT7:* Auf Grund von *MT1* ist also $A \equiv A^N$ eine Tautologie, und folglich gilt $A \approx A^N$, wobei $\approx$ die semantische Äquivalenz ist.

MT8. (Vollständigkeit). Wenn $A \supset B$ eine Tautologie ist, B nur solche Variablen enthält, die in A vorkommen, A keine Kontradiktion und B keine Tautologie ist, so ist $A \vdash B$ in F^S beweisbar.

Die Beweise von *MT7* und *MT8* werden in Pietruszczak 1998 geführt.

MT9. Läßt man in F^S die Einschränkung *E2* fallen, so erhält man ein mit S^S deduktiv äquivalentes System.

Beweis: Nach *T6* erhalten wir:

$$A \vdash A \wedge (B \vee {\sim}B).$$

Hieraus ergibt sich mit *A4, A3* und *R1*

A9′. $A \vdash B \vee {\sim}B.$

MT10. Läßt man in F^S die Einschränkungen *E1* und *E2* fallen, so sind die den Paradoxien der strikten Implikation analogen Formeln $A \vdash B \vee {\sim}B$ und $B \wedge {\sim}B \vdash A$ beweisbar.

Beweis: Die erste Formel ist *A9′*. Die zweite Formel wird folgendermaßen bewiesen:

1.	$B \wedge {\sim}B \vdash B \wedge {\sim}B \vee A$	(*T21*)
2.	$B \wedge {\sim}B \vee A \vdash A$	(*A10*)
3.	$B \wedge {\sim}B \vdash A$	(1., 2., *R1*).

MT11. Läßt man in F^S die Einschränkungen *E1* und *E2* fallen, so gilt: $A \vdash B$ ist genau dann ein Theorem, wenn $A \supset B$ eine Tautologie der klassischen Logik ist.

Übungen:

Prüfen Sie, welche der folgenden Formeln der Folgebeziehung gültige Regeln im System der strengen logischen Folgebeziehung bzw. im System der strikten logischen Folgebeziehung sind:

1. $p \vdash p \vee q$
2. $p \wedge q \wedge \sim p \vdash \sim q$
3. $p \vee q \vdash p$
4. $p \vee \sim p \vdash \sim p \vee p$
5. $p \wedge q \vee \sim p \wedge q \vee p \wedge \sim q \vee \sim p \wedge \sim q \vdash \sim p \vee p$
6. $A \vdash A$
7. $(p \supset q) \vdash (p \supset q) \vee (q \supset p)$.

7.16 Logische Folgebeziehung und allgemeine Methodologie

Die verschiedenen Systeme der logischen Folgebeziehung der klassisch orientierten Richtung (die klassische Theorie, die Theorien der strengen und der strikten Folgebeziehung) sind in unterschiedlicher Weise für die allgemeine Methodologie der Wissenschaften von Bedeutung. Wir wollen auf einige Aspekte dieser Problematik aufmerksam machen. Es ist eine empirisch gesicherte Tatsache, daß in der Wissenschaftsgeschichte logisch widersprüchliche Theorien auftreten. Akzeptiert man die klassische Theorie der Folgebeziehung als die einzig mögliche Form der logischen Folgebeziehung, so ist in einer solchen widersprüchlichen Theorie jede beliebige Aussage beweisbar, da nach der klassischen Theorie aus einem Widerspruch eine beliebige Aussage logisch folgt. Eine Theorie, in der jede Aussage beweisbar ist, muß aber verworfen werden, da sie nutzlos ist. Die Wissenschaftsgeschichte zeigt, daß die Einzelwissenschaftler nicht so vorgehen. Natürlich wird das Auftreten von widersprüchlichen Aussagen in wissenschaftlichen Theorien als ein Mangel dieser Theorien angesehen, weil eine Aussage A und ihre Negation $\sim A$ der Definition der Negation gemäß nicht beide gelten können. Im allgemeinen wird jedoch beim Auftreten eines Widerspruchs nicht die gesamte Theorie verworfen. Man isoliert den Widerspruch, arbeitet mit der restlichen Theorie weiter und versucht, den Grund für den aufgetretenen Widerspruch zu finden. Dieses Vorgehen der Wissenschaftler ist - entgegen der Auffassung einiger Methodologen - vernünftig und entspricht dem Bemühen derjenigen Logiker, die eine paradoxienfreie Theorie der logischen Folgebeziehung aufbauen wollen.

Die Praxis der Einzelwissenschaftler zeigt, daß in einem bestimmten Rahmen eine erfolgreiche wissenschaftliche Arbeit mit widersprüchlichen Theorien möglich ist. Wir gehören jedoch nicht zu den Philosophen, die beim Auftreten eines logischen Widerspruchs in Jubel ausbrechen. Eine Aussage $A \wedge \sim A$ ist schon allein aus logischen Gründen falsch. Aber Widersprüche sind ungefährlicher als meist in der logischen und methodologischen Literatur angenommen wird. Tritt in einer einzelwissenschaftlichen Theorie ein Widerspruch auf, weist das immer auf einen Mangel dieser Theorie hin, und man muß versuchen, diesen Widerspruch auszumerzen. Doch muß man beim Auftreten eines Widerspruchs nicht in Panik verfallen und die ganze Theorie für sinnlos erklären; so ist Freges Lebenswerk nicht sinn- und nutzlos, obwohl Russell seine Widersprüchlichkeit aufdeckte.

In seinem Artikel „Was ist Dialektik?“ behandelt auch K. R. Popper die Problematik des Satzes „Aus einem Widerspruch folgt jede beliebige Aussage“. Er schreibt in diesem Zusammenhang: „Nun kann man die Frage aufwerfen, ob diese Lage der Dinge in jedem logischen System gegeben ist oder wir ein System konstruieren können, in dem sich aus kontradiktorischen Aussagen *nicht* jede beliebige Aussage ergibt. Mit dieser Frage habe ich mich beschäftigt, und meine Antwort geht dahin, daß ein derartiges System konstruiert werden kann. Es erweist sich allerdings als ein außerordentlich schwaches System. Von den üblichen Schlußregeln bleiben nur sehr wenige übrig, nicht einmal der Modus ponens, der besagt, daß wir aus einer Aussage der Form ‚Wenn p, dann q‘ in Verbindung mit p zu dem Schluß q gelangen können. Meiner

Meinung nach ist ein solches System für das Ziehen von Schlüssen nutzlos …“ (Popper 1965, S. 271) Die letzte Behauptung trifft zwar für das von Popper konstruierte System zu (Popper 1948), aber mit den Systemen der strengen und der strikten Folgebeziehung liegen Logiksysteme vor, die beide in einem bestimmten Sinne vollständig sind und in denen nicht gilt, daß aus einem Widerspruch jede beliebige Aussage logisch folgt. Mit dem Aufbau dieser Systeme ist der Mythos zerstört, daß es nur eine einzige (von Gott oder der Natur gegebene) logische Folgebeziehung gibt und daß in einer ausreichend vollständigen Theorie der Folgebeziehung aus einem Widerspruch logisch jede beliebige Aussage folgt. Manchmal benutzte man diesen Mythos sogar zur Begründung der Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch. So schreibt G. J. Ruzavin: „Nach der Implikationsregel der formalen Logik folgt aus einer falschen Voraussetzung sowohl eine wahre als auch eine falsche Folgerung. Deshalb fordert die Logik eine Beachtung des Gesetzes der Widerspruchsfreiheit, d. h., zwei sich widersprechende Behauptungen können nicht gleichzeitig als wahr angesehen werden.“ (Ruzavin 1978). Ein Widerspruch muß verworfen werden, weil er allein auf Grund der Eigenschaften der Operatoren „und“ und „nicht“ immer falsch ist und nicht, weil aus ihm eine beliebige Aussage folgt.

Worin besteht nun die unterschiedliche Funktion der Theorien der klassischen, der strengen und der strikten Folgebeziehung? Ist die Widerspruchsfreiheit einer wissenschaftlichen Theorie nachgewiesen, so kann ohne jede Bedenken die klassische Folgebeziehung verwendet werden. Tritt in einer Theorie einer empirischen Wissenschaft ein Widerspruch auf, so empfiehlt es sich, nach der strikten Folgebeziehung zu schließen. Eine Verwendung dieser Theorie erleichtert es, den Widerspruch zu lokalisieren und zu isolieren. Für axiomatisch aufgebaute Theorien der Logik und der Mathematik ist hingegen die Theorie der strikten Folgebeziehung nicht zu verwenden, da sie es nicht gestattet, von Tautologien auf Tautologien zu schließen.

Hieraus wird deutlich, daß die Forderung nach Widerspruchsfreiheit für solche Theorien weitaus wichtiger ist als für Theorien der empirischen Wissenschaften.

Die Theorie der strengen logischen Folgebeziehung läßt sich sowohl in deduktiven als auch in den empirischen Wissenschaften verwenden, berücksichtigt den Sinnzusammenhang zwischen Voraussetzung und Folgerung, ist allerdings mit den oben angegebenen Paradoxien behaftet. Solange in Theorien der empirischen Wissenschaften keine Widersprüche auftreten, kann man die klassische Theorie der Folgebeziehung verwenden. Ist die Widerspruchsfreiheit dieser Theorien nicht bewiesen, so ist dabei Vorsicht bei indirekten Beweisen geboten. Denn ist eine Theorie versteckt widersprüchlich, so ist in ihr nach der klassischen jede beliebige und nach der Theorie der strengen Folgebeziehung jede in ihr formulierbare Aussage beweisbar. Bei indirekten Beweisen muß gesichert sein, daß sich der Widerspruch wirklich aus der Annahme des indirekten Beweises ergibt.

Übungen:

1. Prüfen Sie, welche der folgenden Schlüsse gemäß der Theorie der klassischen, der strengen und der strikten Folgebeziehung jeweils gültig sind:

   a) $$\begin{array}{l}\text{Sokrates läuft.}\\ \text{Sokrates läuft nicht.}\\ \hline \text{Du bist in Rom.}\end{array}$$

   b) $$\begin{array}{l}\text{Sokrates läuft.}\\ \hline \text{Sokrates läuft, oder Sokrates läuft nicht.}\end{array}$$

   c) $$\begin{array}{l}\text{Sokrates läuft.}\\ \hline \text{Sokrates läuft, oder du bist in Rom.}\end{array}$$

d) Sokrates läuft.
Du bist nicht in Rom.
―――――――――――――――
Sokrates läuft, oder du bist in Rom.

e) Es gilt nicht: Sokrates läuft und Sokrates läuft nicht.
―――――――――――――――
Sokrates läuft, oder Sokrates läuft nicht.

f) Haifische sind Säugetiere.
―――――――――――――――
Haifische sind Säugetiere, oder Wale sind Säugetiere.

2. Welche Prämissen müßte man in den Beispielen aus Aufgabe 1, die nur klassisch gültige Schlüsse sind, hinzufügen, um gültige Schlüsse der strengen logischen Folgebeziehung zu erhalten? Lassen sich die Prämissen so ergänzen, daß diese Schlüsse auch in der Theorie der strikten logischen Folgebeziehung gelten?
3. Prüfen Sie, ob die folgenden Regeln in der Theorie der klassischen, der strengen und der strikten Folgebeziehung gültig sind:

   a) $((A \wedge B) \vee ({\sim}A \wedge {\sim}B)) \wedge {\sim}({\sim}A \vee B) \vdash A \wedge {\sim}A$
   b) $((A \wedge B) \vee ({\sim}A \wedge {\sim}B)) \wedge {\sim}({\sim}A \vee B) \vdash C \wedge {\sim}C$
   c) $((A \wedge B) \vee ({\sim}A \wedge {\sim}B)) \wedge {\sim}({\sim}A \vee B) \supset A \wedge {\sim}A \vdash ({\sim}A \vee {\sim}B) \wedge (A \vee B) \vee {\sim}A \vee B$.
4. Prüfen Sie, ob der folgende Schluß in der klassischen, strengen oder strikten Folgebeziehung gültig ist:

Haifische sind Fische, oder Wale sind Säugetiere.
Haifische sind Säugetiere, oder Wale sind Fische.
―――――――――――――――
Haifische sind Fische, oder Wale sind Fische.

8. Kapitel
Prädikationstheorie

8.1 Die logische Struktur einfacher Aussagen

Bei dem Aufbau der folgenden Bereiche der Logik ist nicht nur die Aufgliederung von Aussagen in Aussagen und aussagenbildende Operatoren zu berücksichtigen, sondern auch die Aufgliederung einfacher Aussagen in Termini (in Subjekte und Prädikate) und logische Operatoren. Gewöhnlich geschieht dies in der Quantorenlogik (oder Prädikatenlogik), da in dieser die Eigenschaften von Quantoren betrachtet werden und Quantoren logische Operatoren sind, die sich auf Termini in Aussagen beziehen. Wir halten es für zweckmäßiger, die Problematik einfacher Aussagen in einem besonderen Bereich der Logik zu behandeln. Wir nennen diesen Bereich *Prädikationstheorie*. Den in der modernen mathematischen Logik allgemein üblichen Standpunkt nennen wir *traditionell*. Unseren Standpunkt, der sich wesentlich vom traditionellen unterscheidet, nennen wir *nichttraditionell*.

Die Grundlagen der im weiteren dargestellten nichttraditionellen Prädikationstheorie wurden von A. A. Sinowjew entworfen (vgl. Sinowjew 1968, 1970, Sinowjew/Wessel 1975). In Wessel 1982 wurde diese Theorie in wesentlichen Punkten modifiziert und die semantische Vollständigkeit ihres axiomatischen Aufbaus bewiesen. Ihre Anwendung bei der Kritik der intuitionistischen Logik findet sich in Wessel 1983, 1984, und ihre Nützlichkeit bei der Lösung einiger wissenschaftstheoretischer Paradoxien wird in Wessel 1988, 1993, 1994a demonstriert.

Die traditionelle Auffassung einfacher Aussagen besteht darin, daß einfache Aussagen eine Struktur haben, die durch Symbole der Form $P(s)$ und $P(s_1, \ldots, s_n)$ (wobei $n \geq 2$) dargestellt werden.

Beispiele: „Das Elektron ist negativ geladen“, „Der Punkt X liegt zwischen den Punkten Y und Z“, „Die Zahl 5 ist kleiner als 7“, „Rostock liegt nördlich von Berlin“, „Anton liebt Gerda“.

In den angeführten Symbolen sind $s, s_1, \ldots, s_n$ Bezeichnungen der Gegenstände, über die in den Aussagen gesprochen wird. In der vormathematischen Logik wurden sie *Subjekte* genannt. In der modernen Logik nennt man sie *Gegenstandsnamen* oder *Eigennamen*; wir werden sie *Subjekte* nennen. In den angeführten Beispielen sind die Wörter „das Elektron“, „der Punkt X“, „der Punkt Y“, „der Punkt Z“, „die Zahl 5“, „die Zahl 7“, „Rostock“, „Berlin“, „Anton“, „Gerda“ Subjekte. Die erste Aussage hat also die Form $P(s)$, die zweite die Form $P(s_1, s_2, s_3)$, während die dritte, vierte und fünfte die Form $P(s_1, s_2)$ haben. Wir weisen ausdrücklich darauf hin, daß das Symbol P in den oben angeführten Symbolen $P(s)$ und $P(s_1, \ldots, s_n)$ nicht das Prädikat der Aussage (d. h. den Terminus, der das ausdrückt, was in einer gegebenen Aussage über die Gegenstände gesagt wird), sondern nur einen Teil des Prädikates darstellt. Als Prädikate der Aussagen sieht man hier das an, was von den Aussagen übrigbleibt, wenn man ihnen die Subjekte entzieht. Die Prädikate der angegebenen Aussagen werden also nicht durch den Buchstaben P, sondern durch die Ausdrücke $P(...)$ und $P(..., ..., ...)$ wiedergegeben.

Wenn man in diesen Ausdrücken die leeren Stellen durch Subjekte auffüllt, so erhält man Aussagen. In den oben angeführten Beispielen sind die Prädikate der Aussagen die Ausdrücke „... ist negativ geladen“, „... liegt zwischen ... und ...“, „... ist kleiner als ...“, „... liegt nördlich von ...“, „... liebt ...“.

Bei der eben dargestellten Auffassung des Aufbaus von einfachen Aussagen aus Subjekten und Prädikaten ist also kein besonderer aussagenbildender Operator erforderlich. Diese Auffassung der Aussagen ist vollkommen berechtigt und in der Hinsicht bequem, daß auf das Verfahren zur Gewinnung der Prädikate aus den Aussagen verwiesen wird. Diese Auffassung ist aber in anderer Hinsicht ungünstig und hat unangenehme Folgen für die Lösung vieler Probleme der Logik. Obwohl in der Logik verschiedene Positionen (verschiedene Formen) der Negation einfacher Aussagen schon länger bekannt sind, ist es bei der dargestellten Auffassung einfacher Aussagen faktisch unmöglich, diese verschiedenen Formen der Negation auf logischer Ebene zu unterscheiden. Die Anordnung der Negation vor der ganzen Aussage ist offensichtlich, eine weitere Negation läßt sich aber einfach nicht unterbringen.

Wir vertreten bezüglich einfacher Aussagen den folgenden Standpunkt. Wir akzeptieren das angegebene Verfahren zur Herausgliederung der Prädikate aus den Aussagen, betrachten es aber nur als eine Vorbedingung für die logische Analyse der Sprache. Einfache Aussagen stellen wir durch Schemata der Form $s \leftarrow P$, $(s_1, \ldots, s_n) \leftarrow P$, $s \not\leftarrow P$ und $(s_1, \ldots, s_n) \not\leftarrow P$ dar, wobei $n \geq 2$. In diesen Schemata sind $s, s_1, \ldots, s_n$ Subjekte (Bezeichnungen der Gegenstände, über die in den Aussagen gesprochen wird), und P ist ein Prädikat. Dabei ist es gleichgültig, wie ein Prädikat aus einer Aussage gewonnen wurde (ob es lokalisierbar ist, oder aber, ob es in verschiedenen Teilen der Aussage so angeordnet ist, daß seine Lokalisierung unmöglich ist). Wichtig hierbei ist aber, daß P ein selbständiger Terminus der Aussage ist und nicht nur ein Teil eines solchen. Bei unserem Aufbau der Prädikationstheorie setzen wir also die Fähigkeit der Menschen voraus, zwischen Subjekt- und Prädikattermini zu unterscheiden. Der Pfeil $\leftarrow$ stellt einen aussagenbildenden Operator dar (*den Prädikationsoperator des Zusprechens*). Das Schema $s \leftarrow P$ kann gelesen werden als: „s hat P“, „s ist dadurch charakterisiert, daß P“, „s ist P“, „P wird s zugesprochen“, „P kommt s zu“. Das Schema $s \leftarrow P$ drückt aus, daß einem mit dem Subjektterminus s bezeichneten Gegenstand das durch den Prädikatterminus P ausgedrückte Merkmal P zugesprochen wird. Neben dem Prädikationsoperator des Zusprechens verwenden wir den *Prädikationsoperator des Absprechens* $\not\leftarrow$. Das Schema $s \not\leftarrow P$ kann gelesen werden als: „s hat nicht P“, „s hat P nicht“, „s ist dadurch charakterisiert, daß nicht P“, „s ist nicht P“, „P wird s abgesprochen“, „P kommt s nicht zu“.

Beispiele für einfache Aussagen sind: „Ein Elektron ist negativ geladen“, „Sokrates läuft“, „Anton liebt Gerda nicht“, „Berlin liegt zwischen Rostock und Leipzig“. Die logischen Subjekte sind in diesen Aussagen entsprechend: „ein Elektron“, „Sokrates“, „Anton“ und „Gerda“, „Berlin“, „Rostock“ und „Leipzig“. Die logischen Prädikate sind entsprechend die Termini „negativ geladen“, „läuft“, „liebt“, „liegt zwischen“. Man unterscheidet Prädikate in ein-, zwei- und allgemein n-stellige Prädikate, je nachdem, mit wieviel Subjekttermini sie zu Aussagen verknüpft werden. So haben wir in unserem ersten und zweiten Beispielsatz einstellige Prädikate, im dritten ein zweistelliges und im vierten ein dreistelliges Prädikat. Im weiteren möge s für eine beliebige Gruppe von Subjekttermini $(s_1, \ldots, s_n)$ mit $n \geq 1$ und P für ein entsprechend n-stelliges Prädikat stehen. Wie wir gesehen haben, werden Prädikationsoperatoren in der Umgangssprache auf die verschiedenste Weise ausgedrückt, durch die Wörter „ist“ und „ist nicht“, durch „hat“ und „hat nicht“, durch einfaches Aneinanderreihen von Subjekt und Prädikat bzw. Aneinanderreihen von Subjekt, Prädikat und ein Hinzufügen des Wortes „nicht“.

Wenn wir für ein gegebenes Subjekt s feststellen können, daß es die Eigenschaft P besitzt, so können wir die Aussage „s besitzt die Eigenschaft P“ (symbolisch: $s \leftarrow P$) bilden. Wenn wir für ein gegebenes Subjekt s feststellen können, daß es die Eigenschaft P nicht besitzt, so können wir die Aussage bilden „s besitzt nicht die Eigenschaft P“ (symbolisch: $s \not\leftarrow P$).

Damit sind aber noch nicht alle Möglichkeiten erschöpft, d. h., es gilt nicht immer „$s \leftarrow P$“ oder „$s \not\leftarrow P$“, obwohl man sich in der klassischen und in der intuitionistischen Logik auf diese beiden Möglichkeiten beschränkt. In der traditionellen (klassischen und intuitionistischen) Prädikationstheorie werden die beiden Aussagen $s \leftarrow P$ und $s \not\leftarrow P$ entsprechend als $P(s)$

und $\sim P(s)$ dargestellt. Durch diese Darstellung wird der logische Fehler suggeriert, der von einigen Vertretern der traditionellen klassischen und intuitionistischen Prädikationstheorie auch gemacht wird, daß die aussagenlogische Negation von $s \leftarrow P$, d. h. die Aussage $\sim(s \leftarrow P)$, mit der Aussage $s \not\leftarrow P$ als äquivalent angesehen wird. In der klassischen Logik folgert man daraus, daß das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten auch in der Form „$s \leftarrow P$ oder $s \not\leftarrow P$" gilt, was offensichtlich falsch ist, da es Fälle gibt, die weder unter $s \leftarrow P$ noch unter $s \not\leftarrow P$ fallen. Und in der intuitionistischen Logik, mit der wir uns noch beschäftigen werden, folgert man daraus, daß das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten in der Form $p \vee \sim p$ nicht gilt, was offensichtlich auch falsch ist, da die hier behandelte Problematik der Prädikation mit dem Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten in dieser Form nichts zu tun hat.

Wir möchten darauf hinweisen, daß es in den natürlichen Sprachen keine direkte Entsprechung für die aussagenlogische Negation $\sim$ gibt. Korrekt muß sie durch solche Kunstausdrücke wie „Es ist nicht der Fall, daß ..." wiedergegeben werden. Sicher liegt auch in diesem Umstand ein Grund für die falsche Identifikation von innerer und äußerer Negation.

Wir sagten schon, daß mit den Aussagen $s \leftarrow P$ und $s \not\leftarrow P$ noch nicht alle Möglichkeiten erschöpft sind. Es ist darüber hinaus noch möglich, daß weder $s \leftarrow P$ noch $s \not\leftarrow P$ gilt. Betrachten wir einige Beispiele: Die Aussage „Der Mond ist ehrlich" $(s \leftarrow P)$ wird sicher von niemandem akzeptiert, ihre Negation „Der Mond ist nicht ehrlich" ist aber zweideutig. Einmal kann sie bedeuten, daß man dem Mond das Prädikat „ehrlich" abspricht bzw. ihm die Negation dieses Prädikates, d. h. das Prädikat „unehrlich", zuspricht. Dann hat der Satz eine logische Struktur $s \not\leftarrow P$. In dieser Bedeutung wird der Satz auch von niemandem akzeptiert. Wenn also der Satz „Der Mond ist nicht ehrlich" von jemand behauptet wird, so ist er stets im Sinne von „Es gilt nicht, daß der Mond ehrlich ist" zu verstehen, der die logische Struktur $\sim(s \leftarrow P)$ hat. In unserem Beispiel haben wir also nicht nur die beiden Möglichkeiten $s \leftarrow P$ und $s \not\leftarrow P$ zu berücksichtigen, sondern noch eine dritte Möglichkeit, nämlich ein Verwerfen sowohl von $s \leftarrow P$ als auch von $s \not\leftarrow P$, d. h. den Fall $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$, und dieser Fall ist in unserem Beispiel der zutreffende. In diesem Beispiel tritt die dritte Möglichkeit auf, weil die Prädikate „ehrlich" und „unehrlich" auf Gegenstände wie den Mond nicht anwendbar sind, da ihre Bedeutung nur für Gegenstände eines bestimmten Typs (für Menschen und Menschengruppen) festgelegt ist. Für unser Beispiel ist dies sofort erkennbar. In den Wissenschaften und insbesondere in der Philosophie treten aber häufig Fälle auf, wo erst eine detaillierte logische Analyse zu dem gleichen Ergebnis führt.

Betrachten wir als weiteres Beispiel den Satz: „N hat aufgehört seine Frau zu schlagen" $(s \leftarrow P)$. Hier läßt die Negation „N hat nicht aufgehört, seine Frau zu schlagen" wieder zwei Deutungen zu. Einmal läßt sich die Aussage deuten als „N schlägt seine Frau noch immer" $(s \not\leftarrow P)$ und zum anderen als „Es gilt nicht, daß N aufgehört hat, seine Frau zu schlagen" $(\sim(s \leftarrow P))$, und die letztere Aussage umfaßt die beiden Möglichkeiten, daß N seine Frau nie geschlagen hat oder daß er sie noch immer schlägt. Wir haben auch hier die drei Möglichkeiten $s \leftarrow P$, $s \not\leftarrow P$ und $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$, obwohl der Grund für das Auftreten der dritten Möglichkeit ein anderer als im ersten Beispiel ist. Im vorliegenden Beispiel setzt eine sinnvolle Verwendung von $s \leftarrow P$ oder $s \not\leftarrow P$ voraus, daß N früher seine Frau geschlagen hat. Kürzen wir die letztere Aussage mit A ab, so haben wir die drei Möglichkeiten $A \wedge (s \leftarrow P)$, $A \wedge (s \not\leftarrow P)$ und $\sim A$, wobei $\sim A$ nach sich zieht, daß $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$ gilt. In unserem Beispiel ist offensichtlich, daß A eine Voraussetzung für eine sinnvolle Verwendung von $s \leftarrow P$ oder $s \not\leftarrow P$ ist. Ebenso offensichtlich wäre die Mitgliedschaft von N in einer Partei eine Voraussetzung für eine sinnvolle Verwendung einer der Aussagen „N wurde aus der Partei ausgeschlossen" oder „N wurde nicht aus der Partei ausgeschlossen". Aber auch bei Beispielen dieses Typs ist in den Wissenschaften und in der Philosophie nicht immer leicht erkennbar, welche Aussage die Rolle von A spielt.

Auch wenn der Gegenstand, von dem in einer Aussage gesprochen wird, nicht existiert, so gilt $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$. Ausführlicher betrachten wir diese Problematik im folgenden Abschnitt.

Betrachten wir als weiteres Beispiel den Satz: „In der Dezimalentwicklung von π kommt die Null 10^{10} mal hintereinander vor" $(s \leftarrow P)$. Auch die Negation dieses Satzes ist mehrdeutig. Sie kann einmal bedeuten „Es gilt nicht: In der Dezimalentwicklung von π kommt die Null 10^{10} mal hintereinander vor" $(\sim(s \leftarrow P))$, und dies ist nicht gleichbedeutend mit dem Satz „In der Dezimalentwicklung von π kommt die Null nicht 10^{10} mal hintereinander vor" $(s \not\leftarrow P)$, denn auch hier ist der Fall $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$ möglich und gegenwärtig sogar der zutreffende. Wir können weder feststellen, daß in der Dezimalentwicklung von π die Null 10^{10} mal hintereinander vorkommt, noch daß sie nicht vorkommt. Manchmal wird gegen solche Beispiele wie das letztere eingewendet, man könne zwar nicht feststellen, welcher der beiden Fälle $s \leftarrow P$ und $s \not\leftarrow P$ gelte, aber „an sich" gelte natürlich einer der beiden Fälle, d. h., $(s \leftarrow P) \vee (s \not\leftarrow P)$ sei ein logisches Gesetz. Dieser Einwand ist aber unberechtigt, denn bekanntlich ist π ein nichtperiodischer unendlicher Dezimalbruch. Es ist klar, wie man in unserem Beispiel $s \leftarrow P$ als gültig nachweisen könnte. Man müßte nämlich die Dezimalentwicklung von π so weit treiben, bis die Null 10^{10} mal hintereinander vorkommt. Gelingt dies nicht, so besteht keine Möglichkeit $s \not\leftarrow P$ als gültig nachzuweisen, da es sich bei der Dezimalentwicklung von π um einen potentiell unendlichen Prozeß handelt und prinzipiell keine abgeschlossene Dezimalentwicklung von π „an sich" existieren kann. Wer trotzdem behauptet, im vorliegenden Fall gelte $(s \leftarrow P) \vee (s \not\leftarrow P)$, dem kann man nur mit Wittgensteins Worten antworten: Gott sieht es - aber wir wissen es nicht (und können es auch nicht wissen).

Schließlich sei noch der Fall vager Prädikate betrachtet. Wenn P ein vages Prädikat wie „glatzköpfig" oder „rot" ist, so ist neben $s \leftarrow P$ und $s \not\leftarrow P$ in gewissen Grenzfällen der Fall $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$ möglich.

In allen betrachteten Beispielen sahen wir, daß die beiden Aussagen $s \leftarrow P$ und $s \not\leftarrow P$ nicht alle Möglichkeiten erschöpften, sondern daß auch der Fall der Unbestimmtheit $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$ möglich ist. Wenn auch die Gründe für das Auftreten der Unbestimmtheit verschieden sind, so haben wir es in logischer Hinsicht immer mit derselben Situation zu tun. Neben der Möglichkeit, einem Subjekt ein Prädikat zu- bzw. abzusprechen, ist noch der Fall zu betrachten, daß das betreffende Prädikat dem Subjekt weder zugesprochen noch abgesprochen wird. Da sich in der Sprachpraxis solche Fälle der Unbestimmtheit empirisch aufweisen lassen, müssen sie in einer logischen Prädikationstheorie berücksichtigt werden. In der Berücksichtigung der Unbestimmtheit liegt der wesentliche Unterschied der hier dargestellten nichttraditionellen Prädikationstheorie von der traditionellen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise passen wir unsere Symbolik der traditionellen Symbolik in folgender Weise an: Anstelle von $(s \leftarrow P)$ schreiben wir $P(s)$, anstelle von $(s \not\leftarrow P)$ schreiben wir $\neg P(s)$, und anstelle von $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$ schreiben wir $?P(s)$. Das Symbol $\neg$ nennen wir *innere Negation*, im Unterschied zur aussagenlogischen Negation $\sim$, die auch *äußere Negation* genannt wird. Die innere Negation $\neg$ ist kein selbständiger Operator, man kann sie als Teil eines Operators ansehen. Selbständiger Operator ist der Operator des Absprechens $\not\leftarrow$, und $\neg P(s)$ ist nur eine andere Schreibweise für $s \not\leftarrow P$. In früheren Veröffentlichungen haben wir für den Fall der Unbestimmtheit die Schreibweise $s? \leftarrow P$ verwendet. Diese Schreibweise ist irreführend, weil sie neben $s \leftarrow P$ und $s \not\leftarrow P$ eine dritte Form des Prädizierens suggeriert. Eine solche selbständige Form des Prädizierens gibt es aber in Wirklichkeit nicht. Das Symbol $?P(s)$ ist nur eine Abkürzung für die logisch zusammengesetzte Aussage $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim\neg(s \leftarrow P)$. Eine Einführung des Symbols $?\neg P(s)$ erübrigt sich, da $?P(s) \equiv ?\neg P(s)$ gilt.

Die innere Negation und das Unbestimmtheitszeichen spielen nicht nur in der Prädikationstheorie eine Rolle. Wir verwenden deshalb im weiteren die Ausdrücke „klassischer Fall" und „nichtklassischer Fall" im folgenden Sinne: einen *klassischen Fall* einer logischen Theorie oder eines formalen Systems nennen wir eine Theorie bzw. ein System, in dem die Negationen $\sim$ und $\neg$ nicht unterschieden werden und demzufolge das Zeichen ? nicht vorkommt; vom *nichtklassischen Fall* einer logischen Theorie oder eines formalen Systems sprechen wir, wenn die Negationen $\sim$ und $\neg$ unterschieden werden und die Möglichkeit besteht, das Zeichen ? einzuführen.

8.2 Existenz und Prädikation

Wenn ich zu meinem Sohn sage: „Die Pfingstrosen in meinem Arbeitszimmer haben eine wunderschöne rote Farbe", und er mir antwortet: „Nein, das ist nicht der Fall", dann hat er recht und macht eine wahre Aussage. Die Gründe für ein Verwerfen meines Satzes können verschieden sein. Es kann der Fall sein, daß zwar Pfingstrosen in meinem Arbeitszimmer sind, doch sie sind weiß, oder daß zwar rote Pfingstrosen in meinem Arbeitszimmer sind, ihre Farbe aber nicht wunderschön ist. Doch ich meine hier einen anderen Fall. Mein Sohn ist ein vernünftiger junger Mann, der allerdings keinerlei Kenntnis der Wahrheitswertlückensemantik der modernen Logik hat. Deshalb verwirft er meinen Satz, weil überhaupt keine Pfingstrosen in meinem Arbeitszimmer sind.

Trotzdem ist sein Satz „Es ist nicht der Fall, daß die Pfingstrosen in deinem Arbeitszimmer eine wunderschöne rote Farbe haben" wahr. Wenn ich unter den gleichen Umständen zu meinem Sohn sagen würde „Die Pfingstrosen in meinem Arbeitszimmer haben keine wunderschöne rote Farbe", könnte er entgegnen „Es ist nicht der Fall, daß ..." und seine Behauptung wäre wahr.

Dieses Beispiel verdeutlicht, daß in der Umgangssprache ein Unterschied zwischen innerer und äußerer Negation besteht. Ein elementarer Satz der Form $s \leftarrow P$ oder $s \not\leftarrow P$ kann nur wahr sein, wenn sein Subjektterminus s ein Objekt bezeichnet, d. h., wenn wir Sätze der Form $s \leftarrow P$ oder $s \not\leftarrow P$ haben und ihr Subjektterminus s ist leer, so sind diese Sätze nicht wahr.

In einer bestimmten Variante der Wahrheitswertlückentheorie der modernen Logik, die auf Frege zurückgeht, werden solchen Sätzen überhaupt keine Wahrheitswerte zugeschrieben. Frege schreibt: „Wenn man etwas behauptet, so ist immer die Voraussetzung selbstverständlich, daß die gebrauchten einfachen oder zusammengesetzten Eigennamen eine Bedeutung haben. Wenn man also behauptet, ‚Kepler starb im Elend', so ist dabei vorausgesetzt, daß der Name ‚Kepler' etwas bezeichne; aber darum ist doch im Sinne des Satzes ‚Kepler starb im Elend' der Gedanke, daß der Name ‚Kepler' etwas bezeichne, nicht enthalten. Wenn das der Fall wäre, müßte die Verneinung nicht lauten ‚Kepler starb nicht im Elend', sondern ‚Kepler starb nicht im Elend, oder der Name ‚Kepler' ist bedeutungslos'. Daß der Name ‚Kepler' etwas bezeichne, ist vielmehr Voraussetzung ebenso für die Behauptung ‚Kepler starb im Elend' wie für die entgegengesetzte." (Frege 1975, S. 54/55)

Zu dieser Fregeschen Auffassung möchte ich folgende Bemerkungen machen:

1. Wenn die Subjekttermini von elementaren Sätzen leer sind, so sind diese Sätze nach Freges Ansicht bedeutungslos, d. h., sie haben weder den Wert v noch den Wert f. Meiner Ansicht nach kann solch ein Satz mit einem leeren Subjektterminus nicht wahr sein, er muß jedoch nicht ohne Wahrheitswert sein.
2. Frege unterscheidet nicht zwischen innerer und äußerer Negation, d. h., er identifiziert diese beiden verschiedenen Formen der Negation. In unserer Prädikationstheorie mit den beiden Formen der Negation können wir ohne Widerspruch elementaren Sätzen mit leeren Subjekttermini den Wert „falsch" zuschreiben.

3. Frege schließt elementare Sätze mit leeren Subjekttermini aus seiner Logik ganz aus, d. h., er hat keine Möglichkeit in seiner Logik, mit solchen Sätzen umzugehen. In der Frege-schen Logik können wir einen elementaren Satz mit einem leeren Subjektterminus weder behaupten noch verwerfen.

In Prior 1957 wird, angeregt von Frege, ein modaler Aussagenkalkül - das System Q - aufgebaut, der Wahrheitswertlücken erlaubt. In Ruzsa 1981 finden wir eine weitere Entwicklung dieser Ideen in allen logischen Details. In der Semantik dieser modalen Logik haben wir drei Werte 0, 1 und 2, wobei 0 und 1 für die üblichen Wahrheitswerte „wahr" und „falsch" stehen, während 2 für „nicht feststellbar" („unstatable") steht, d. h., 2 stellt die Wahrheitswertlücke dar. Die semantischen Regeln dieses Systems sind so ausgewählt, daß eine zusammengesetzte Formel den Wert „unstatable" hat, wenn eine Teilformel von ihr den Wert „unstatable" hat. Als Konsequenz ergibt sich aus dieser Konvention, daß wir in der Objektsprache einer solchen Logik keinen Satz mit dem Wert „unstatable" verwerfen können, denn die Negation eines solchen Satzes ist wieder „unstatable".

Bei Sätzen mit leeren Subjekttermini können wir in unserer Prädikationstheorie sowohl $s \leftarrow P$ als auch $s \not\leftarrow P$ den Wert f zuschreiben. Außerdem können wir solche Sätze mit Hilfe der äußeren Negation verwerfen.

Da Aussagen der Form $s \leftarrow P$ und $s \not\leftarrow P$ nur wahr sein können, wenn s kein leerer Terminus ist, kann eine Aussage der Form $s \not\leftarrow E$ mit dem Existenzprädikat E nicht wahr sein, d. h., wir können die folgende Formel als Axiom einer Existenzlogik setzen:

A1. $\vdash \sim(s \not\leftarrow E)$,

denn wenn s existiert, so gilt $s \leftarrow E$, und daraus folgt $\sim(s \not\leftarrow E)$, und wenn s nicht existiert, so müssen wir $s \not\leftarrow E$ verwerfen, da s ein leerer Terminus ist. Für elementare Existenzaussagen kann also nur die äußere Negation sinnvoll behauptet werden.

Weiterhin gilt offenbar folgendes Axiom:

A2. $(s \leftarrow P) \vee (s \not\leftarrow P) \vdash E(s)$

Umgekehrt gilt:

A3. $\sim E(s) \vdash ?P(s)$

Da etwas logisch Widersprüchliches nicht existiert, setzen wir außerdem:

A4. $(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \leftarrow P) \vdash \sim E(s)$.

Ausführlicher wird das Existenzprädikat untersucht in Krampitz 1988 und Krampitz 1990.

Nach diesen Vorbemerkungen geben wir nun das Alphabet und die Definition einer Prädikatformel der Prädikationstheorie an. Das Alphabet der Prädikationstheorie erhalten wir, wenn wir das Alphabet der Aussagenlogik um folgende Symbole ergänzen:

1. $s, s_1, s_2, \ldots$	- Subjektvariablen
2. $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, \ldots$	- Prädikatenvariablen
3. $\neg$	- innere Negation
4. ?	- Unbestimmtheitszeichen

D1. Prädikatformel:

1. Wenn x eine Subjektvariable und f eine einstellige Prädikatenvariable ist, so sind $f(x)$ und $\neg f(x)$ Prädikatformeln.
2. Wenn $x_1, \ldots, x_n$ Subjektvariablen sind und f eine n-stellige Prädikatenvariable ist, so sind $f(x_1, \ldots, x_n)$ und $\neg f(x_1, \ldots, x_n)$ Prädikatformeln.
3. Nur die in den Punkten 1 und 2 genannten Zeichenreihen sind Prädikatformeln.

D2. Formel der Prädikationstheorie:
Eine Definition einer Formel der Prädikationstheorie erhalten wir, wenn wir in einer Formeldefinition der Aussagenlogik überall den Ausdruck „aussagenlogische Formel“ durch „Formel der Prädikationstheorie“ und außerdem Punkt 1 durch folgenden ersetzen:

1. Aussagenvariablen und Prädikatformeln sind Formeln der Prädikationstheorie.

D3. $?P(s) \equiv_{Def} \sim P(s) \wedge \sim\neg P(s)$.

$?P(s)$ kann gelesen werden als: „Es werden sowohl $P(s)$ als auch $\neg P(s)$ verworfen“ oder „Es gilt keine der beiden Aussagen $P(s)$ und $\neg P(s)$“.

Im weiteren steht der Buchstabe a in Formeln der Form $f(a)$, $\neg f(a)$ usw. für eine Subjektvariable oder eine Gruppe von Subjektvariablen. Zwei Formeln der Form A und $\neg A$ nennen wir zueinander *konträre Formeln*.

Übung:

Welche der folgenden Zeichenreihen sind Formeln der Prädikationstheorie und welche nicht:

a) $\neg A$,
b) $\sim\neg A$,
c) $\sim P(s) \wedge \sim\neg P(s)$,
d) $\neg\neg P(s)$,
e) $\neg p \vee p$,
f) $P(s) \supset \neg\sim P(s)$,
g) $P(s) \vee \neg P(s)$?

8.3 Semantik der nichttraditionellen Prädikationstheorie

Entsprechend unseren intuitiven Ausgangsüberlegungen über einfache Aussagen fügen wir zu den semantischen Regeln der klassischen Aussagenlogik folgende zusätzliche semantische Regeln der nichttraditionellen Prädikationstheorie hinzu:

R1. Prädikatformeln werden die Wahrheitswerte v und f genauso zugeschrieben wie den Aussagenvariablen. Dabei sind zwei Prädikatformeln verschieden genau dann, wenn sie sich graphisch unterscheiden.
R2. Wenn A den Wert v, so hat $\neg A$ den Wert f.
R3. Wenn $\neg A$ den Wert v, so hat A den Wert f.
R4. Wenn A den Wert f hat, so hängt der Wert von $\neg A$ nicht vom Wert von A ab, d. h., $\neg A$ kann sowohl den Wert v als auch den Wert f haben.
R5. Wenn $\neg A$ den Wert f hat, so hängt der Wert von A nicht vom Wert von $\neg A$ ab.
R6. $?A$ ist äquivalent mit $\sim A \wedge \sim\neg A$.

Tautologien sind wie in der Aussagenlogik Formeln, die immer den Wert v annehmen. Auch die Termini *Kontradiktion*, *erfüllbare Formel*, *logisch indeterminierte Formel* verwenden wir wie in der Aussagenlogik. Die nichttraditionelle Prädikationstheorie ist bezüglich der angegebenen Semantik entscheidbar, d. h., von einer beliebigen Formel der nichttraditionellen Prädikationstheorie kann nach einem einheitlichen Verfahren in endlich vielen Schritten entschieden werden, ob sie eine Tautologie, eine Kontradiktion oder eine logisch indeterminierte Formel ist. Wir beschreiben anschließend solch ein Entscheidungsverfahren, für dessen Durchführung es zweckmäßig ist, zwei abgeleitete semantische Regeln zu formulieren, die sich aus den Regeln *R1-R6* und aus den semantischen Regeln der Aussagenlogik ergeben.

R7. Von den drei Formeln A, $\neg A$ und $?A$ darf höchstens einer der Wahrheitswert v zugeschrieben werden.

R8. Kommen die drei Formeln A, $\neg A$ und $?A$ in einer Formel vor, so muß mindestens einer von ihnen der Wahrheitswert v zugeschrieben werden.

Im ersten Schritt des Entscheidungsverfahrens schreiben wir wie in der Aussagenlogik alle möglichen Wertkombinationen unter die Aussagenvariablen und Prädikatformeln einer Formel, dabei schreiben wir den Prädikatformeln genauso Werte zu wie den Aussagenvariablen und sehen zwei Prädikatformeln als verschieden an, wenn sie sich graphisch unterscheiden, d. h., drei Prädikatformeln der Form $P(s)$, $\neg P(s)$ und $?P(s)$ schreiben wir die Werte so zu wie drei verschiedenen Aussagenvariablen. Im zweiten Schritt des Entscheidungsverfahrens streichen wir von diesen Wertkombinationen alle, die den semantischen Festlegungen der Regeln *R1-R6* widersprechen. Bei der praktischen Durchführung kommen wir dabei mit den beiden abgeleiteten semantischen Regeln *R7* und *R8* aus, d. h., wir streichen zunächst alle Zeilen, in denen mehr als einer von drei Formeln der Form $P(s)$, $\neg P(s)$ und $?P(s)$ der Wert v zugesprochen wurde, und danach streichen wir alle Zeilen, in denen allen drei Formeln der Form $P(s)$, $\neg P(s)$ und $?P(s)$ der Wert f zugeschrieben wurde. In den verbleibenden Zeilen ermitteln wir im dritten Schritt jeweils den Wahrheitswert der Gesamtformel nach den aussagenlogischen semantischen Regeln.

Wir betrachten einige Beispiele. Zunächst prüfen wir, ob die Formel

$$P(s) \supset \sim\neg P(s) \wedge \sim ?P(s)$$

eine Tautologie ist oder nicht:

Erster Schritt:

$P(s) \supset$	$\sim\neg P(s) \wedge$	$\sim ?P(s)$
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

Zweiter Schritt:

$P(s) \supset$	$\sim\neg P(s) \wedge$	$\sim ?P(s)$
~~v~~	~~v~~	~~v~~
~~v~~	~~v~~	~~f~~
~~v~~	~~f~~	~~v~~
v	f	f
~~f~~	~~v~~	~~v~~
f	v	f
f	f	v
~~f~~	~~f~~	~~f~~

Die Zeilen 1, 2, 3 und 5 streichen wir nach der Regel *R7* und die Zeile 8 nach der Regel *R8.*

Dritter Schritt:

$P(s)$	$\supset$	$\sim$	$\neg P(s)$	$\wedge$	$\sim$	$?P(s)$
v	v	v	f	v	v	f
f	v	f	v	f	v	f
f	v	v	f	f	f	v

Die Formel $P(s) \supset {\sim}\neg P(s) \wedge {\sim}?P(s)$ ist also eine Tautologie der Prädikationstheorie. Genauso wie in der Aussagenlogik können wir auch in der Prädikationstheorie ein verkürztes Entscheidungsverfahren anwenden. Wir demonstrieren das an der gleichen Formel. Wir nehmen an, die Formel wäre keine Tautologie, d. h., es wäre möglich, daß sie mindestens einmal den Wert f annimmt. Dann müßte das Antezedent $P(s)$ den Wert v und das Konsequent ${\sim}\neg P(s) \wedge {\sim}?P(s)$ den Wert f haben. Wenn diese Konjunktion falsch ist, muß mindestens eines ihrer Glieder den Wert f haben, d. h., eine der beiden Formeln $\neg P(s)$ und $?P(s)$ müßte den Wert v haben. Nach *R7* ist es aber unmöglich, daß $P(s)$ und eine der beiden Formeln $\neg P(s)$ und $?P(s)$ den Wert v haben. Also ist die betrachtete Formel eine Tautologie.

Im folgenden Beispiel führen wir alle drei Schritte des Entscheidungsverfahrens in einer Tabelle aus:

$P(s)$	$\wedge$	$\neg Q(s)$	$\supset$	$\sim$	$\neg P(s)$	$\wedge$	$\sim$	$Q(s)$
~~v~~		~~v~~			~~v~~			~~v~~
~~v~~		~~v~~			~~v~~			~~f~~
~~v~~		~~v~~			~~f~~			~~v~~
v	v	v	v	v	f	v	v	f
~~v~~		~~f~~			~~v~~			~~v~~
~~v~~		~~f~~			~~v~~			~~f~~
v	f	f	v		f			v
v	f	f	v		f			f
~~f~~		~~v~~			~~v~~			~~v~~
f	f	v	v		v			f
~~f~~		~~v~~			~~f~~			~~v~~
f	f	v	v		f			f
f	f	f	v		v			v
f	f	f	v		v			f
f	f	f	v		f			v
f	f	f	v		f			f

Die Zeilen 1, 2, 3, 5, 6, 9 und 11 werden wegen *R7* gestrichen. Für Zeile 4 haben wir den Wert v ermittelt. In den übrigen Zeilen nimmt das Antezedent der Subjunktion den Wert f an, d. h., die Subjunktion hat den Wert v, und wir brauchen nicht den Wert ihres Konsequentes auszurechnen.

Für die nichttraditionelle Prädikationstheorie gilt folgendes Metatheorem:

MT1. Wenn A eine Tautologie der Prädikationstheorie ist, so ist die Formel $K_1 \supset (K_2 \supset \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ eine aussagenlogische Tautologie, wobei A' die Formel $A\{f_1(a), \ldots, f_n(a), \neg f_1(a), \ldots, \neg f_n(a)/p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\}$ ist, unter den $f_1(a), \ldots, f_n(a)$, $\neg f_1(a), \ldots, \neg f_n(a)$ alle Prädikatformeln vorkommen, die in A vorkommen, $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ paarweise verschiedene Aussagenvariablen sind, die nicht in A vorkommen, und $K_1, \ldots, K_m$ $(m \leq n)$ entsprechend die Formeln ${\sim}(p_i \wedge q_i)$ für alle i $(i = 1, \ldots, m)$ sind, für die gilt, $f_i(a)$ und $\neg\, f_i(a)$ kommen in A vor.

Beweis: Wir unterscheiden im Beweis zwei Fälle.

Erster Fall: In A kommen keine zwei Formeln $f_1(a)$ und $\neg f_1(a)$ gemeinsam vor. Dann ist $m = 0$, d. h., die Formel $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A')\ldots)$ ist die Formel A'. In diesem Falle ist A' eine Tautologie, da den Aussagenvariablen p_i und q_i genauso Wahrheitswerte zugeschrieben werden wie den Formeln $f_i(a)$ und $\neg f_i(a)$.

Zweiter Fall: In A kommt mindestens ein Paar von Prädikatformeln $f_i(a)$ und $\neg f_i(a)$ gemeinsam vor. Da A eine Tautologie der Prädikationstheorie ist, hat die Formel A' bei allen Wertkombinationen, bei denen p_i und q_i nicht beiden der Wert v zugeschrieben wird, den Wert wahr. In diesen Fällen hat also auch die Formel $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A')\ldots)$ den Wert wahr. Wird p_i und q_i beiden der Wert v zugeschrieben, so hat K_i den Wert f, und $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A')\ldots)$ hat folglich den Wert v.

Übungen:

1. Prüfen Sie, welche der folgenden Formeln Tautologien der Prädikationstheorie sind und welche nicht:
   a) $P(s) \vee \neg P(s)$
   b) $\sim(P(s) \wedge \neg P(s))$
   c) $\sim\neg P(s) \supset P(s)$
   d) $P(s) \vee \neg P(s) \vee ?P(s)$
   e) $\sim ?P(s) \equiv P(s) \vee \neg P(s)$
   f) $\sim(P(s) \wedge \neg Q(s)) \supset \neg P(s) \vee ?Q(s)$
   g) $\sim(\neg P(s) \vee ?Q(s)) \supset (P(s) \vee ?P(s)) \wedge (Q(s) \vee \neg Q(s))$!
2. Überprüfen Sie mit Hilfe der semantischen Regeln der nichttraditionellen Prädikationstheorie, welche der folgenden „Analoga“ der reductio ad absurdum gültige Regeln der Folgebeziehung sind und welche nicht (Hinweis zur Lösung: Deuten Sie die logische Folgebeziehung $\vdash$ als Subjunktion!):
   a) $P(s) \supset \sim P(s) \vdash \sim P(s)$
   b) $P(s) \supset \sim P(s) \vdash \neg P(s)$
   c) $P(s) \supset \neg P(s) \vdash \sim P(s)$
   d) $P(s) \supset \neg P(s) \vdash \neg P(s)$
   e) $\sim P(s) \supset P(s) \vdash \sim P(s)$
   f) $\sim P(s) \supset P(s) \vdash \neg P(s)$
   g) $\sim P(s) \supset \neg P(s) \vdash P(s)$
   h) $\sim P(s) \supset \neg P(s) \vdash \neg P(s)$
   i) $\sim P(s) \supset \sim\sim P(s) \vdash P(s)$
   j) $\sim P(s) \supset \sim\sim P(s) \vdash \sim P(s)$
   k) $\sim P(s) \supset \sim\sim P(s) \vdash \neg P(s)$
   l) $\sim P(s) \supset \sim\neg P(s) \vdash P(s)$
   m) $\sim P(s) \supset \sim\neg P(s) \vdash \neg P(s)$
   n) $\sim P(s) \supset \sim\neg P(s) \vdash \sim P(s)$!

8.4 Nichttraditionelle Prädikationstheorie im System des natürlichen Schließens

Alphabet und Formeldefinition wählen wir wie im Abschnitt 2. Wir setzen folgende zusätzliche Regel zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis:

12. *Einführungsregel der inneren Negation (EiN):*

$$\frac{f(a)}{\sim\neg f(a)}\,,$$

wobei a eine Subjektvariable s oder eine Gruppe von Subjektvariablen $s_1, \ldots, s_n$ und f entsprechend eine einstellige oder n-stellige Prädikatenvariable ist. In die Strukturregeln zum Aufbau eines direkten und eines indirekten Beweises wird die Regel *EiN* mit aufgenommen.

Beweis einiger Theoreme:

T1. $P(s) \supset \sim\neg P(s)$

1. $P(s)$	(A. d. B.)
2. $\sim\neg P(s)$	(1., *EiN*)

T2. $\neg P(s) \supset \sim P(s)$

1. $P(s) \supset \sim\neg P(s) \supset (\neg P(s) \supset \sim P(s))$	(*AL*)
2. $\neg P(s) \supset \sim P(s)$	(*AR*, 1., *T1*)

T3. $\sim(P(s) \wedge \neg P(s))$

1. $P(s) \wedge \neg P(s)$	(A. d. i. B.)
2. $P(s)$	(*BK*, 1.)
3. $\neg P(s)$	(*BK*, 1.)
4. $\sim P(s)$	(*AR*, 3., *T2*)
(Wdspr. 2., 4.)	

T4. $P(s) \vee \neg P(s) \vee ?P(s)$

1. $\sim(P(s) \vee \neg P(s) \vee \sim P(s) \wedge \sim\neg P(s))$	(A. d. i. B., *D3*)
2. $\sim P(s) \wedge \sim\neg P(s) \wedge \sim(\sim P(s) \wedge \sim\neg P(s))$	(1., *AL*)
3. $\sim P(s)$	(*BK*, 2.)
4. $\sim\neg P(s)$	(*BK*, 2.)
5. $\sim(\sim P(s) \wedge \sim\neg P(s))$	(*BK*, 2.)
6. $P(s) \vee \neg P(s)$	(*AL*, 5.)
7. $\neg P(s)$	(*BA*, 3., 6.)
(Wdspr. 4., 7.)	

Den klassischen Fall der Prädikationstheorie erhalten wir, wenn wir eine der beiden folgenden Regeln setzen:

$$\frac{\sim\neg f(a)}{f(a)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sim f(a)}{\neg f(a)}$$

Im klassischen Fall ist die Prädikationstheorie trivial, da $\neg f(a) \equiv \sim f(a)$ gilt. In diesem Fall benötigen wir außer dieser Bisubjunktion nur die aussagenlogischen Regeln des Systems des natürlichen Schließens.

Übungen:

1. Beweisen Sie folgende Theoreme:
   T5. $\sim P(s) \vee \sim\neg P(s)$
   T6. $\sim\neg P(s) \vee \sim ?P(s)$
   T7. $?P(s) \supset \sim P(s)$

T8. $\neg P(s) \supset \sim ?P(s)$

T9. $\sim ?P(s) \supset P(s) \vee \neg P(s)$!

2. Zeigen Sie, daß wir eine äquivalente Prädikationstheorie erhalten, wenn wir anstelle von *EiN* die folgende Beseitigungsregel der inneren Negation (*BiN*) setzen:

$$\frac{\neg f(a)}{\sim f(a)}$$

8.5 Axiomatischer Aufbau der nichttraditionellen Prädikationstheorie

Neben den Ergänzungen zum Alphabet und zur Formeldefinition fügen wir zu einem widerspruchsfreien und vollständigen axiomatischen Aufbau der Aussagenlogik folgendes Axiomenschema hinzu:

A1. $\sim(f(a) \wedge \neg f(a))$, wobei a wieder eine Subjektvariable s oder eine Gruppe von Subjektvariablen $s_1, \ldots, s_n$ und f entsprechend eine einstellige oder n-stellige Prädikatenvariable ist.

Durch einfache aussagenlogische Umformungen erhalten wir folgende Theoremschemata:

T1. $\sim f(a) \vee \sim\neg f(a)$

T2. $f(a) \supset \sim\neg f(a)$

T3. $\neg f(a) \supset \sim f(a)$

Für das Axiomensystem gelten folgende Metatheoreme:

MT1. Das angegebene Axiomensystem der Prädikationstheorie ist widerspruchsfrei.

Beweis: Wir ersetzen $\neg$ überall durch $\sim$. Bei dieser Interpretation sind alle Axiome des Axiomenschemas *A1* Tautologien.

Für den Vollständigkeitsbeweis benötigen wir folgendes Metatheorem:

MT2. Eine Formel A ist in der nichttraditionellen Prädikationstheorie genau dann beweisbar, wenn die Formel $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ in der Aussagenlogik beweisbar ist, wobei wir die Bezeichnungen wie in *MT1* von Abschnitt 3 wählen.

Wir beweisen zunächst den Satz: Wenn die Formel $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ in der Aussagenlogik beweisbar ist, so ist A in der Prädikationstheorie beweisbar. Da die Aussagenlogik in der Prädikationstheorie enthalten ist, ist $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ in der Prädikationstheorie beweisbar. Wir setzen in ihr entsprechend die Prädikatformeln $f_1(a), \ldots, f_n(a)$, $\neg f_1(a), \ldots, \neg f_n(a)$ für die Aussagenvariablen $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ ein. Bei dieser Einsetzung geht A' in A über, und alle Einsetzungen in $K_1, \ldots, K_m$ ergeben beweisbare Formeln, da sie alle unter das Axiomenschema der Prädikationstheorie *A1* fallen. Mit Hilfe der Abtrennungsregel können wir die Einsetzungen in $K_1, \ldots, K_m$ also abtrennen und erhalten: A ist beweisbar.

Wir zeigen jetzt, daß gilt: Wenn A in der Prädikationstheorie beweisbar ist, so ist $K_1 \supset$ $\supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ in der Aussagenlogik beweisbar. Im Beweis dieses Satzes unterscheiden wir mehrere Fälle.

Erster Fall: Wenn A keine Prädikatformeln enthält, d. h. eine aussagenlogische Formel ist, so ist $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ mit A identisch und beweisbar.

Zweiter Fall: Wenn A aus einem aussagenlogischen Theorem durch Einsetzung von Prädikatformeln mit Hilfe der Einsetzungsregel gewonnen wurde, so ist A eine Tautologie, folglich sind auch A' und $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ Tautologien, und auf Grund der Vollständigkeit der Aussagenlogik ist $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ beweisbar.

Dritter Fall: Unter den dritten Fall fallen alle Theoreme, in deren Beweis das Axiomenschema der Prädikationstheorie benutzt wird. Für diesen Fall führen wir den Beweis induktiv.

Anfangsschritt: A ist ein Axiom der Prädikationstheorie. Dann hat die Formel $K_1 \supset (K_2 \supset \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ die Form $\sim(p_1 \wedge q_1) \supset \sim(p_1 \wedge q_1)$ und ist in der Aussagenlogik beweisbar.

Im *Induktionsschritt* unterscheiden wir die beiden folgenden Fälle:

1. A hat die Form $B\{a/C\}$ und wurde mit Hilfe der Einsetzungsregel aus B gewonnen.

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann B eine Tautologie, und $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_l \supset \supset B') \ldots)$ $(l \leq m)$ ist in der Aussagenlogik beweisbar und eine Tautologie. Die beiden Fälle, daß a nicht in B vorkommt und daß C eine aussagenlogische Formel ist, sind trivial. Es bleibt der Fall zu betrachten, daß C eine Prädikatformel ist. Hier unterscheiden wir zwei Teilfälle:

1.1. Die zu C konträre Prädikatformel kommt nicht in B vor.
1.2. Die zu C konträre Prädikatformel kommt in B vor.

Im Falle 1.1. ist $l = m$, und $B\{a/C\}'$ unterscheidet sich von B' nur dadurch, daß anstelle von a eine andere Aussagenvariable steht, folglich ist $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ eine Tautologie und in der Aussagenlogik beweisbar. Im Fall 1.2. ist $l \neq m$, und es ist möglich, daß $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_l \supset A') \ldots)$ keine Tautologie ist. Die Formel $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset \supset A') \ldots)$ erhalten wir auf folgende Weise aus der Formel $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_l \supset B') \ldots)$. Die Formel C möge $f_i(a)$ (bzw. $\neg f_i(a)$) sein. Mit Hilfe des Theorems der Aussagenlogik $p \supset (q \supset p)$ erhalten wir aus $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_l \supset B') \ldots)$ die Formel $\sim(p_i \wedge q_i) \supset (K_1 \supset \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_l \supset B') \ldots))$, d. h. die Formel $K_i \supset (K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_l \supset B') \ldots))$. Mit Hilfe des Gesetzes der Prämissenvertauschung $p \supset (q \supset r) \equiv q \supset (p \supset r)$ erhalten wir daraus $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset B') \ldots)$. In dieser Formel setzen wir für die Aussagenvariable a die Aussagenvariable p_i (bzw. q_i) ein und erhalten $K_1 \supset (K_2 \supset \ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$

2. A wird mit Hilfe der Abtrennungsregel aus den beiden Formeln $B \supset A$ und B gewonnen.

Auf Grund der Induktionsvoraussetzung sind dann die beiden Formeln $K_{i1} \supset (\ldots \supset (K_{ik} \supset \supset (B' \supset A')) \ldots)$ $(k \leq m)$ und $K_{j1} \supset (\ldots \supset (K_{jl} \supset B') \ldots)$ $(l \leq k)$ in der Aussagenlogik beweisbar, wobei alle K_{ji} unter den $K_{i1}, \ldots, K_{ik}$ vorkommen. Mit Hilfe des Deduktionstheorems (vgl. Übung 1 zu diesem Abschnitt) erhalten wir daraus $K_1 \supset (\ldots \supset (K_k \supset A') \ldots)$ $(k \geq m)$.

Aus dieser Formel erhalten wir $K_1 \supset (\ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$, indem wir in allen K_i, die Aussagenvariablen enthalten, die nicht in A' vorkommen, für diese Aussagenvariablen eine Kontradiktion einsetzen. Damit werden diese K_i Tautologien und sind auf Grund der semantischen Vollständigkeit der Aussagenlogik beweisbar. Mit Hilfe des Gesetzes der Prämissenvertauschung und der Abtrennungsregel können wir diese K_i abtrennen, und wir erhalten:

$K_1 \supset (\ldots \supset (K_m \supset A') \ldots)$ ist in der Aussagenlogik beweisbar.

Aus *MT2* und *MT1* aus Abschnitt 3 ergibt sich folgendes Vollständigkeitstheorem:

MT3. Wenn eine Formel A eine Tautologie der Prädikationstheorie ist, so ist A in der nichttraditionellen Prädikationstheorie beweisbar.

Übungen:

1. Formulieren Sie den Ableitungsbegriff (den Begriff des Beweises aus Annahmen) für die Prädikationstheorie und beweisen Sie das Deduktionstheorem!
2. Beweisen Sie, daß das System des natürlichen Schließens der Prädikationstheorie mit ihrem axiomatischen Aufbau deduktiv äquivalent ist!
3. Beweisen Sie das Ersetzbarkeitstheorem für die Prädikationstheorie!

8.6 Systeme der logischen Folgebeziehung für die Prädikationstheorie

Systeme der logischen Folgebeziehung für die Prädikationstheorie erhält man, wenn man zu den Axiomenschemata der allgemeinen Theorie der Folgebeziehung S^S oder F^S die beiden folgenden Axiomenschemata hinzufügt:

A1. $f(a) \vdash \sim\neg f(a)$

A2. $\neg f(a) \vdash \sim f(a)$.

8.7 Semantische Tableaus für die Prädikationstheorie

Eine Darstellung der nichttraditionellen Prädikationstheorie als Kalkül der semantischen Tableaus erhalten wir, wenn wir zu den aussagenlogischen Regeln aus Abschnitt 15 des vierten Kapitels folgende Regeln zur Entwicklung der semantischen Tableaus für Formeln der nichttraditionellen Prädikationstheorie hinzufügen:

15. *Regel der vorderen inneren Negation* (*ViN*):

$\vdots$	$\vdots$
$\neg f(a)$	.
$\vdots$	$\vdots$

$\vdots$	$\vdots$
$\neg f(a)$	.
$\vdots$	.
	$f(a)$

16. *Regel der hinteren inneren Negation* (*HiN*):

$\vdots$	$\vdots$
.	$\neg f(a)$
$\vdots$	$\vdots$

$\vdots$		$\vdots$	
.		$\neg f(a)$	
$\vdots$		$\vdots$	
$f(a)$			$f(a)$

Beispiele für eine Anwendung dieser Regeln:

	v		f	
1.			$P(s) \wedge \neg Q(s) \supset \sim\neg P(s) \wedge \sim Q(s)$	
2.	$P(s) \wedge \neg Q(s)$		$\sim\neg P(s) \wedge \sim Q(s)$	
3.	$P(s)$			
	$\neg Q(s)$			
4.			$Q(s)$	
5.			$\sim\neg P(s)$	$\sim Q(s)$
6.	$\neg P(s)$			
7.		$Q(s)$		
8.			$P(s)$	

Da alle Teiltableaus geschlossen sind, ist die Formel eine Tautologie der nichttraditionellen Prädikationstheorie.

	v	f
1.		$\sim\neg P(s) \supset P(s)$
2.	$\sim\neg P(s)$	$P(s)$
3.		$\neg P(s)$
4.	$P(s)$	$P(s)$

Bei dieser Formel ist nur das linke Teiltableau geschlossen. Die Formel ist also keine Tautologie der nichttraditionellen Prädikationstheorie.

Übungen:

1. Formulieren Sie die beiden abgeleiteten Regeln zur Entwicklung der semantischen Tableaus für das Unbestimmtheitszeichen:

   17. *Regel der vorderen Unbestimmtheit* (VU):

.	.	
.	.	
.	.	
$?f(a)$	.	
.	.	
.	.	
.	.	

   18. *Regel der hinteren Unbestimmtheit* (HU):

.	.	
.	.	
.	.	
.	$?f(a)$	
.	.	
.	.	
.	.	

2. Überprüfen Sie mit Hilfe der Methode der semantischen Tableaus, welche der folgenden Regeln gültige Regeln der Folgebeziehung sind und welche nicht:

   a) $\sim P(s) \supset Q(s) \wedge \sim Q(s) \vdash P(s)$
   b) $\sim P(s) \supset Q(s) \wedge \sim Q(s) \vdash \neg P(s)$
   c) $\sim P(s) \supset Q(s) \wedge \sim Q(s) \vdash \sim P(s)$
   d) $\sim P(s) \supset Q(s) \wedge \sim Q(s) \vdash \sim\neg P(s)$
   e) $\neg P(s) \supset Q(s) \wedge \sim Q(s) \vdash P(s)$
   f) $\neg P(s) \supset Q(s) \wedge \sim Q(s) \vdash \neg P(s)$
   g) $\neg P(s) \supset Q(s) \wedge \sim Q(s) \vdash \sim P(s)$
   h) $\neg P(s) \supset Q(s) \wedge \sim Q(s) \vdash \sim\neg P(s)$!

   Welches Ergebnis erhalten wir, wenn wir in diesen Regeln die Formel $Q(s) \wedge \sim Q(s)$ durch die Formel $Q(s) \wedge \neg Q(s)$ ersetzen?

8.8 Ein logisches Quadrat für die Prädikationstheorie

Wir treffen folgende Definitionen:

D1. Zwei Formeln A und B sind **zueinander kontradiktorisch** genau dann, wenn $\sim(A \wedge B)$ und $A \vee B$ Tautologien sind.

D2. Zwei Formeln A und B sind **zueinander konträr** genau dann, wenn $\sim(A \wedge B)$ eine Tautologie ist und $A \vee B$ keine Tautologie ist.

D3. Eine Formel B ist gegenüber einer Formel A **subaltern** genau dann, wenn $A \supset B$ eine Tautologie ist und $B \supset A$ nicht.

D4. Zwei Formeln A und B sind **zueinander subkonträr** genau dann, wenn $A \vee B$ eine Tautologie ist und $\sim(A \wedge B)$ nicht.

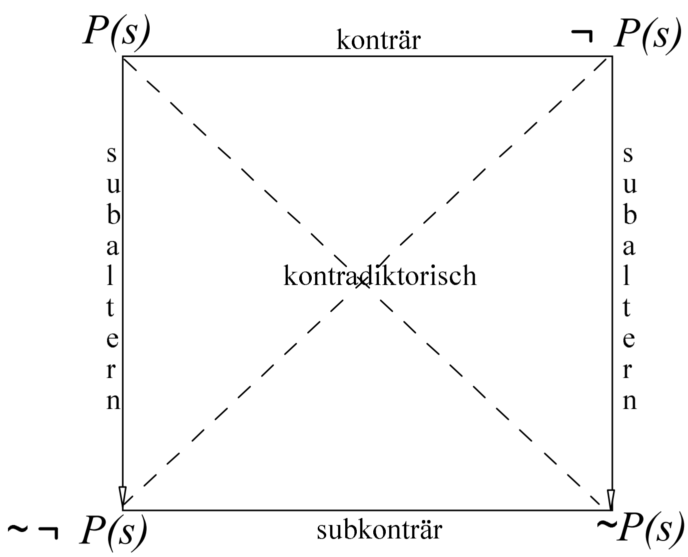
Wir betrachten nun, welche Formeln der nichttraditionellen Prädikationstheorie in den eben definierten Beziehungen zueinander stehen.

Da $\sim(P(s) \wedge \neg P(s))$ eine Tautologie ist und $P(s) \vee \neg P(s)$ nicht, sind $P(s)$ und $\neg P(s)$ zueinander konträr. Die Formeln $P(s)$ und $\sim P(s)$, $\neg P(s)$ und $\sim\neg P(s)$ sind jeweils zueinander kontradiktorisch, da $\sim(P(s) \wedge \sim P(s))$, $P(s) \vee \sim P(s)$, $\sim(\neg P(s) \wedge \sim\neg P(s))$ und $\neg P(s) \vee \sim\neg P(s)$ Tautologien sind.

Die Formel $\sim\neg P(s)$ ist gegenüber $P(s)$ und die Formel $\sim P(s)$ gegenüber $\neg P(s)$ subaltern, da $P(s) \supset \sim\neg P(s)$ und $\neg P(s) \supset \sim P(s)$ Tautologien sind, während es die Formeln $\sim\neg P(s) \supset P(s)$ und $\sim P(s) \supset \neg P(s)$ nicht sind.

Die Formeln $\sim\neg P(s)$ und $\sim P(s)$ sind zueinander subkonträr, da $\sim\neg P(s) \vee \sim P(s)$ eine Tautologie ist, während $\sim(\sim\neg P(s) \wedge \sim P(s))$ keine Tautologie ist.

Diese Beziehungen lassen sich graphisch durch das folgende logische Quadrat darstellen:

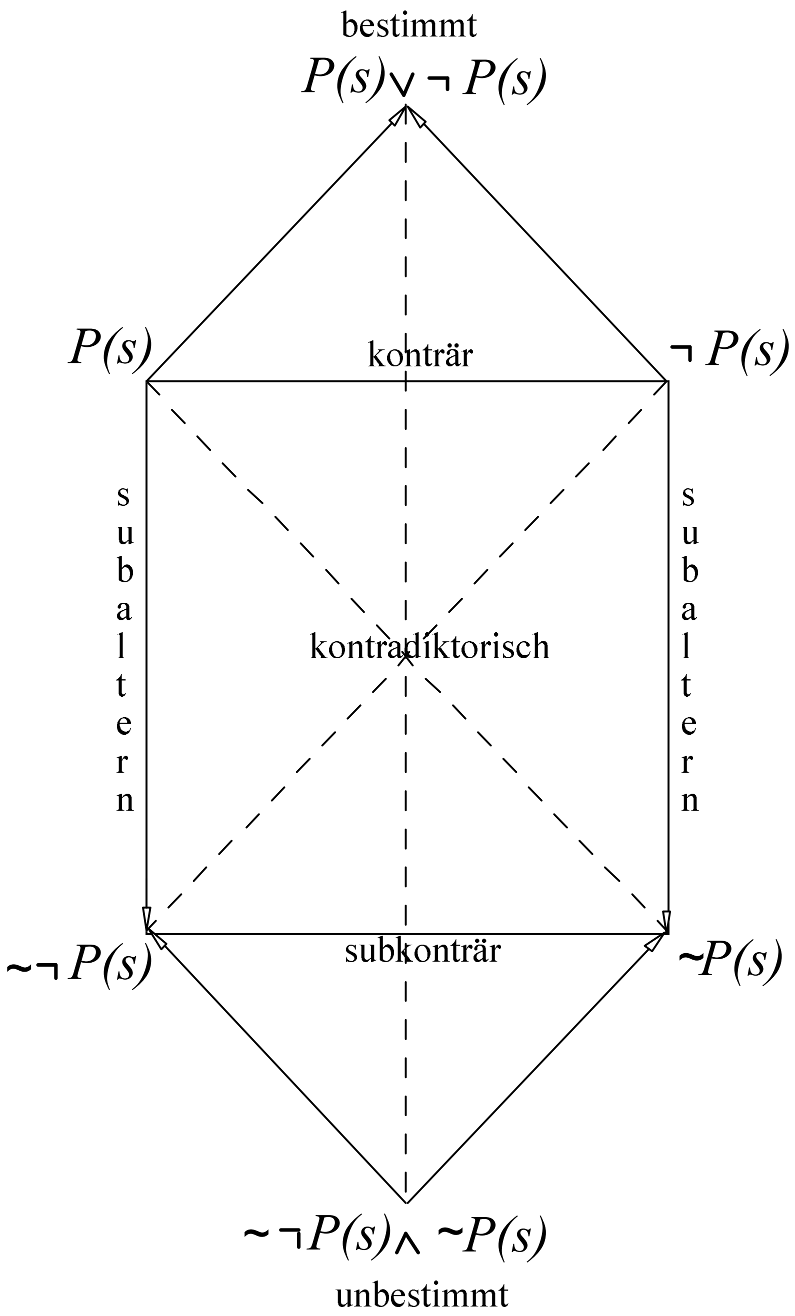


Das logische Quadrat läßt sich zu einem logischen Hexagon erweitern. Wir nennen eine Formel $P(s)$ oder $\neg P(s)$ *bestimmt* genau dann, wenn $P(s) \vee \neg P(s)$ gilt, und wir nennen eine Formel $P(s)$ oder $\neg P(s)$ *unbestimmt* genau dann, wenn $\sim\neg P(s) \wedge \sim P(s)$ gilt.

Die beiden Formeln $P(s) \vee \neg P(s)$ und $\sim\neg P(s) \wedge \sim P(s)$ sind zueinander kontradiktorisch, da $\sim((P(s) \vee \neg P(s)) \wedge \sim\neg P(s) \wedge \sim P(s))$ und $P(s) \vee \neg P(s) \vee \sim\neg P(s) \wedge \sim P(s)$ Tautologien sind.

Die Formel $P(s) \vee \neg P(s)$ ist gegenüber den beiden Formeln $P(s)$ und $\neg P(s)$ subaltern. Die beiden Formeln $\sim\neg P(s)$ und $\sim P(s)$ sind gegenüber der Formel $\sim\neg P(s) \wedge \sim P(s)$ subaltern.

Wir fassen das Ergebnis im folgenden logischen Hexagon zusammen:



9. Kapitel
Semantische Regeln und axiomatischer Aufbau der klassischen Quantorenlogik

9.1 Aussagen mit Quantoren

Quantorenlogik oder *Prädikatenlogik* nennt man den Bereich der Logik, in dem die Eigenschaften der Quantoren „alle“ und „einige“ betrachtet werden. Da die Quantoren logische Operatoren sind, die sich auf Termini in Aussagen beziehen, muß man dabei auch die Gliederung einfacher Aussagen in Subjekte und Prädikate berücksichtigen. Deshalb werden in der Quantorenlogik gleichzeitig die Eigenschaften einfacher Aussagen untersucht.

Die Bezeichnung *Prädikatenlogik* ist historisch bedingt. Wir halten die Bezeichnung *Quantorenlogik* oder *Quantorentheorie* für passender. Trotzdem verwenden wir beide Bezeichnungen, da der Terminus „Prädikatenlogik“ in der Literatur weit verbreitet ist.

Eine Quantorentheorie, in der nicht zwischen den zwei Formen der Negation unterschieden wird (und in der es folglich nicht möglich ist, den Operator der Unbestimmtheit einzuführen), nennen wir *klassischen Fall der Quantorentheorie*. Eine Quantorentheorie, in der die beiden Arten der Negation unterschieden werden und in der der Operator der Unbestimmtheit vorkommt, nennen wir hingegen *nichtklassischen Fall der Quantorentheorie*. Der nichtklassische Fall ist allgemeiner als der klassische.

Außerdem unterscheiden wir zwischen einer *traditionellen* und einer *nichttraditionellen Quantorentheorie*. Eine traditionelle Quantorentheorie enthält nur den klassischen Fall der Quantorentheorie und nur die traditionelle Prädikationstheorie. Eine nichttraditionelle Quantorentheorie enthält sowohl den klassischen als auch den nichtklassischen Fall. Außerdem baut sie auf der nichttraditionellen Prädikationstheorie auf. Dies wirkt sich wesentlich auf die semantischen Regeln für Quantoren aus. Wir betrachten vorwiegend die traditionelle Quantorentheorie. Im wesentlichen ist dies eine Darstellung des klassischen Prädikatenkalküls. Im Vergleich zu der üblichen Darstellungsweise modifizieren wir aber die Darstellung des klassischen Prädikatenkalküls in einigen wesentlichen Punkten. Unseres Erachtens erleichtert dies ein Verständnis dieses komplizierten Bereiches der Logik. Eine nichttraditionelle Quantorentheorie ist in Sinowjew/Wessel 1975 dargestellt.

Wir betrachten einige Beispiele für Aussagen mit Quantoren:

1. „Einige Studenten haben ihre Prüfung ausgezeichnet abgelegt.“
2. „Alle geraden Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbar.“
3. „Einige moderne Flugzeuge übertreffen alle Flugzeuge des Zweiten Weltkrieges in der Geschwindigkeit und bezüglich der Nutzlast.“

Wir sehen an diesen Beispielen, daß die Quantoren in realen Sätzen verschieden angeordnet sein können. In der Logik kann man jedoch verallgemeinerte Schemata konstruieren, auf die diese Sätze auf diese oder jene Weise reduziert werden können.

Den Quantor „alle“ nennt man *Allquantor*, *Universalquantor* oder *Generalisator* und stellt ihn gewöhnlich durch das Symbol $\forall$ dar. Den Quantor „einige“ nennt man *Existenzquantor*, *Einsquantor* oder *Partikularisator* und stellt ihn durch das Symbol $\exists$ dar. Aussagen mit Quantoren stellt man durch Symbole der Art $\forall a P(a)$, $\forall a \exists b P(a, b)$, $\exists a A$, $\forall a A$ usw. dar, wobei die Ausdrücke $\forall a$ und $\exists a$ bedeuten, daß sich die Quantoren $\forall$ und $\exists$ auf den Terminus a beziehen, während $P(a)$, $P(a,b)$, A ... Aussagen sind. Diese Symbole liest man in der angegebenen Reihenfolge als: „Für alle a, $P(a)$“, „Für alle a gibt es ein b derart, daß $P(a,b)$“, „Einige a sind derart, daß A“ (oder „Es existiert ein a derart, daß A“), „Alle a sind derart, daß A“ (oder „Für alle a gilt, daß A“).

Die oben angeführten Sätze nehmen nach diesen Schemata folgende Form an:

1′. „Einige Studenten sind derart, daß der Student die Prüfung ausgezeichnet abgelegt hat“ (oder „Es gibt einen Studenten derart, daß der Student die Prüfung ausgezeichnet abgelegt hat.“);
2′. „Für alle geraden Zahlen gilt, daß gerade Zahlen ohne Rest durch 2 teilbar sind“;
3′. „Einige moderne Flugzeuge sind derart, daß für alle Flugzeuge des zweiten Weltkrieges gilt: Ein modernes Flugzeug übertrifft ein Flugzeug des Zweiten Weltkrieges in der Geschwindigkeit und bezüglich der Nutzlast“.

Quantoren können sich nicht nur auf die Subjekte von Aussagen beziehen, sondern auch auf die Prädikate. Wir betrachten aber nur Aussagen, in denen sich die Quantoren auf Subjekte beziehen, da sich die Fälle, in denen sich die Quantoren auf Prädikate beziehen, unseres Erachtens auf eine Quantifikation von Subjekten zurückführen lassen. In allen unseren Beispielsätzen und Schemata beziehen sich die Quantoren nur auf Subjekte. Eine Besonderheit der klassischen Quantorenlogik besteht darin, daß in der ihr implizit zugrundeliegenden Prädikationstheorie als Subjekttermini in einfachen Aussagen nur individuelle Subjekttermini zugelassen werden. Allgemeine Subjekttermini werden als Prädikattermini angesehen bzw. in solche verwandelt. In der traditionellen Prädikationstheorie werden also nur einfache Aussagen der Form $P(a)$, $Q(a_1, \ldots, a_n)$ betrachtet, in denen $a, a_1, \ldots, a_n$ individuelle Subjekttermini sind. Als Variablen für individuelle Subjekttermini (oder Individuenkonstanten) führen wir x, y, z, x_1, y_1, z_1 ... als *Individuenvariablen* ein. In der klassischen Quantorentheorie beziehen sich die Quantoren $\forall$ und $\exists$ nur auf Individuenvariablen. Um die oben betrachteten Aussagen mit Quantoren 1-3 der Umgangssprache in der Sprache der klassischen Quantorentheorie wiedergeben zu können, muß man sie deshalb in folgende ziemlich umständliche Form bringen:

1″. „Einige Gegenstände (Individuen) sind derart, daß sie Studenten sind und ihre Prüfung ausgezeichnet abgelegt haben“;
2″. „Für alle Gegenstände (Individuen) gilt: Wenn sie gerade Zahlen sind, so sind sie ohne Rest durch 2 teilbar“;
3″. „Einige Gegenstände (Individuen) sind derart, daß sie moderne Flugzeuge sind und daß für alle Gegenstände gilt: Wenn sie Flugzeuge des Zweiten Weltkrieges sind, so werden sie von ihnen in der Geschwindigkeit und bezüglich der Nutzlast übertroffen“.

In der Symbolik der klassischen Quantorentheorie haben diese Aussagen folgende logische Struktur:

$$\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x))$$
$$\forall x(P_1(x) \supset P_2(x))$$
$$\exists x(P_1(x) \wedge \forall y(P_2(y) \supset Q(x,y))).$$

Die Fähigkeit, in Aussagen die in diesem Bereich der Logik beschriebene Struktur aufzufinden, ist eine Bedingung für die Anwendung der in diesem Bereich der Logik aufgestellten Regeln. Dies geschieht aber nicht nach logischen Regeln, sondern ist eine außerlogische Erscheinung. Der Leser kann sich leicht davon überzeugen, daß sich diese Fähigkeit sehr schnell herausbildet, wenn er einige Übungen durchführt.

Neben den Quantoren $\forall$ und $\exists$ werden auch noch andere Quantoren verwendet, beispielsweise solche wie „die Mehrheit“, „die Minderheit“, „die Hälfte“, „ein“, „zwei“. In der traditionellen Quantorentheorie werden jedoch vorwiegend die Quantoren $\forall$ und $\exists$ betrachtet.

Die logischen Regeln für Aussagen mit den Quantoren $\forall$ und $\exists$ werden vor allem mit Hilfe von formalen Systemen aufgestellt, die man klassische Prädikatenkalküle nennt. Hier möchten wir auf einen allgemeinen Zug solcher Systeme verwiesen: Ein klassischer Prädikatenkalkül wird durch Hinzufügen von Symbolen, Definitionen, Axiomen und Schlußregeln, die den Aufbau von Aussagen mit Quantoren berücksichtigen, zu einem klassischen Aussagenkalkül aufgebaut. Welche Form ein klassischer Prädikatenkalkül also auch haben mag, es gilt immer die Behauptung: Wenn eine Formel ein Theorem im klassischen Aussagenkalkül ist, so ist sie auch ein Theorem im klassischen Prädikatenkalkül mit den entsprechenden logischen Operatoren.

Übungen:

Ermitteln Sie die logische Struktur folgender Aussagen in der Symbolik der klassischen Quantorentheorie:

1. Klaus und Anton sind Brüder.
2. Alle Menschen sind sterblich.
3. Einige Menschen sind sterblich.
4. Kein Mensch ist sterblich.
5. Einige Menschen sind nicht sterblich.
6. Nicht alle Menschen sind sterblich.
7. Alle Menschen sind nicht sterblich.
8. Kein Mensch ist nicht sterblich.

9.2 Die Sprache der klassischen Quantorenlogik

Zu einem gegebenen Alphabet der klassischen Aussagenlogik werden folgende Symbole hinzugefügt:

1.	$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$	- Individuenvariablen;
2.	$P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, \ldots$	- Prädikatenvariablen;
3.	$\forall, \exists$	- die Quantoren „alle“ und „einige“.

Man unterscheidet Prädikatenvariablen nach der Stellenzahl in einstellige, zweistellige, dreistellige ..., allgemein n-stellige. In der folgenden Definition realisieren wir das durch einen oberen Index. Im weiteren verwenden wir keine besonderen Bezeichnungen für die Stellenzahl von Prädikatenvariablen, da wir voraussetzen, daß die verwendeten Formeln richtig gebildet sind und sich damit die Stellenzahl der Prädikatvariablen aus ihrer Stellung in einer Formel ergibt. Wenn es notwendig ist, die Stellenzahl von Prädikatvariablen gesondert anzugeben, so sagen wir das mit gewöhnlichen Worten. Für n-stellige Prädikatenvariablen können in der Anwendung der Quantorenlogik beim logischen Schließen beliebige n-stellige Prädikate eingesetzt werden.

D1. Prädikatformel: $f^1(i)$ und $f^n(i_1, \ldots, i_n)$, wobei $n \geq 2$, sind Prädikatformeln genau dann, wenn f^1 eine einstellige, f^n eine n-stellige Prädikatenvariable und $i, i_1, \ldots, i_n$ Individuenvariablen sind.

Wir setzen eine Aussagenlogik mit den Operatoren $\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, |$ und $\dagger$ voraus und definieren:

D2. Quantorenlogische Formel:

1. Alleinstehende Aussagenvariablen und Prädikatformeln sind quantorenlogische Formeln.
2. Wenn A eine quantorenlogische Formel ist, so ist $\sim A$ eine quantorenlogische Formel.
3. Wenn A eine quantorenlogische Formel und i eine Individuenvariable ist, so sind $\forall iA$ und $\exists iA$ quantorenlogische Formeln.
4. Wenn A und B quantorenlogische Formeln sind, so sind auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$, $(A \mid B)$ und $(A \dagger B)$ quantorenlogische Formeln.
5. Eine quantorenlogische Formel liegt nur vor, wenn es auf Grund von 1-4 der Fall ist.

D3. Wirkungsbereich eines Quantors $\forall i$ bzw. $\exists i$ nennen wir die unmittelbar auf $\forall i$ bzw. $\exists i$ folgende Formel.

D4. Ein Vorkommen einer Individuenvariablen i in einer Formel A ist **gebunden** genau dann, wenn es unmittelbar auf $\forall$ oder $\exists$ folgt oder wenn es sich im Wirkungsbereich von $\forall i$ oder $\exists i$ befindet.

D5. Ein Vorkommen einer Individuenvariablen i in einer Formel A ist **frei** genau dann, wenn es nicht gebunden ist.

So kommt die Variable x in den Formeln $\forall xP(x)$, $\forall xQ(x,y)$, $\forall x(p \supset P(x))$, $\forall xP(y)$ gebunden und in $P(x)$, $Q(x,y)$, $\forall y(p \supset P(x))$ frei vor. In $(P(x) \supset \forall x{\sim}(p \supset Q(y,x))$ ist das erste Vorkommen von x ein freies, das zweite und dritte sind gebundene Vorkommen, und y kommt frei vor. Der Ausdruck „die Variable i hat keine gebundenen Vorkommen in A (kommt in A nicht gebunden vor)“ bedeutet, daß i entweder überhaupt nicht in A vorkommt oder aber, daß alle Vorkommen von i in A freie Vorkommen sind. Der Ausdruck „die Variable i hat keine freien Vorkommen in A (kommt in A nicht frei vor)“ bedeutet, daß i entweder überhaupt nicht in A vorkommt oder aber, daß alle Vorkommen von i in A gebundene Vorkommen sind.

Wir treffen die gleichen Konventionen bezüglich der Klammereinsparungen wie in der Aussagenlogik und vereinbaren, daß die Quantoren die gleiche Bindungsstärke wie das Negationszeichen besitzen. Wie in der Aussagenlogik gestattet uns die Formeldefinition einerseits, aus einfachen Formeln komplizierte aufzubauen. Andererseits gestattet uns die Formeldefinition von einer beliebigen gegebenen Zeichenreihe zu entscheiden, ob sie eine Formel ist oder nicht.

Übungen:

1. Bilden Sie eine quantorenlogische Formel, die aus mindestens 20 Grundzeichen besteht! Benutzen Sie dabei mindestens einmal jeden der Punkte 1-4 der Formeldefinition!
2. Prüfen Sie, welche der folgenden Zeichenreihen quantorenlogische Formeln sind und welche nicht! Berücksichtigen Sie dabei nicht die Konventionen bezüglich der Klammereinsparungen!
   a) $q \vee P(x)$
   b) $(\forall y \supset \exists zP(z))$
   c) $(\exists xP(y) \equiv \forall xQ(x))$
   d) $(P(y) \wedge Q(x)) \vee (p \supset \forall xP(x))$
   e) $(((q \supset \forall zR(x,y)) \wedge (P(y) \vee Q(x))) \supset p)$
3. Prüfen Sie, welche der Ausdrücke a-e aus Übung 2 bei Berücksichtigung unserer Festlegungen über Klammereinsparungen quantorenlogische Formeln sind!
4. Überprüfen Sie, ob die folgenden Zeichenreihen quantorenlogische Formeln nach *D2* sind!
   - $(\forall xp \supset \forall yq)$
   - $p \supset (\forall xP(x) \supset \forall yP(y))$

- $(\forall x(P(x) \mid Q(x)) \vee (\forall y(P(y) \supset R(y)) \supset Q(y)))$
- $\forall x \exists y(P(x) \supset (\exists z R(z,y) \supset Q(x,y)))$
- $(Q(x) \supset \forall x P(x) \wedge R(x))$

5. Wieviel Grundzeichen enthält der kürzeste quantorenlogische Ausdruck, in dem jeder Punkt der Formeldefinition *D2* mindestens einmal zur Anwendung kommt?
6. Wieviel verschiedene quantorenlogische Formeln lassen sich aus den folgenden Zeichen und Zeichenkombinationen bilden? Jedes der angegebenen Zeichen soll dabei genau einmal in jeder Formel vorkommen.
   $\exists x$, $\forall x$, $P(x)$, $Q(x)$, $\supset$, (,).
7. Kennzeichnen Sie in den folgenden quantorenlogischen Formeln die Wirkungsbereiche der Quantoren sowie die freien und gebundenen Vorkommen der Individuenvariablen! Berücksichtigen Sie dabei die Festlegungen über Klammereinsparungen!
   - $\forall x \exists y P(x,y) \wedge Q(x,y) \supset \exists z R(x,y)$
   - $P(x) \supset \forall y(P(y) \supset P(x))$
   - $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \exists y Q(y) \wedge P(x)$
   - $\exists z(p \wedge \exists x(P(x,y) \supset \forall y Q(x,y)) \supset p \wedge Q(x,z))$
8. Ergänzen Sie das Alphabet der Aussagenlogik aus Übung 11 des Abschnitts 2 des vierten Kapitels durch Individuenvariablen, Prädikatenvariablen, Klammern (für Prädikatformeln) und die beiden Quantoren Π (entspricht $\forall$) und Σ (entspricht $\exists$), und formulieren Sie die quantorenlogische Formeldefinition für die Łukasiewiczsche klammerfreie Schreibweise!
9. Definieren Sie für die Formelsprache aus Übung 8 die Ausdrücke „Wirkungsbereich eines Quantors“, „gebundenes Vorkommen einer Individuenvariablen“ sowie „freies Vorkommen einer Individuenvariablen“!
10. Überprüfen Sie, welche der folgenden Zeichenreihen Formeln nach der Definition von Łukasiewicz sind! Übersetzen Sie die korrekten Ausdrücke in die übliche Peano-Russellsche Schreibweise!
    - $\Pi x \Sigma y P(x,y) \Sigma z Q(x,z)$
    - $CK\Pi x P(x) \Pi x Q(x) \Pi x K P(x) Q(x)$
    - $\Pi x A \Pi y P(x) Q(y) C \Pi x P(x) \Sigma y Q(y)$
    - $C\Pi x \Sigma y K P(x,y) \Sigma z C P(z,y) Q(z,y)$
    - $\Pi x \Pi y \Pi z C K P(x,y) P(y,z) P(x,z)$
11. Übersetzen Sie die folgenden Formeln in die klammerfreie Schreibweise von Łukasiewicz!
    - $p \supset \exists x P(x)$
    - $\forall x(P(x) \supset P(x))$
    - $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$
    - $(\sim\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))) \wedge ((\sim\forall x P(x) \vee \sim\forall x Q(x)) \vee \forall x \sim(P(x) \supset \sim Q(x)))$
12. Russell und Whitehead führen in ihrer „Principia Mathematica“ den Begriff der „formalen Implikation“ ein. Die formale Implikation „$P(x) \supset_x Q(x)$“ wird gelesen als „für alle x, wenn $P(x)$, so $Q(x)$“ und „$P(x,y) \supset_{xy} Q(x,y)$“ als „für alle x und für alle y, wenn $P(x,y)$, so $Q(x,y)$“. Diese formalen Ausdrücke werden auch „binäre Quantoren“ genannt. Die durch die folgenden Definitionen eingeführten binären Quantoren ermöglichen eine starke Vereinfachung der üblichen Formelsprache.

    D1. $(A \supset_{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} B) \equiv_{Def} \forall a_1 \forall a_2 \forall a_3 \ldots \forall a_n (A \supset B)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$
    D2. $(A \equiv_{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} B) \equiv_{Def} \forall a_1 \forall a_2 \forall a_3 \ldots \forall a_n (A \equiv B)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$
    D3. $(A \mid_a B) \equiv_{Def} \forall a(A \mid B)$

Vereinfachen Sie unter Benutzung der Definitionen 1-3 die folgenden Formeln!
- $\forall x((P(x) \supset Q(x)) \equiv (\sim P(x) \vee Q(x)))$
- $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$
- $\forall x P(x) \supset \forall x(Q(x) \supset P(x))$
- $\forall x((P(x) \mid Q(x)) \mid (Q(x) \mid P(x)))$
- $\forall x \forall y \forall z(P(x) \equiv Q(y) \supset P(x) \supset R(z))$

13. Fügen Sie zur Sprache der klassischen Aussagenlogik die in *D3* (Aufgabe 12) eingeführte formale Negatadjunktion als einzigen quantorenlogischen Grundoperator hinzu, und definieren Sie die folgenden Ausdrücke!
    - $\forall a A$
    - $\exists a A$
    - $\forall a(A \supset B)$
    - $\forall a(A \equiv B)$
    - $\exists a(A \supset B)$
    - $\exists a(A \equiv B)$

9.3 Semantische Regeln der klassischen Quantorentheorie

Ein Grundbegriff der traditionellen Quantorentheorie ist der Begriff des *Wertbereichs der Individuenvariablen.*

Der Ausdruck „Wertbereich der Individuenvariablen" wird in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet. Erstens meint man hierbei eine Interpretation der Symbole eines formalen Systems (im vorliegenden Fall des Prädikatenkalküls), bei der die Individuenvariablen als Objekte betrachtet werden, für die Subjekttermini eingesetzt werden (oder als Leerstellen für Subjektermini angesehen werden). Diese Auffassung charakterisiert aber nicht die Spezifik der traditionellen Quantorentheorie. Sie ist nur ein Spezialfall für die Verwendung formaler Systeme beim Aufbau einer logischen Theorie. Charakteristisch für die traditionelle Quantorentheorie ist die zweite Bedeutung des Ausdrucks „Wertbereich der Individuenvariablen". Wir betrachten Sie etwas ausführlicher. Um die erwähnte Zweideutigkeit zu vermeiden, verwenden wir in dem Fall den Ausdruck *„formaler Wertbereich der Individuenvariablen"*.

Es wird eine Menge von Objekten angegeben, die als Individuen aus dem formalen Wertbereich der Individuenvariablen angesehen werden. Die Menge dieser Individuen ist der formale Wertbereich der Individuenvariablen. Diese Objekte werden mit dem Ziel angegeben, daß sie in Prädikatformeln für die Individuenvariablen eingesetzt werden können. Es sind dies also Symbole, die unter dem Gesichtspunkt des Operierens mit ihnen den Variablensymbolen ähnlich sind. Man wählt dabei besondere Buchstaben mit oder ohne Indizes und behauptet von ihnen, daß sie Individuen aus dem formalen Wertbereich der Individuenvariablen sind. Gewöhnlich verwendet man für diese Zwecke die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 ...

Weiter wird vorausgesetzt, daß der formale Wertbereich der Individuenvariablen nicht leer ist. Hinzu kommt noch die Annahme, daß die formalen Wertebereiche der Individuenvariablen gleich sind, d. h., alle in Formeln einer bestimmten Formelklasse vorkommenden Individuenvariablen nehmen Werte aus ein und demselben formalen Wertbereich an. In den Fällen, wo man von einem beliebigen Individuenbereich spricht, bedeutet dies keineswegs, daß dieser Bereich nicht angegeben wird. Dabei wird vielmehr ein beliebiger gegebener Individuenbereich (oder jeder beliebige Individuenbereich) vorausgesetzt. Da die logischen Regeln für einen beliebigen nicht leeren formalen Individuenbereich aufgestellt werden, hat die Art der Individuen keine Bedeutung, wichtig ist nur ihre Anzahl.

Wir führen weiter den Begriff „formaler Wertbereich einer Prädikatformel bezüglich der Individuenvariablen“ ein. Der Kürze halber verwenden wir den Ausdruck „Wertbereich einer Prädikatformel“. Den Wertbereich einer Prädikatformel $f(i_1, \ldots, i_n)$, wobei $n \geq 1$, bilden alle möglichen Ausdrücke der Form $f(k_1, \ldots, k_n)$, wobei $k_1, \ldots, k_n$ Individuen aus dem Wertbereich der Individuenvariablen sind (nicht unbedingt paarweise verschieden).

Wir betrachten das Gesagte an Beispielen. Nehmen wir die Prädikatformel $P(x)$. Wenn der Wertbereich der Individuenvariablen aus den beiden Individuen k_1 und k_2 besteht, so bilden die beiden Ausdrücke $P(k_1)$ und $P(k_2)$ den Wertbereich der angegebenen Prädikatformel. Wenn die natürlichen Zahlen den Wertbereich der Individuenvariablen bilden, so besteht der Wertbereich der Prädikatformel $P(x)$ aus den Ausdrücken $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ ... usw.

Betrachten wir weiter die Formel $Q(x_1, x_2)$. Wenn die Symbole k_1 und k_2 den Wertbereich der Individuenvariablen bilden, so besteht der Wertbereich der Formel $Q(x_1, x_2)$ aus den Ausdrücken $Q(k_1, k_1)$, $Q(k_1, k_2)$, $Q(k_2, k_1)$, $Q(k_2, k_2)$. Bilden hingegen die natürlichen Zahlen den Wertbereich der Individuenvariablen, so bilden den Wertbereich von $Q(x_1, x_2)$ alle möglichen Ausdrücke $Q(m_1, m_2)$, wobei $m_1 = 1, 2 \ldots$ und $m_2 = 1, 2 \ldots$

Ausdrücke der Form $Q(k_1, \ldots, k_n)$ sind Elemente aus dem Wertbereich von $Q(x_1, \ldots, x_n)$. Man kann sie zu den quantorenlogischen Formeln rechnen, wenn man deren Definition entsprechend ergänzt. Auch wir verfahren so: Wenn A ein Element aus dem Wertbereich der Prädikatformel B ist, so ist A eine quantorenlogische Formel. Jetzt kann man auch sinnvollerweise den Ausdruck „Formel aus dem Wertbereich von A“ (wobei A eine quantorenlogische Formel ist) verwenden.

Wir dehnen den Begriff des Wertbereichs auf beliebige quantorenlogische Formeln aus. Angenommen, A sei eine Formel, und $i_1, \ldots, i_n$ ($n \geq 0$) seien alle frei in ihr vorkommenden Individuenvariablen. Der Ausdruck $A\{i_1, \ldots, i_n/k_1, \ldots, k_n\}$ möge die Formel sein, die aus A durch Ersetzen aller freien Vorkommen jeder Individuenvariablen i_j ($j = 1, \ldots, n$) in A durch ein Individuum k_j aus dem Wertbereich der Individuenvariablen U (oder aus einem gegebenen Individuenbereich U) gebildet wird.

„Wertbereich von A“ nennen wir die Menge aller möglichen Formeln $A\{i_1, \ldots, i_n/k_1, \ldots, k_n\}$, wobei $k_1, \ldots, k_n$ Individuen aus einem gegebenen Bereich U sind.

Wir wählen jetzt folgende semantische Regeln:

RS1. Den Formeln aus dem Wertbereich einer Prädikatformel werden Werte genauso wie den Aussagenvariablen zugeschrieben. Dabei sind zwei Elemente aus dem Wertbereich einer gegebenen Prädikatformel genau dann verschieden, wenn sie sich graphisch unterscheiden.

RS2. Eine Formel $\forall iA$ hat für einen gegebenen Wertkomplex ihrer freien Variablen in dem Individuenbereich U den Wert v, wenn die Formel $A\{i/k\}$ bei dem gleichen Wertkomplex ihrer freien Variablen für jedes beliebige Individuum k aus dem Bereich U den Wert v hat.

RS3. Eine Formel $\exists iA$ ist äquivalent mit der Formel $\sim\forall i\sim A$.

D1. Eine Formel A ist eine **Tautologie im Individuenbereich U** (ist **U-gültig**) genau dann, wenn alle Formeln aus dem Wertbereich von A den Wert v haben.

D2. Eine Formel A ist eine **Tautologie** (ist **allgemeingültig**) genau dann, wenn sie in jedem nicht leeren Individuenbereich eine Tautologie ist.

D3. Eine Formel A ist **in einem Individuenbereich U erfüllbar** genau dann, wenn mindestens eine der Formeln aus dem Wertbereich von A den Wert v annehmen kann.

D4. Eine Formel A ist **erfüllbar** genau dann, wenn sie in mindestens einem nicht leeren Individuenbereich erfüllbar ist.

D5. Eine Formel A ist eine **Kontradiktion in einem Individuenbereich U** genau dann, wenn alle Formeln aus dem Wertbereich von A den Wert f haben.

D6. Eine Formel A ist eine **Kontradiktion** genau dann, wenn sie in jedem nicht leeren Individuenbereich eine Kontradiktion ist.

D7. Eine Formel A ist **logisch indeterminiert** genau dann, wenn sie keine Tautologie und keine Kontradiktion ist.

D8. Eine Formel B **folgt semantisch** aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ (symbolisch: $A_1, \ldots, A_n \models B$) genau dann, wenn folgende Abhängigkeit gilt: wenn $A_1 = v, \ldots, A_n = v$, so $B = v$.

Aus den gegebenen Definitionen ergeben sich unmittelbar folgende Metatheoreme:

MT1. Wenn eine Formel A keine Tautologie ist, so ist $\sim A$ erfüllbar.

MT2. Wenn $\sim A$ eine Tautologie ist, so ist A eine Kontradiktion.

Wir führen einige Beispiele an. Zunächst betrachten wir die Prädikatformel $Q(x_1, x_2)$. Den Wertbereich der Individuenvariablen mögen Zahlen 1, 2, und 3 bilden. Die folgenden Ausdrücke bilden den Wertbereich der Formel $Q(x_1, x_2)$:

$$\begin{array}{lll} Q(1,1), & Q(1,2), & Q(1,3), \\ Q(2,1), & Q(2,2), & Q(2,3), \\ Q(3,1), & Q(3,2), & Q(3,3). \end{array}$$

Da man jedem der $Q(i,k)$ nach der Regel *RS1* den Wert v zuschreiben kann, ist $Q(x_1, x_2)$ erfüllbar.

Betrachten wir jetzt die Formel $Q(x_1, x_2) \vee \sim Q(x_1, x_2)$. Angenommen, U sei ein beliebiger Individuenbereich, und k_1 und k_2 seien beliebige (nicht unbedingt verschiedene) Individuen aus diesem Bereich. In diesem Falle ist $Q(k_1, k_2)$ eine beliebige Formel aus dem Wertbereich der Formel $Q(x_1, x_2)$, und $Q(k_1, k_2) \vee \sim Q(k_1, k_2)$ ist eine beliebige Formel aus dem Wertbereich der betrachteten Formel. Da jedes $Q(k_1, k_2) \vee \sim Q(k_1, k_2)$ den Wert v hat, ist $Q(x_1, x_2) \vee \sim Q(x_1, x_2)$ eine Tautologie.

Betrachten wir die Formel $\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1) \supset P(x_2))$. In einem Individuenbereich U mit nur einem Individuum 1 ist sie eine Tautologie (sie ist 1-gültig), da $P(1) \supset P(1)$ die einzige Formel aus ihrem Wertbereich und eine Tautologie ist. In einem Bereich U mit zwei Individuen k_1 und k_2 ist sie keine Tautologie (sie ist nicht 2-gültig), da die Formeln $P(k_1) \supset P(k_2)$, $P(k_2) \supset P(k_1)$ aus ihrem Wertbereich keine Tautologien sind. Folglich ist auch $\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1) \supset P(x_2))$ keine Tautologie.

Die Formel $\exists x \exists y (P(x) \wedge \sim P(y))$ ist beispielsweise in einem Individuenbereich mit zwei Individuen erfüllbar, da $P(1) \wedge \sim P(0)$ den Wert v annehmen kann, während sie in einem Bereich mit nur einem Individuum nicht erfüllbar ist, da $P(0) \wedge \sim P(0)$ immer den Wert f hat. Es gibt auch Formeln, die in einem unendlichen Bereich erfüllbar sind, aber in jedem endlichen Bereich unerfüllbar. Eine solche Formel ist beispielsweise $\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \forall x \sim Q(x,x) \wedge$ $\wedge \forall x \forall y \forall z (Q(x,y) \wedge Q(y,z) \supset Q(x,z))$. Diese Formel ist etwa im Bereich der natürlichen Zahlen erfüllbar, wenn wir $Q(x,y)$ als das Prädikat „x ist kleiner als y" deuten. In jedem endlichen Zahlenbereich nimmt hingegen eines der Konjunktionsglieder den Wert f an. Für jeden endlichen Bereich ist die klassische Quantorenlogik entscheidbar. Wenn der Individuenbereich n Individuen enthält, so können wir eine Formel $\forall x P(x)$ als eine Konjunktion $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n)$ und eine Formel $\exists x P(x)$ als eine Adjunktion $P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(n)$ auffassen. Von diesen Formeln kann man mit Hilfe der üblichen Wahrheitstabellen feststellen, ob sie Tautologien, Kontradiktionen oder logisch indeterminierte Formeln sind. Wenn der Individuenbereich unendlich ist, so gibt es hingegen kein allgemeines Entscheidungsverfahren.

Aufgabe der klassischen Quantorenlogik ist es, die allgemeingültigen quantorenlogischen Formeln zu untersuchen. Die oben angegebenen Definitionen und Regeln gestatten es aber nicht, nach einem allgemeinen Verfahren für eine beliebige Formel der Quantorenlogik zu entscheiden, ob sie eine quantorenlogische Tautologie ist oder nicht. Für die klassische Quantorenlogik gibt es (im Unterschied zur Aussagenlogik) kein allgemeines Entscheidungsverfahren. Deshalb ist hier ein axiomatischer oder regellogischer Aufbau (wieder im Unterschied zur Aussagenlogik) erforderlich.

Doch zunächst wenden wir uns einem Entscheidungsverfahren für einen Teil der klassischen Quantorenlogik zu.

Übung:

Gegeben sei ein Individuenbereich U, bestehend aus den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 und die Prädikate $P_1(a_1, a_2)$ („a_1 ist teilbar durch a_2") und $P_2(a_1, a_2)$ („a_1 ist kleiner gleich a_2"). Benutzen Sie die semantischen Regeln aus Abschnitt 3, und bestimmen Sie, welche Werte die folgenden Formeln in dem gegebenen Individuenbereich annehmen!

- $P_1(x, y)$
- $\forall x \exists y P_1(x, y)$
- $\forall x P_1(x, 1)$
- $\forall x P_1(x, 2)$
- $\exists x(P_1(x, 2) \wedge P_1(2, x))$
- $P_2(x, y)$
- $P_2(x, 10)$
- $\forall x P_2(x, 10)$
- $\forall x \exists y P_2(y, x)$
- $\forall x \exists y P_2(x, y)$
- $P_1(x, y) \wedge P_1(z, x) \supset_{xyz} P(z, y)$

9.4 Venn-Diagramme

Den Teil der Quantorenlogik, der von den Prädikatenvariablen nur einstellige enthält, nennen wir *einstellige Quantorenlogik*. Sie ist entscheidbar. Für diesen Teil der Quantorenlogik gibt es verschiedene Entscheidungsverfahren. Wir stellen zunächst dar, wie wir mit Hilfe der sogenannten Venn-Diagramme Formeln der einstelligen Quantorenlogik überprüfen können. Diese Diagramme wurden nach dem englischen Logiker J. Venn (1834-1923) benannt. Wir schildern hier ein Verfahren, das in den methodischen Grundgedanken auf den Venn-Diagrammen aufbaut (Borkowski 1961). Mit Hilfe dieses Verfahrens kann jede Formel A der einstelligen Quantorenlogik überprüft werden, die die folgende Bedingung B erfüllt: Wenn eine Teilformel der Formel A die Form $\forall i A_1$ oder $\exists i A_1$ hat, enthält A_1 keine Teilformel der Form $\forall j A_2$ oder $\exists j A_2$ derart, daß i und j verschieden sind, aber sowohl i als auch j frei in A_2 vorkommen.

Die beiden folgenden Formeln erfüllen beispielsweise nicht die Bedingung B:

$\forall x \exists y(P(x) \supset Q(y))$, $\exists y \forall x(P(x) \supset Q(y))$.

Alle Formeln der einstelligen Quantorenlogik, die die Bedingung B nicht erfüllen, können jedoch durch äquivalente Umformungen in Formeln überführt werden, die die Bedingung B erfüllen. Den angegebenen Formeln sind beispielsweise die folgenden beiden äquivalent:

$\forall x(P(x) \supset \exists y Q(y))$, $\exists y(\exists x P(x) \supset Q(y))$.

Mit Hilfe solcher äquivalenter Umformungen und des hier dargestellten Verfahrens können also alle Formeln der einstelligen Quantorenlogik überprüft werden. Aus Gründen der Einfachheit betrachten wir nur Formeln, die die Bedingung B erfüllen. Gemäß den theoretischen Grundannahmen der klassischen Quantorenlogik teilt jedes Prädikat die Gegenstände eines beliebigen gegebenen Individuenbereiches in zwei Mengen ein, in die Menge der Gegenstände, die dieses Prädikat erfüllen, und in die Menge der Gegenstände, die dieses Prädikat nicht erfüllen. Für ein gegebenes Prädikat P wollen wir die Menge der Gegenstände, die dieses Prädikat erfüllen, die *Erfüllungsmenge* dieses Prädikats nennen und sie durch $ExP(x)$ kennzeichnen. Die Menge der Gegenstände, die das Prädikat P nicht erfüllt, ist identisch mit der Erfüllungsmenge des Prädikats $\sim P$, wir kennzeichnen sie als $Ex{\sim}P(x)$. Den geschilderten Sachverhalt kann man graphisch wie folgt darstellen:

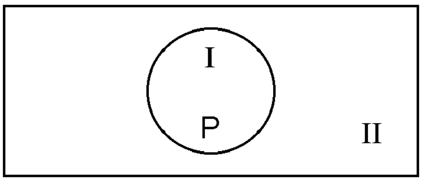


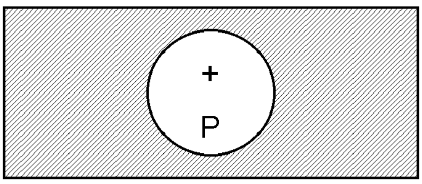
Diagramm 1

Das Rechteck repräsentiert hier die Menge aller Gegenstände (den Individuenbereich), der Abschnitt I (der Kreis) die Erfüllungsmenge von P, d. h. $ExP(x)$ und Abschnitt II die Menge von Gegenständen, die P nicht erfüllen, d. h. $Ex{\sim}P(x)$. Mit Hilfe dieses Diagramms können wir alle Formeln der einstelligen Quantorenlogik, die die Bedingung B erfüllen und nur eine Prädikatenvariable enthalten, überprüfen.

Da sich in dem hier betrachteten Bereich der Quantorenlogik die Quantoren nur auf Individuenvariablen und nicht auf Prädikatenvariablen beziehen, können wir die Prädikatenvariablen als beliebige Prädikate deuten. Wir erläutern dieses Verfahren am Beispiel von:

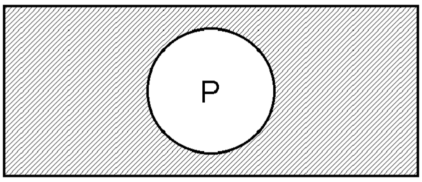
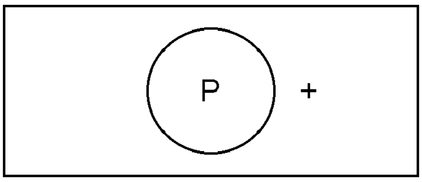
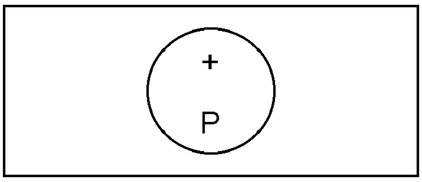
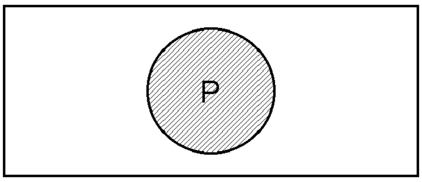
(1) $\forall xP(x) \supset \exists xP(x)$.

Aus der Aussagenlogik wissen wir, daß eine Subjunktion nur dann den Wert f annimmt, wenn das Antezedent den Wert v und das Konsequent den Wert f hat. Um zu zeigen, daß die Formel (1) eine Tautologie ist, genügt es offenbar, wenn wir zeigen, daß das Konsequent nicht den Wert f annehmen kann, falls das Antezedent den Wert v hat. Wir nehmen also an, daß das Antezedent $\forall xP(x)$ den Wert v hat. $\forall xP(x)$ hat aber nur dann den Wert v, wenn $Ex{\sim}P(x)$ leer ist. Im Diagramm stellen wir das dadurch dar, daß wir den Abschnitt II schraffieren. In der graphischen Darstellung wollen wir weiter die Existenz mindestens eines Gegenstandes in einem Abschnitt des Diagramms durch ein + kennzeichnen. Da die Quantorenlogik nur für beliebige nicht leere Individuenbereiche gilt und der Abschnitt II leer ist, können wir ein + im Abschnitt I des Diagramms setzen:



Aus diesem Diagramm können wir ablesen, daß die Formel $\exists xP(x)$ unter den gegebenen Bedingungen den Wert v hat. Wir haben also gezeigt, daß, falls $\forall xP(x)$ den Wert v hat, auch $\exists xP(x)$ den Wert v hat, d. h. aber, daß (1) eine Tautologie ist.

In den folgenden Tabellen wollen wir darstellen, wie die Diagramme aussehen, wenn $\forall xP(x)$ und $\exists xP(x)$ den Wert v bzw. den Wert f haben:

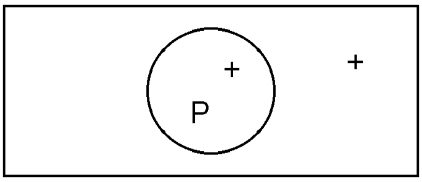
	wahr	falsch
$\forall x P(x)$		
$\exists x P(x)$		

Tab. 1

Die Schraffierung deutet in diesem Diagramm an, daß der entsprechende Abschnitt leer ist (keinen Gegenstand enthält), und das Zeichen + deutet an, daß der entsprechende Abschnitt mindestens einen Gegenstand enthält. Für die Formel

(2) $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$

veranschaulicht das folgende Diagramm, daß sie keine Tautologie ist:



Wenn das Antezedent der Formel (2) $\exists x P(x)$ den Wert v hat, so enthält der Bereich I des Diagramms mindestens ein Individuum. Aber schon in einem Individuenbereich von mindestens zwei Individuen kann der Bereich II auch ein Individuum enthalten, d. h., die Formel $\forall x P(x)$ kann den Wert f haben. Damit ist gezeigt, daß die Formel (2) keine Tautologie ist.

Wir gehen nun zur Überprüfung von Formeln der einstelligen Quantorenlogik über, die zwei verschiedene Prädikate P und Q enthalten. Derartige Formeln können wir graphisch mit Hilfe des folgenden Diagramms 2 überprüfen:

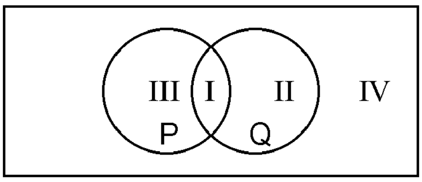
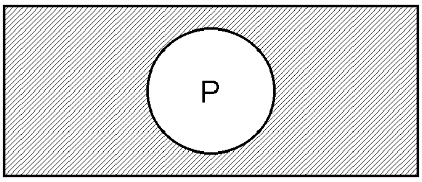


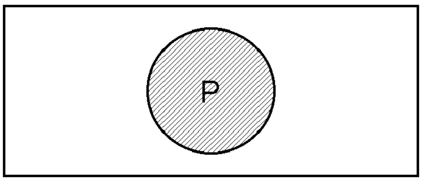
Diagramm 2

Bevor wir einige Formeln mit zwei verschiedenen Prädikaten überprüfen, veranschaulichen wir uns das graphische Bild für die Erfüllungsmengen der wichtigsten zusammengesetzten Prädikate. Wir beginnen mit der graphischen Darstellung der Erfüllungsmenge eines einfachen Prädikats P:

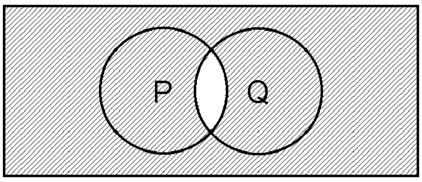
1. $ExP(x)$



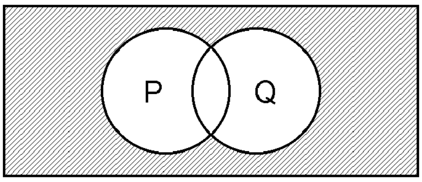
2. $Ex{\sim}P(x)$



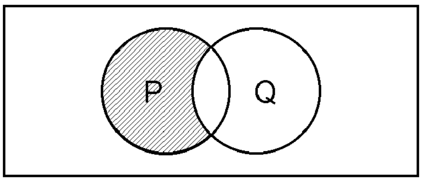
3. $Ex(P(x) \wedge Q(x))$



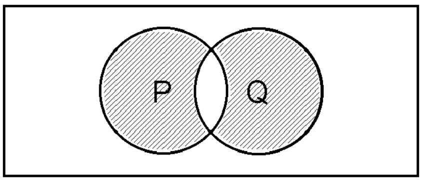
4. $Ex(P(x) \vee Q(x))$



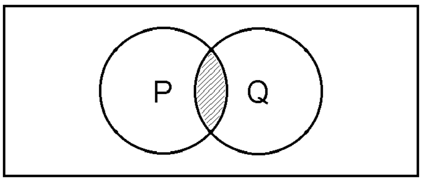
5. $Ex(P(x) \supset Q(x)) = Ex({\sim}P(x) \vee Q(x))$



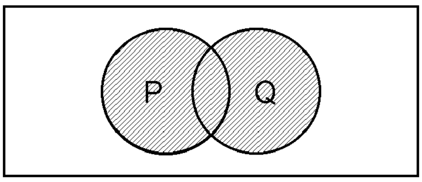
6. $Ex(P(x) \equiv Q(x)) =$
$Ex(({\sim}P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee {\sim}Q(x)))$



7. $Ex(P(x)|Q(x)) = Ex({\sim}P(x) \vee {\sim}Q(x))$

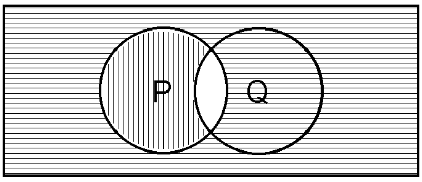


8. $Ex(P(x) \dagger Q(x)) = Ex({\sim}P(x) \wedge {\sim}Q(x))$



Die Allgemeingültigkeit der Formel 3 läßt sich durch das folgende Diagramm nachweisen:

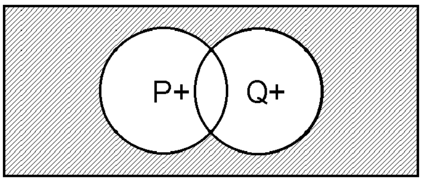
(3) $\forall xP(x) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset \forall xQ(x)$



Wir nehmen zunächst an, daß das Antezedent $\forall x P(x) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x))$ den Wert v hat. Dann müssen beide Glieder der Konjunktion den Wert v haben. $\forall x P(x)$ hat nur den Wert v, wenn die Abschnitte II und IV leer sind. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ hat nur den Wert v, wenn der Abschnitt III des Diagramms leer ist. Es bleibt nur der Abschnitt I unschraffiert. Alle Gegenstände dieses Abschnitts erfüllen aber $Q(x)$, d. h., unter diesen Bedingungen hat $\forall x Q(x)$ den Wert v. Damit ist die Allgemeingültigkeit von (3) nachgewiesen.

Konstruieren wir das Diagramm zur Überprüfung der Formel

(4) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.



Wenn das Antezedent dieser Formel den Wert v hat, so ist der Bereich IV leer. Haben wir es mit einem Individuenbereich mit mindestens zwei Individuen zu tun, so können die Bereiche II und III jeweils ein Individuum enthalten, und das Konsequent der Formel kann den Wert f annehmen. Die Formel (4) ist also keine Tautologie.

Für drei verschiedene Prädikate P, Q und R erhalten wir folgendes Diagramm:

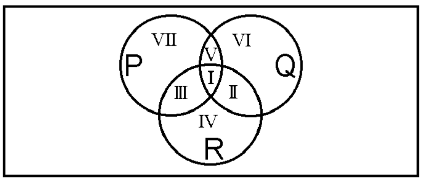
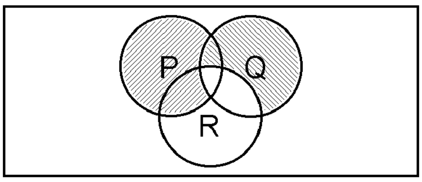


Diagramm 3

Als Beispiel für eine Formel mit 3 verschiedenen Prädikaten überprüfen wir:

(5) $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x(Q(x) \supset R(x)) \supset \forall x(P(x) \supset R(x)))$.



Wenn das Antezedent dieser Formel $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ den Wert v hat, so müssen die Bereiche VII und III leer sein. Wenn außerdem das Antezedent der Restformel $\forall x(Q(x) \supset R(x))$ den Wert v hat, so müssen die Bereiche V und VI leer sein. Unter diesen Bedingungen kann die Formel $\forall x(P(x) \supset R(x))$ nicht den Wert f annehmen. Das hier dargestellte graphische

Verfahren zu Überprüfung von Formeln der einstelligen Quantorenlogik wird bei 4 oder mehr verschiedenen Prädikaten ziemlich unübersichtlich. Im nächsten Abschnitt schildern wir ein Verfahren, das bei einer beliebigen Anzahl von Prädikaten verwendet werden kann.

Übungen:

Überprüfen Sie mit Hilfe von Venn-Diagrammen, ob die folgenden Formeln quantorenlogische Tautologien sind oder nicht:

1. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \supset \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$
2. $\forall xP(x) \vee {\sim}\forall xP(x)$
3. $\exists x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists xP(x) \supset \exists xQ(x))$
4. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$
5. $P(y) \supset \forall xP(x)$
6. $\forall xP(x) \supset {\sim}\exists x{\sim}P(x)$
7. $\forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}\exists xP(x)$
8. $\exists x(P(x) \wedge {\sim}Q(x)) \vee (\forall xP(x) \supset {\sim}\exists x{\sim}Q(x))$
9. ${\sim}\exists x({\sim}P(x) \vee {\sim}Q(x)) \supset {\sim}(\forall xP(x) \supset {\sim}\forall xQ(x))$
10. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists x(Q(x) \supset R(x)) \supset \exists x(P(x) \supset R(x))$
11. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \supset R(x)) \supset \exists x(P(x) \supset R(x))$
12. $C\Sigma xAP(x)Q(x)A\Sigma xP(x)\Sigma(x)Q(x)$
13. $CA\Sigma xP(x)\Sigma xQ(x)\Sigma xAP(x)Q(x)$!

9.5 0-1-Methode

Das geschilderte graphische Verfahren können wir durch ein einfacheres Verfahren ersetzen. Dazu treffen wir folgende Zuordnung: Die Erfüllungsmenge $ExP(x)$, der der Abschnitt I von Diagramm 1 entspricht, ordnen wir die Charakteristik 1 zu, während wir der Menge $Ex{\sim}P(x)$, der der Abschnitt II entspricht, die Charakteristik 0 zuordnen. Die Charakteristika 1 und 0 sind nicht mit den Wahrheitswerten v und f in der Aussagenlogik gleichzusetzen. Die Analogie zu den Wahrheitswerten ist jedoch offensichtlich, da die Gegenstände, die zum Bereich mit der Charakteristik 1 gehören, bei der Einsetzung in $P(x)$ eine Formel mit dem Wert v ergeben, während die Gegenstände, die zum Bereich mit der Charakteristik 0 gehören, bei der Einsetzung in $P(x)$ eine Formel mit dem Wert f ergeben.
Die bisher getroffenen Zuordnungen fassen wir in der folgenden Tabelle zusammen:

Menge der Gegenstände	Abschnitt, der sie im Diagramm 1 repräsentiert	Ihre Charakteristik bei der 0-1-Methode
$ExP(x)$	I	1
$Ex{\sim}P(x)$	II	0

Tab. 2

Bei der Überprüfungsmethode mit Hilfe der Venn-Diagramme hatten wir durch Schraffieren angedeutet, daß ein Bereich leer war, und durch ein +, daß ein Bereich mindestens einen Gegenstand enthielt. Bei der 0-1-Methode benötigen wir gleichwertige Ausdrucksmittel. Wir wollen den Sachverhalt, daß ein Bereich leer ist, dadurch ausdrücken, daß wir die Charakteristika 0 bzw. 1 durchstreichen. Enthält ein Bereich mindestens einen Gegenstand, so wollen wir das durch doppeltes Unterstreichen der Charakteristik 0 bzw. 1 kennzeichnen.

Die Tabelle 1 können wir jetzt in die Terminologie der 0-1-Methode wie folgt übersetzen:

	wahr	falsch
$\forall x P(x)$	$\forall x P(x)$ $v\begin{cases}1 & \text{unter } P(x) \text{ tritt}\\ \cancel{0} & \text{die 0 nicht auf}\end{cases}$	$\forall x P(x)$ $f\begin{cases}1 & \text{unter } P(x) \text{ tritt}\\ \underline{\underline{0}} & \text{mindestens die 0 auf}\end{cases}$
$\exists x P(x)$	$\exists x P(x)$ $v\begin{cases}\underline{\underline{1}} & \text{unter } P(x) \text{ tritt}\\ 0 & \text{mindestens die 1 auf}\end{cases}$	$\exists x P(x)$ $f\begin{cases}\cancel{1} & \text{unter } P(x) \text{ tritt}\\ 0 & \text{die 1 nicht auf}\end{cases}$

Tab. 3

Wir überprüfen nun die Formel (1) mit Hilfe der 0-1-Methode. Zunächst schreiben wir die Charakteristika 0 und 1 unter $P(x)$:

(1) $$\begin{array}{ccc} \forall x P(x) & \supset & \exists x P(x)\\ 1 & & 1\\ 0 & & 0\end{array}$$

Dann entnehmen wir der Tabelle 3, unter welchen Bedingungen $\forall x P(x)$ den Wahrheitswert „wahr" (v) annimmt. Das ist offenbar nur dann der Fall, wenn der Abschnitt II leer ist. Deshalb streichen wir die letzte Zeile:

$$\begin{array}{ccc} \forall x P(x) & \supset & \exists x P(x)\\ v\begin{cases}1\\ \cancel{0}\end{cases} & & \begin{matrix}1\\ \cancel{0}\end{matrix}\end{array}$$

Außerdem wissen wir, daß mindestens ein Individuum im Universum existiert, da ja die Theoreme der Quantorenlogik nur für nicht leere Bereiche als allgemeingültig nachgewiesen werden müssen. Deshalb unterstreichen wir die Charakteristik 1 in der ersten Zeile zweimal. Die Formel $\exists x P(x)$ hat aber unter der Bedingung, daß die Charakteristik 1 zweimal unterstrichen ist, den Wert v. Folglich hat auch die Subjunktion immer den Wahrheitswert v:

$$\begin{array}{ccc} \forall x P(x) & \supset & \exists x P(x)\\ v\begin{cases}\underline{\underline{1}}\\ \cancel{0}\end{cases} & v & v\begin{cases}\underline{\underline{1}}\\ \cancel{0}\end{cases}\end{array}$$

Es ist leicht zu sehen, daß es bei diesem Überprüfungsverfahren gleichgültig ist, welche Individuenvariable durch einen Quantor gebunden wird. Die Formeln $\forall x P(x)$, $\forall y P(y)$, $\forall z P(z)$ einerseits und die Formeln $\exists x P(x)$, $\exists y P(y)$, $\exists z P(z)$ usw. andererseits sind bei unserem Überprüfungsverfahren gleichwertig. Auf die gleiche Weise wie die Formel (1) wird beispielsweise auch die Formel (1′) als allgemeingültig nachgewiesen:

(1′) $$\begin{array}{ccc} \forall x P(x) & \supset & \exists y P(y)\\ v\begin{cases}1\\ \cancel{0}\end{cases} & v & v\begin{cases}1\\ \cancel{0}\end{cases}\end{array}$$

Wir haben die ersten Zeilen nicht mehr doppelt unterstrichen und wollen in Zukunft eine Zeile immer als doppelt unterstrichen ansehen, wenn sie als einzige undurchgestrichene Zeile übriggeblieben ist. Weiterhin ist offensichtlich, daß, falls eine Formel A die Individuenvariable i nicht frei enthält, in den Formeln $\forall iA$ und $\exists iA$ die Quantoren, die die Variable i binden, weggelassen werden können, ohne die Bedeutung der betreffenden Formeln zu ändern.

Für die Formel (2) zeigen wir auf folgende Weise, daß sie nicht allgemeingültig ist:

$$(2) \qquad \begin{array}{l} \exists x P(x) \supset \forall x P(x) \\ \quad v \begin{cases} \underline{\underline{1}} \\ 0 \end{cases} \quad f\,f \begin{cases} \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{0}} \end{cases} \end{array}$$

Die Formel $\exists x P(x)$ hat den Wert v, wenn der Abschnitt I des Diagramms 1 mindestens ein Element enthält (doppeltes Unterstreichen der ersten Zeile). Die Formel $\forall x P(x)$ hat den Wert f, wenn der Abschnitt II des Diagramms mindestens ein Element enthält (doppeltes Unterstreichen von 0). Unter der Bedingung, daß $ExP(x)$ und $Ex{\sim}P(x)$ mindestens je ein Element enthalten, hat die Formel (2) den Wert f. Den Abschnitten des Diagramms 2 ordnen wir durch folgende Tabelle die Charakteristika 1 und 0 zu:

Menge der Gegenstände	Abschnitt, der sie im Diagramm 2 repräsentiert	Ihre Charakteristik bei der 0-1-Methode
$Ex(P(x) \wedge Q(x))$	I	$1, 1$
$Ex({\sim}P(x) \wedge Q(x))$	II	$0, 1$
$Ex(P(x) \wedge {\sim}Q(x))$	III	$1, 0$
$Ex({\sim}P(x) \wedge {\sim}Q(x))$	IV	$0, 0$

Tab. 4

Die Allgemeingültigkeit von (3) weisen wir mit Hilfe der 0-1-Methode wie folgt nach:

$$(3) \qquad \begin{array}{l} \forall x P(x) \wedge \forall x (P(x) \supset Q(x)) \supset \forall x Q(x) \\ v \begin{cases} 1 \\ \cancel{0} \\ \cancel{1} \\ \cancel{0} \end{cases} \quad v \; v \begin{cases} 1 \quad 1 \; 1 \\ \cancel{0} \quad \cancel{1} \; \cancel{1} \\ \cancel{1} \quad \cancel{0} \; \cancel{0} \\ \cancel{0} \quad \cancel{1} \; \cancel{0} \end{cases} \quad v \; v \begin{cases} 1 \\ \cancel{1} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \end{cases} \end{array}$$

Zunächst schreiben wir unter die Prädikate von (3) alle möglichen Belegungen mit Charakteristika 1 und 0. Wir nehmen an, daß das Antezedent der Subjunktion den Wert v hat. Dann müssen auch die beiden Konjunktionsglieder den Wert v haben. $\forall x P(x)$ hat nur dann den Wert v, wenn die zweite und die vierte Zeile gestrichen werden. In $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ ermitteln wir zunächst, analog wie in der Aussagenlogik, den Werteverlauf von $P(x) \supset Q(x)$. Daraus ersehen wir, daß $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ nur dann den Wert v hat, wenn die dritte Zeile gestrichen wird. Das Antezedent der Formel (3) hat also nur den Wert v, wenn die erste Zeile nicht durchstrichen ist. Unter diesen Voraussetzungen hat aber $\forall x Q(x)$ den Wert v und damit die ganze Formel.

Auf die gleiche Art können wir beispielsweise die Allgemeingültigkeit von

$$(3') \qquad \forall z P(z) \wedge \forall x (P(x) \supset Q(x)) \supset \forall y Q(y)$$

nachweisen, da für die Belegung mit den Charakteristika 1, 0 nur die Prädikate, nicht jedoch die gebundenen Individuenvariablen wichtig sind.

Für die Formel (4) weisen wir nach, daß sie nicht allgemeingültig ist:

(4) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

$$v\left\{\begin{array}{lll} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right. \quad ff\left\{\begin{array}{l} 1 \\ \underline{\underline{0}} \\ 1 \\ \cancel{0} \end{array}\right. \quad ff\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ \underline{\underline{0}} \\ \cancel{0} \end{array}\right.$$

Die Formel (4) nimmt also den Wert f an, falls $Ex(\sim P(x) \wedge \sim Q(x))$ leer ist und $Ex(\sim P(x) \wedge \wedge Q(x))$ sowie $Ex(P(x) \wedge \sim Q(x))$ jeweils ein Individuum enthalten.

Den Abschnitten des Diagramms 3 ordnen wir durch folgende Tabelle die Charakteristika 1 und 0 zu:

Menge der Gegenstände	Abschnitt, der sie im Diagramm 3 repräsentiert	Ihre Charakteristik bei der 0-1-Methode
$Ex(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$	I	$1,1,1$
$Ex(\sim P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$	II	$0,1,1$
$Ex(P(x) \wedge \sim Q(x) \wedge R(x))$	III	$1,0,1$
$Ex(\sim P(x) \wedge \sim Q(x) \wedge R(x))$	IV	$0,0,1$
$Ex(P(x) \wedge Q(x) \wedge \sim R(x))$	V	$1,1,0$
$Ex(\sim P(x) \wedge Q(x) \wedge \sim R(x))$	VI	$0,1,0$
$Ex(P(x) \wedge \sim Q(x) \wedge \sim R(x))$	VII	$1,0,0$
$Ex(\sim P(x) \wedge \sim Q(x) \wedge \sim R(x))$	VIII	$0,0,0$

Tab. 5

Als Beispiel für eine Formel mit drei verschiedenen Prädikaten überprüfen wir:

(5) $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x(Q(x) \supset R(x)) \supset \forall x(P(x) \supset R(x)))$

$$v\left\{\begin{array}{lll} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad v \quad v\left\{\begin{array}{lll} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad v \quad v\left\{\begin{array}{lll} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

Für Formeln mit mehr als drei Prädikaten brauchen wir nicht mehr gesondert aus den Diagrammen die 0-1-Charakteristika gewinnen, da wir sehen, daß wir die Prädikate nur in folgender Reihenfolge mit den Charakteristika 0 und 1 belegen müssen: Falls wir n verschiedene Prädikate haben, so haben wir 2^n verschiedenen Belegungen mit den Charakteristika 0 und 1. Unter das erste Prädikat schreiben wir abwechselnd einmal 1 und einmal 0, unter das zweite Prädikat abwechselnd je zweimal 1 und zweimal 0, ... und unter das n-te Prädikat je $2^n/2$ mal 1 und $2^n/2$ mal 0. Dann verfahren wir wie in den bereits betrachteten Beispielen.

Beim Nachweis, daß eine Formel nicht allgemeingültig ist, genügt es, eine Belegung anzugeben, bei der die Formeln den Wert f annehmen:

(6) $(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset \forall x(R(x) \supset Q(x))) \supset \forall x(R(x) \supset P(x))$

$$f\left\{\begin{array}{lll} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \underline{\underline{0}} & 0 \end{array}\right. \quad v \quad f\left\{\begin{array}{lll} 1 & \underline{\underline{0}} & 0 \\ 1 & & 0 \end{array}\right. \quad f \quad f\left\{\begin{array}{lll} 1 & \underline{\underline{0}} & 0 \\ 1 & & 1 \end{array}\right.$$

Die Formel (6) hat den Wert f, wenn die Mengen $Ex(\sim P(x) \wedge \sim Q(x) \wedge R(x))$ und $Ex(P(x) \wedge \wedge \sim Q(x) \wedge R(x))$ mit den Charakteristika $(0,0,1)$ und $(1,0,1)$ beide nicht leer sind.

Mit Hilfe des geschilderten Verfahrens können wir auch Formeln überprüfen, die die Bedingung B erfüllen und freie Individuenvariablen enthalten. Als Beispiel betrachten wir

(7) $\forall x P(x) \supset P(y)$.

Wir nehmen wieder an, daß $\forall x P(x)$ den Wert v hat. In $P(y)$ kann man dann für y alle Gegenstände einsetzen, die zu einem Bereich gehören, der in der graphischen Darstellung nicht schraffiert ist bzw. bei der 0-1-Bewertung nicht durchgestrichen ist.

(7) $\forall x P(x) \supset P(y)$

$$\underline{v\begin{cases}1\\ \cancel{0}\end{cases} \quad v \;\; 1}$$

Die folgende Formel weisen wir als nicht allgemeingültig nach:

(8) $P(y) \supset \forall x P(x)$

$$v \qquad f\; f\begin{cases}\underline{1}\\ \underline{\underline{0}}\end{cases}$$

Die Formel hat den Wert f, wenn $ExP(x)$ und $Ex{\sim}P(x)$ beide nicht leer sind.

Auch Formeln, die Aussagenvariablen enthalten, können nach dem gleichen Verfahren überprüft werden. Aussagenvariablen können dabei, wie in der Aussagenlogik, die beiden Wahrheitswerte v und f annehmen.

Beispiel:

(9) $\forall x(P(x) \supset p) \supset (\forall x P(x) \supset p)$

$$\underline{f\begin{cases}1\\ \cancel{0}\end{cases} \quad f \;\; f \;\; v \;\; v\begin{cases}1\\ \cancel{0}\end{cases} \quad f \;\; f}$$

Bei diesem Beispiel gehen wir davon aus, daß das Konsequent den Wert f hat, und zeigen, daß das Antezedent auch den Wert f hat.

Übungen:

Überprüfen Sie mit Hilfe der 0-1-Methode, ob die folgenden Formeln Tautologien sind oder nicht:

1. $P(x) \vee {\sim}P(y)$
2. $P(x) \vee {\sim}P(x)$
3. $\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
4. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists x P(x) \supset \forall x Q(x))$
5. $(\exists x P(x) \equiv p) \supset \exists x(P(x) \equiv p)$
6. $(\exists x P(x) \supset \exists x Q(x)) \supset \exists x(P(x) \supset Q(x))$
7. $\exists x P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}P(x)$
8. $\exists x{\sim}P(x) \supset {\sim}\forall x P(x)$
9. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset {\sim}\exists x(P(x) \wedge {\sim}Q(x))$
10. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
11. $\forall x(P(x) \supset {\sim}Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \supset P(x)) \supset \exists x(R(x) \wedge {\sim}P(x))$
12. $\exists x(P(x) \wedge {\sim}Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \supset R(x)) \supset \exists x(R(x) \wedge {\sim}Q(x))$
13. $C\Pi x C P(x) Q(x) \Pi x C N Q(x) N P(x)$

14. $C\Sigma xKP(x)Q(x)N\Pi xCP(x)NQ(x)$
15. $C\Pi xCP(x)Q(x)\Pi xCQ(x)NR(x)\Pi xKR(x)NP(x)$
16. $C\Pi xCP(x)Q(x)\Sigma xKQ(x)R(x)\Sigma xKR(x)NP(x)$

9.6 Axiomatischer Aufbau der klassischen Quantorenlogik

Als Beispiel eines axiomatischen Aufbaus der klassischen Quantorenlogik geben wir das System P an.

Das Alphabet des Systems P erhalten wir, wenn wir zum Alphabet des Axiomensystems der Aussagenlogik NS aus dem sechsten Kapitel folgende Symbole hinzufügen:

1. x, y, z, mit und ohne Indizes	- Individuenvariablen
2. P, Q, R mit und ohne Indizes	- Prädikatenvariablen
3. $\forall$	- Allquantor, Generalisator
4. Kommata als Hilfszeichen	

Die Definition einer Prädikatformel übernehmen wir aus Abschnitt 2.

D1. Formel des Systems P:

1. Alleinstehende Aussagenvariablen und Prädikatformeln sind Formeln von P.
2. Wenn A eine Formel von P ist, so ist $\sim A$ eine Formel von P.
3. Wenn A eine Formel von P und i eine Individuenvariable ist, so ist $\forall iA$ eine Formel von P.
4. Wenn A und B Formeln von P sind, so ist $(A \supset B)$ eine Formel von P.
5. Eine Formel von P liegt nur vor, wenn es auf Grund der Punkte 1-4 der Fall ist.

Die Definitionen der aussagenlogischen Operatoren $\wedge$, $\vee$, $|$, $\dagger$, $\equiv$ usw. übernehmen wir aus der Aussagenlogik.

D2. $\exists iA \equiv_{Def} \sim\forall i\sim A$.

Wir treffen die gleichen Konventionen über Klammereinsparungen wie in der Aussagenlogik und vereinbaren, daß $\forall i$ und $\exists i$ genauso stark binden wie die Negation.

Die Definitionen *D3*, *D4* und *D5* übernehmen wir aus Abschnitt 2.

Die Formel, die man aus der Formel A erhält, wenn man alle freien Vorkommen der Individuenvariablen i durch die Individuenvariable j ersetzt, bezeichnen wir mit dem Symbol $A\{i/j\}$. Mit einem Symbol der Form $A\{i_1, \ldots, i_n/j_1, \ldots, j_n\}$ stellen wir die Formel dar, die man aus A erhält, wenn in ihr alle freien Vorkommen der Individuenvariablen i_1 durch j_1, i_2 durch j_2, ..., die der Individuenvariablen i_n durch j_n ersetzt werden.

Um eine Formulierung der Einsetzungsregel für Individuenvariablen und Prädikatenvariablen zu vermeiden, bauen wir das System P mit Hilfe von Axiomenschemata auf. Axiome von P sind also alle Formeln, die die logische Form eines der folgenden Axiomenschemata haben:

A1. $A \supset (B \supset A)$

A2. $A \supset (B \supset C) \supset (A \supset B \supset (A \supset C))$

A3. $\sim A \supset \sim B \supset (B \supset A)$

A4. $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall iB)$, wobei i eine Individuenvariable ist, die nicht frei in A vorkommt.

A5. $\forall iA \supset A\{i/j\}$, wenn es in A keine Vorkommen der Form $\forall jB$ derart gibt, daß i in $\forall jB$ frei vorkommt.

Beispiele für Axiome *A4* sind $\forall x(P(z) \supset Q(x,y)) \supset (P(z) \supset \forall x Q(x,y))$ und $\forall x(p \supset \supset \forall y Q(x,y)) \supset (p \supset \forall x \forall y Q(x,y))$. Die Formeln $\forall x(P(x) \supset p) \supset (P(x) \supset \forall x p)$ und $\forall x(Q(x,y) \supset R(x,y,z)) \supset (Q(x,y) \supset \forall x R(x,y,z))$ sind hingegen keine Axiome *A4*, da in $P(x)$ und $Q(x,y)$ die Individuenvariable x frei vorkommt.

Beispiele für Axiome *A5* sind $\forall x P(x) \supset P(y)$, $\forall x(Q(x,y) \supset R(y,x)) \supset (Q(z,y) \supset R(y,z))$. Die Formeln $\forall x(P(x) \supset \forall y Q(y,x)) \supset (P(y) \supset \forall y Q(y,y))$ und $\forall x \forall y Q(x,y) \supset \forall y Q(y,y)$ sind dagegen keine Axiome *A5*, da in $P(x) \supset \forall y Q(y,x)$ die Formel $\forall y Q(y,x)$ mit einem freien x vorkommt und in $P(x) \supset \forall y Q(x,y)$ ebenfalls x frei vorkommt.

Schlußregeln von P:

R1. Abtrennungsregel. Aus $A \supset B$ und A erhält man B.

R2. Generalisierungsregel. Aus A erhält man $\forall i A$, wobei i eine Individuenvariable ist.

D3. **Einen Beweis einer Formel A in P** nennt man eine endliche Folge von Formeln von P, von denen jede entweder ein Axiom ist oder aus vorhergehenden Formeln der Folge nach den Schlußregeln von P gewonnen wurde, wobei A die letzte Formel der Folge ist. Eine Formel, für die es einen Beweis gibt, nennt man **Theorem** oder eine in P **beweisbare Formel**.

D4. **Einen Beweis (eine Ableitung) einer Formel B_m aus den Annahmen** $A_1, \ldots, A_n$ ($m \geq 1$, $n \geq 0$) (symbolisch: $A_1, \ldots, A_n \vdash B_m$) nennen wir eine endliche Folge von Formeln $B_1, \ldots, B_m$, von denen jede eine Formel der folgenden Arten ist:

1) B_i $(i = 1, \ldots, m)$ ist ein Axiom;
2) B_i ist eine der Formeln $A_1, \ldots, A_n$;
3) B_i erhält man aus zwei vorhergehenden Formeln der Folge nach der Regel *R1*;
4) B_i erhält man aus einer vorhergehenden Formel der Folge nach der Regel *R2*, wobei die Individuenvariable, in bezug auf die generalisiert wird, nicht frei in $A_1, \ldots, A_n$ vorkommt.

Offenbar gelten für das System P folgende Metatheoreme:

MT1. Wenn eine Formel A ein Theorem im aussagenlogischen System *NS* ist, so ist sie ein Theorem von P.

MT2. Wenn eine Formel A durch eine Einsetzung in ein aussagenlogisches Theorem gewonnen wurde, so ist sie ein Theorem von P.

Für das System P gilt folgendes Deduktionstheorem:

MT3. Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B_m$, so $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B_m$.

Der Beweis von *MT3* wird analog wie in der Aussagenlogik geführt (vgl. Abschnitt 5 des sechsten Kapitels), nur daß wir jetzt noch den Fall berücksichtigen müssen, wo in der Ableitung von B_m aus $A_1, \ldots, A_n$ die Formel B_n aus einer vorhergehenden Formel B_i nach der Generalisierungsregel *R2* gewonnen wurde. In diesem Fall hat B_n die Form $\forall j B_j$, wobei j eine Individuenvariable ist, die nicht frei in den Annahmen des Beweises $A_1, \ldots, A_n$ vorkommt. Wir müssen in diesem Fall rechtfertigen, wie wir aus der Formel $A_n \supset B_i$ die Formel $A_n \supset \forall j B_i$ erhalten:

1.	$A_n \supset B_i$	(Induktionsvoraussetzung)
2.	$\forall j(A_n \supset B_i)$	(1., *R2*, j kommt nicht frei in $A_1, \ldots, A_n$ vor)
3.	$\forall j(A_n \supset B_i) \supset (A_n \supset \forall j B_i)$	(*A4*, j kommt nicht frei in A_n vor)
4.	$A_n \supset \forall j B_i$	(2., 3., *R1*)

Damit ist das Deduktionstheorem für das System P bewiesen. Ebenso wie in der Aussagenlogik erhalten wir mit Hilfe des Deduktionstheorems:

MT4. Wenn $A_1, \ldots, A_n, {\sim}B \vdash C$ und $A_1, \ldots, A_n, {\sim}B \vdash {\sim}C$, so $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Mit *MT3* und *MT4* haben wir die Strukturregeln zum Aufbau eines direkten und eines indirekten Beweises im System des natürlichen Schließens der Quantorenlogik, das wir im folgenden Kapitel darstellen, gerechtfertigt.

9.7 Einige Theoremschemata von *P*

T1. $A\{i/j\} \supset \exists iA$, wobei i und j Individuenvariablen sind und A keine Vorkommen der Form $\forall jB$ mit freien Vorkommen von i enthält.

Beweis: (die Buchstaben *NS* in Klammern weisen darauf hin, daß der betreffende Schritt auf Grund von Theoremen von *NS* vollzogen wurde):

1. $\forall i{\sim}A \supset {\sim}A\{i/j\}$ (*A5*)
2. ${\sim}{\sim}A\{i/j\} \supset {\sim}\forall i{\sim}A$ (1., *NS*)
3. $A\{i/j\} \supset \exists iA$ (*NS*, *D2* aus Abschnitt 6)

T2. $\forall iA \supset \exists iA$

1. $\forall iA \supset A$ (*A5*)
2. $A \supset \exists iA$ (*T1*)
3. $\forall iA \supset \exists iA$ (*NS*)

T3. $\forall i(A \supset B) \supset (\forall iA \supset B)$

1. $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset B)$ (*A5*)
2. $(A \supset B) \supset ({\sim}B \supset {\sim}A)$ (*NS*)
3. ${\sim}A \supset \exists i{\sim}A$ (*T1*)
4. $({\sim}B \supset {\sim}A) \supset ({\sim}B \supset \exists i{\sim}A)$ (3., *NS*)
5. $(A \supset B) \supset (\forall iA \supset B)$ (*NS*, 4., *D2* aus Abschnitt 6)
6. $\forall i(A \supset B) \supset (\forall iA \supset B)$ (1., 5., *NS*)

T4. $\forall i(A \supset B) \supset (\forall iA \supset \forall iB)$

1. $\forall i(A \supset B) \supset (\forall iA \supset B)$ (*T3*)
2. $\forall i(\forall i(A \supset B) \supset (\forall iA \supset B))$ (1., *R2*)
3. $\forall i(A \supset B) \supset \forall i(\forall iA \supset B)$ (*A4*, 2., *R1*)
4. $\forall i(\forall iA \supset B) \supset (\forall iA \supset \forall iB)$ (*A4*)
5. $\forall i(A \supset B) \supset (\forall iA \supset \forall iB)$ (3., 4., *NS*)

T5. $\forall i\forall jA \supset \forall j\forall iA$

1. $\forall i\forall jA \supset A$ (*A5*, *NS*)
2. $\forall i(\forall i\forall jA \supset A)$ (1., *R2*)
3. $\forall i(\forall i\forall jA \supset A) \supset (\forall i\forall jA \supset \forall iA)$ (*A4*)
4. $\forall i\forall jA \supset \forall iA$ (2., 3., *R1*)
5. $\forall j(\forall i\forall jA \supset \forall iA)$ (4., *R2*)
6. $\forall j(\forall i\forall jA \supset \forall iA) \supset (\forall i\forall jA \supset \forall j\forall iA)$ (*A4*)
7. $\forall i\forall jA \supset \forall j\forall iA$ (5., 6., *R1*)

T6. $\exists i\exists jA \supset \exists j\exists iA$

1. ${\sim}{\sim}\forall i{\sim}A \supset \forall i{\sim}A$ (*NS*)
2. $\forall j({\sim}{\sim}\forall i{\sim}A \supset \forall i{\sim}A)$ (1., *R2*)
3. $\forall j{\sim}{\sim}\forall i{\sim}A \supset \forall j\forall i{\sim}A$ (*T4*, *NS*)

4. $\forall j{\sim}A \supset {\sim}{\sim}\forall j{\sim}A$ — (NS)
5. $\forall i\forall j{\sim}A \supset \forall i{\sim}{\sim}\forall j{\sim}A$ — $(4., R2, T4, NS)$
6. $\forall j\forall i{\sim}A \supset \forall i\forall j{\sim}A$ — $(T5)$
7. $\forall j{\sim}{\sim}\forall i{\sim}A \supset \forall i{\sim}{\sim}\forall j{\sim}A$ — $(3., 5., 6., NS)$
8. ${\sim}\forall i{\sim}{\sim}\forall j{\sim}A \supset {\sim}\forall j{\sim}{\sim}\forall i{\sim}A$ — $(7., NS)$
9. $\exists i\exists jA \supset \exists j\exists iA$ — (8., *D2* aus Abschnitt 6)

T7. $\exists i\forall jA \supset \forall j\exists iA$

1. $\forall jA \supset A$ — $(A5)$
2. ${\sim}A \supset {\sim}\forall jA$ — $(1., NS)$
3. $\forall i({\sim}A \supset {\sim}\forall jA)$ — $(2., R2)$
4. $\forall i{\sim}A \supset \forall i{\sim}\forall jA$ — $(T4, 3., R1)$
5. ${\sim}\forall i{\sim}\forall jA \supset {\sim}\forall i{\sim}A$ — $(4., NS)$
6. $\forall j({\sim}\forall i{\sim}\forall jA \supset {\sim}\forall i{\sim}A)$ — $(5., R2)$
7. ${\sim}\forall i{\sim}\forall jA \supset \forall j{\sim}\forall i{\sim}A$ — $(6., A4, R1)$
8. ${\sim}\forall j{\sim}\forall i{\sim}A \supset {\sim}{\sim}\forall i{\sim}\forall jA$ — $(7., NS)$
9. ${\sim}\forall j\exists iA \supset {\sim}\exists i\forall jA$ — (*D2* aus Abschnitt 6)
10. $\exists i\forall jA \supset \forall j\exists iA$ — $(9., NS)$

T8. $\forall i(A \equiv B) \supset (\forall iA \equiv \forall iB)$

1. $(A \equiv B) \supset (A \supset B)$ — (NS)
2. $\forall i((A \equiv B) \supset (A \supset B))$ — $(1., R2)$
3. $\forall i(A \equiv B) \supset \forall i(A \supset B)$ — $(T4, 2., R1)$
4. $\forall i(A \supset B) \supset (\forall iA \supset \forall iB)$ — $(T4)$
5. $\forall i(A \equiv B) \supset (\forall iA \supset \forall iB)$ — $(3., 4., NS)$
6. $\forall i(A \equiv B) \supset (\forall iB \supset \forall iA)$ — $(NS, R2, T4, R1)$
7. $\forall i(A \equiv B) \supset (\forall iA \equiv \forall iB)$ — $(5., 6., NS)$

T9. $(A \supset \forall iB) \supset \forall i(A \supset B)$, wobei i nicht frei in A vorkommt.

1. $\forall iB \supset B$ — $(A5)$
2. $(A \supset \forall iB) \supset (A \supset B)$ — $(1., NS)$
3. $\forall i((A \supset \forall iB) \supset (A \supset B))$ — $(R2)$
4. $(A \supset \forall iB) \supset \forall i(A \supset B)$ — $(3., A4, R1)$

T10. ${\sim}\exists iA \supset \forall i{\sim}A$

1. $\forall i{\sim}A \supset \forall i{\sim}A$ — (NS)
2. ${\sim}{\sim}\forall i{\sim}A \supset \forall i{\sim}A$ — $(1., NS)$
3. ${\sim}\exists iA \supset \forall i{\sim}A$ — $(2., D2)$

T11. $\forall i{\sim}A \supset {\sim}\exists iA$

1. $\forall i{\sim}A \supset {\sim}{\sim}\forall i{\sim}A$ — $(1., NS)$
2. $\forall i{\sim}A \supset {\sim}\exists iA$ — $(D2)$

T12. ${\sim}\exists iA \equiv \forall i{\sim}A$ — $(NS, T10, T11)$
T13. $\forall iA \equiv {\sim}\exists i{\sim}A$ — $(NS, T12, D2)$
T14. $(A \supset \forall iB) \equiv \forall i(A \supset B)$, wobei i nicht frei in A vorkommt. — $(T9, A4, NS)$
T15. $\forall iA \equiv A$, wobei i nicht frei in A vorkommt.

1. $\forall iA \supset A$ — $(A5)$
2. $A \supset A$ — (NS)

3. $\forall i(A \supset A)$ (2., *R2*)
4. $A \supset \forall iA$ (*A4*, 3., *R1*)
5. $\forall iA \equiv A$ (1., 4., *NS*)

T16. $\forall i(A \supset B) \supset (\exists iA \supset B)$, wobei i nicht frei in B vorkommt.

1. $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset B)$ (*A5*)
2. $\forall i(A \supset B) \supset ({\sim}B \supset {\sim}A)$ (1., *NS*)
3. $\forall i(A \supset B) \supset ({\sim}B \supset \forall i{\sim}A)$ (2., *R2*, *A4*, *NS*)
4. $({\sim}B \supset \forall i{\sim}A) \supset ({\sim}\forall i{\sim}A \supset {\sim}{\sim}B)$ (*NS*)
5. $({\sim}\forall i{\sim}A \supset {\sim}{\sim}B) \supset (\exists iA \supset B)$ (*NS*, *D2*)
6. $\forall i(A \supset B) \supset (\exists iA \supset B)$ (*NS*)

T17. $(\exists iA \supset B) \supset \forall i(A \supset B)$, wobei i nicht frei in B vorkommt.

1. $(\exists iA \supset B) \supset ({\sim}B \supset {\sim}\exists iA)$ (*NS*)
2. $({\sim}B \supset {\sim}\exists iA) \supset ({\sim}B \supset {\sim}{\sim}\forall i{\sim}A)$ (1., *D2*, *NS*)
3. $({\sim}B \supset {\sim}{\sim}\forall i{\sim}A) \supset ({\sim}B \supset \forall i{\sim}A)$ (2., *NS*, *D2*)
4. $({\sim}B \supset \forall i{\sim}A) \supset \forall i({\sim}B \supset {\sim}A)$ (*T9*)
5. $\forall i({\sim}B \supset {\sim}A) \supset (A \supset B)$ (*A5*, *NS*)
6. $\forall i({\sim}B \supset {\sim}A) \supset \forall i(A \supset B)$ (5., *R2*, *A4*, *R1*)
7. $(\exists iA \supset B) \supset \forall i(A \supset B)$ (*NS*, 1., 2., 3., 4., 6.)

T18. $(\exists iA \supset B) \equiv \forall i(A \supset B)$, wobei i nicht frei in B vorkommt. (*T16*, *T17*, *NS*)

T19. $\forall i(A \wedge B) \supset \forall iA \wedge \forall iB$

1. $A \wedge B \supset A$ (*NS*)
2. $\forall i(A \wedge B \supset A)$ (*R2*, 1.)
3. $\forall i(A \wedge B) \supset \forall iA$ (2., *T4*, *R1*)
4. $\forall i(A \wedge B) \supset \forall iB$ (*NS*, *R2*, *R1*, *T4*)
5. $\forall i(A \wedge B) \supset \forall iA \wedge \forall iB$ (3., 4., *NS*)

T20. $\forall iA \wedge \forall iB \supset \forall i(A \wedge B)$

1. $\forall iA \wedge \forall iB \supset A$ (*A5*, *NS*)
2. $\forall iA \wedge \forall iB \supset B$ (*A5*, *NS*)
3. $\forall iA \wedge \forall iB \supset A \wedge B$ (1., 2., *NS*)
4. $\forall iA \wedge \forall iB \supset \forall i(A \wedge B)$ (3., *R2*, *A4*, *R1*)

T21. $\exists i(A \vee B) \supset \exists iA \vee \exists iB$
T22. $\exists iA \vee \exists iB \supset \exists i(A \vee B)$
T23. $\forall i(A \wedge B) \equiv \forall iA \wedge \forall iB$
T24. $\exists i(A \vee B) \equiv \exists iA \vee \exists iB$
T25. $\exists i(A \wedge B) \supset \exists iA \wedge \exists iB$
T26. $\forall iA \vee \forall iB \supset \forall i(A \vee B)$
T27. $\forall i(A \vee B) \supset \forall iA \vee \exists iB$
T28. $\forall iA \wedge \exists iB \supset \exists i(A \wedge B)$

Die Beweise von *T21*-*T28* seien dem Leser als Übungsaufgabe anheimgestellt.

T29. $\forall iA \equiv \forall jB$,

wobei B die Formel $A\{i/j\}$ ist, A keine freien Vorkommen von j enthält und es in A keine Formeln der Form $\forall jD$ mit freien Vorkommen von i gibt.

Beweis von *T29*:

1.	$\forall iA \supset B$	(*A5*)
2.	$\forall j(\forall iA \supset B)$	(1., *R2*)
3.	$\forall iA \supset \forall jB$	(2., *A4*, *R1*)
4.	$\forall jB \supset A$	(*A5*)
5.	$\forall i(\forall jB \supset A)$	(4., *R2*)
6.	$\forall jB \supset \forall iA$	(5., *A4*, *R1*)
7.	$\forall iA \equiv \forall jB$	(*NS*, 3., 6.)

T30. $\forall i(A \supset B) \supset (\exists iA \supset \exists iB)$

1.	$\forall i(A \supset B) \supset ({\sim}B \supset {\sim}A)$	(*A5*, *NS*)
2.	$\forall i(A \supset B) \supset (\forall i{\sim}B \supset \forall i{\sim}A)$	(1., *R2*, *A4*, *T4*, *NS*)
3.	$\forall i(A \supset B) \supset (\exists iA \supset \exists iB)$	(1., *NS*, *D2*)

T31. $\exists i(B \supset A) \equiv \forall iB \supset A$, wobei i nicht frei in A vorkommt.

1.	${\sim}(B \supset A) \equiv B \wedge {\sim}A$	(*NS*)
2.	$\forall i({\sim}(B \supset A) \equiv (B \wedge {\sim}A))$	(1., *R2*)
3.	$\forall i{\sim}(B \supset A) \equiv \forall i(B \wedge {\sim}A)$	(2., *T8*, *R1*)
4.	$\forall i{\sim}(B \supset A) \equiv \forall iB \wedge \forall i{\sim}A$	(3., *T23*, *NS*)
5.	$\forall i{\sim}(B \supset A) \equiv \forall iB \wedge {\sim}A$	(*T15*, *NS*)
6.	${\sim}\forall i({\sim}(B \supset A) \equiv {\sim}(\forall iB \wedge {\sim}A)$	(5., *NS*)
7.	${\sim}\forall i({\sim}(B \supset A) \equiv {\sim}\forall iB \vee A)$	(6., *NS*)
8.	$\exists i(B \supset A) \equiv \forall iB \supset A$	(7., *D2*, *NS*).

9.8 Semantische Interpretation und Widerspruchsfreiheit des Systems *P*

D1. Die **quantorenfreie Form** einer Formel A von P ist die Formel B, die man aus A durch Streichen aller Vorkommen der Form $\forall i$ erhält.

Die quantorenfreie Form der Formel $\forall xP(x) \supset \forall y(p \supset Q(y))$ ist beispielsweise die Formel $P(x) \supset (p \supset Q(y))$. Wenn es in einer Formel Vorkommen der Form $\exists iA$ gibt, so werden bei der Ermittlung der quantorenfreien Form diese Vorkommen nach *D2* aus Abschnitt 6 durch ${\sim}\forall i{\sim}A$ ersetzt, und danach wird $\forall i$ weggelassen.

Für den Beweis der Widerspruchsfreiheit von P wählen wir folgende semantische Interpretation der Formeln von P:

SR1. Eine Formel von P ist ihrer quantorenfreien Form äquivalent.

SR2. Den Prädikatformeln werden die Werte v und f analog wie den Aussagenvariablen zugeschrieben. Dabei sehen wir zwei Prädikatformeln genau dann als verschieden an, wenn sie sich bezüglich der Prädikatenvariablen unterscheiden.

SR3. Die Operatoren $\sim$ und $\supset$ werden als Operatoren der zweiwertigen Aussagenalgebra mit den Werten v und f definiert.

Bei dieser Interpretation erhalten wir:

1) Die Axiome *A1-A3* sind nach *SR3* Tautologien.
2) Die Axiome *A4* sind entsprechend den Formeln $(A \supset B) \supset (A \supset B)$ äquivalent und Tautologien.

3) Die Axiome *A5* sind den Formeln $A \supset A\{i/j\}$ äquivalent, und nach *SR2* sind diese Formeln Tautologien, da ein Ersetzen von i durch j nicht die Prädikatenvariablen betrifft.
4) Die Regeln *R1* und *R2* führen von Formeln, die bei dieser Interpretation Tautologien sind, wieder zu Formeln, die Tautologien sind.

Bei der angegebenen Interpretation sind also alle Axiome Tautologien, und die Schlußregeln erhalten den tautologischen Charakter der Theoreme.

Es gilt also:

MT1. Die Formeln A und $\sim A$ können nicht beide Theoreme von P sein.

Die angegebene Interpretation kann im Sinne der semantischen Regeln aus Abschnitt 3 als Interpretation von P in einem Wertebereich der Individuenvariablen mit nur einem einzigen Individuum angesehen werden. Zum Beweis der Widerspruchsfreiheit von P ist diese Interpretation ausreichend.

Als Hauptinterpretation des Systems P wählen wir neben den semantischen Regeln der klassischen Aussagenlogik die Begriffsbildungen und semantischen Regeln des Abschnitts 3. Für die Hauptinterpretation gilt folgendes Metatheorem:

MT2. Alle Theoreme von P sind allgemeingültig.

Beweis. Die Axiome *A1*-*A3* sind auf Grund der Regeln für $\sim$ und $\supset$ allgemeingültig. Die Wertbereiche der Formeln $\forall i(A \supset B)$ und $A \supset \forall iB$ in *A4* sind identisch, da i nicht frei in A vorkommt. Deshalb sind die Axiome *A4* allgemeingültig. Wenn eine Formel C eine Formel aus dem Wertbereich von $A\{i/j\}$ ist, so ist sie eine Formel aus dem Wertbereich von A (da die Wertbereiche der Individuenvariablen identisch sind). Da aber $\forall iA = v$ nur unter der Bedingung gilt, daß alle Formeln aus dem Wertbereich von A (und folglich auch von $A\{i/j\}$) den Wert v haben, so sind die Axiome *A5* allgemeingültig. Die Regel *R1* vererbt diese Eigenschaft der Theoreme gemäß der Definition von $\supset$. Wenn A eine allgemeingültige Formel ist, so haben alle Formeln aus ihrem Wertbereich den Wert v. Nach *RS2* folgt hieraus aber, daß $\forall iA$ allgemeingültig ist. Die Regel *R2* vererbt also auch die Allgemeingültigkeit der Theoreme von P.

9.9 Unabhängigkeit des Systems *P*

Ein Axiomenschema ist von den übrigen Axiomanschemata und Schlußregeln eines gegebenen Kalküls genau dann unabhängig, wenn mindestens ein Axiom dieses Schemas von den übrigen Axiomenschemata (oder allgemein von den übrigen Axiomen) und Schlußregeln unabhängig ist. Das Problem der Unabhängigkeit von Schlußregeln wird im System mit Axiomenschemata genauso gelöst wie mit Axiomen. Im weiteren zeigen wir die Unabhängigkeit der Axiomenschemata und Schlußregeln von P. Den Prädikatformeln schreiben wir genauso wie den Aussagenvariablen Wahrheitswerte zu. Dabei sehen wir Prädikatformeln mit gleichen Prädikatenvariablen als äquivalent an, ganz gleich, welche Individuenvariablen in ihnen vorkommen.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *A1* wählen wir die gleiche dreiwertige Aussagenalgebra wie in Abschnitt 10 des sechsten Kapitels für den Beweis der Unabhängigkeit von *A1* des Systems *NS* und folgende zusätzliche Regel: Eine Formel ist ihrer quantorenfreien Form äquivalent. Die Axiome von *A1* sind bei einer solchen Interpretation keine Tautologien. Die Axiome von *A2* und *A3* sind Tautologien. Die Axiome von *A4* und *A5* sind entsprechend Formeln der Form $(A \supset B) \supset (A \supset B)$ und $(A \supset A)$ äquivalent. Diese sind gleichfalls Tautologien. Die Regel *R1* erhält den tautologischen Charakter einer Formel. Die Regel *R2* ebenfalls, da $\forall iA$ mit A äquivalent ist.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *A2* wählen wir die gleiche Aussagenalgebra wie in Abschnitt 10 des sechsten Kapitels für *A2* des Systems *NS* und die zusätzliche Regel: Eine Formel ist ihrer quantorenfreien Form äquivalent.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *A3* wählen wir die gleiche Interpretation wie für *A3* des Systems *NS* im Abschnitt 10 des sechsten Kapitels und die zusätzliche Regel: Eine Formel ist ihrer quantorenfreien Form äquivalent.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *A4* wählen wir folgende Definitionen von $\sim$, $\supset$ und $\forall i$ in einer vierwertigen Aussagenalgebra mit den Werten v, m, n, f (ausgezeichneter Wert ist v):

A	$\sim A$
v	f
m	n
n	m
f	v

A	$\forall iA$
v	v
m	f
n	f
f	f

$A \supset B$	v	m	n	f
v	v	m	n	f
m	v	v	n	n
n	v	m	v	m
f	v	v	v	v

Wenn $A = m$ und $B = m$, so $(A \supset B) = v$, $\forall i(A \supset B) = v$, $\forall iB = f$, $(A \supset \forall iB) = n$ und $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall iB) = n$. Die Axiome von *A1*, *A2*, *A3* und *A5* sind bei dieser Interpretation Tautologien, und die Regeln *R1* und *R2* erhalten den tautologischen Charakter.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *A5* wählen wir die Definition der Operatoren $\sim$ und $\supset$ in der zweiwertigen Aussagenalgebra und folgende Definition von $\forall i$:

A	$\forall iA$
v	v
f	v

Wenn $(A\{i/j\} = f$, so $A = f$, $\forall iA = v$ und $(\forall iA \supset A\{i/j\}) = f$. Folglich sind die Axiome von *A5* keine Tautologien. Die Axiome von *A4* bleiben Tautologien, und die Regeln *R1* und *R2* erhalten den tautologischen Charakter.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *R1* wählen wir eine analoge Interpretation wie für *R2* in Abschnitt 10 des sechsten Kapitels und die zusätzliche Regel: Eine Formel ist ihrer quantorenfreien Form äquivalent.

Für den Beweis der Unabhängigkeit von *R2* wählen wir die Definition von $\sim$ und $\supset$ in der zweiwertigen Aussagenalgebra und folgende Definition von $\forall i$:

A	$\forall iA$
v	f
f	f

Das mit Hilfe von *R2* gewonnene Theorem $\forall i(p \supset p)$ hat den Wert f, d. h., es ist keine Tautologie. Die Axiome von *A4* und *A5* sind Tautologien. Auf die Regel *R1* und die übrigen Axiome hat diese Definition von $\forall i$ keinen Einfluß.

Das Gesagte bedeutet jedoch nicht, daß alle Axiome aller Axiomenschemata oder auch nur alle Axiome eines Schemas voneinander unabhängig sind.

9.10 Semantische Vollständigkeit von *P*

Die semantische Vollständigkeit der klassischen Quantorenlogik, d. h. der Satz, daß alle allgemeingültigen Formeln Theoreme eines axiomatischen Aufbaus der Quantorenlogik sind, wurde zuerst von K. Gödel bewiesen (Gödel 1930). Wir geben hier einen leichteren Beweis nach Henkin an (Henkin 1949). Dabei stützen wir uns auf die Begriffsbildungen und Theoreme des Abschnitts 8 des sechsten Kapitels. Die Ableitbarkeitsbeziehungen in den Definitionen *D1-D3* ist in unserem Zusammenhang natürlich die quantorenlogische Ableitbarkeit.

Wie in der Aussagenlogik wollen wir jetzt für die Quantorenlogik zeigen, daß jede konsistente Klasse von quantorenlogischen Formeln gemeinsam erfüllbar ist. Dazu erweitern wir die Sprache des Systems P auf folgende Weise zur Sprache des Systems P': Wir fügen zum Alphabet von P die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... als Individuenkonstanten hinzu und rechnen die Formeln aus dem Wertbereich einer quantorenlogischen Formel zu den quantorenlogischen Formeln des Systems P'. Außerdem fügen wir zum System P die beiden folgenden Schlußregeln hinzu,

R3. $\dfrac{A\{i/k\}}{\exists iA}$,

wobei k eine beliebige Individuenkonstante und i eine Individuenvariable ist, die in $A\{i/k\}$ nicht vorkommt.

R4. $\dfrac{\forall iA}{A\{i/k\}}$

MT1. Die Logik P' ist widerspruchsfrei.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, P' wäre widersprüchlich. Dann gäbe es eine Formel A' derart, daß $A' \wedge {\sim}A'$ in P' beweisbar wäre. Der Beweis des Satzes $A' \wedge {\sim}A'$ wäre eine endliche Folge von Formeln und enthielte deshalb nur eine endliche Anzahl von Individuenkonstanten (sagen wir n) und eine endliche Anzahl von Individuenvariablen. Es seien nun $i_1, \ldots, i_n$ Individuenvariablen des Systems P, die im Beweis des Satzes $A' \wedge {\sim}A'$ nicht auftreten. Wir ersetzen nun jede Individuenkonstante, die im Beweis von $A' \wedge {\sim}A'$ auftritt so durch eines der i_j $(j = 1, \ldots, n)$, daß ein und dieselbe Konstante durch ein und dieselbe Variable und verschiedene Konstanten durch verschiedene Variablen ersetzt sind. Die Formel, die wir durch diese Ersetzung aus A' erhalten, bezeichnen wir mit A. Da bei dieser Ersetzung die Regeln

$$\frac{A\{i/k\}}{\exists iA} \qquad\qquad \frac{\forall iA}{A\{i/k\}}$$

des Systems P' in die Regeln

$$\frac{A\{i/k\}}{\exists iA} \qquad\qquad \frac{\forall iA}{A\{i/k\}}$$

des Systems P (vgl. *T1* und *A5*) übergehen, geht der Beweis des Satzes $A' \wedge {\sim}A'$ in P' in einen Beweis des Satzes $A \wedge {\sim}A$ in P über. Das System P wäre also auch widersprüchlich. Da die Widerspruchsfreiheit von P bewiesen ist, ist auch das System P' widerspruchsfrei.

Der Semantik der klassischen Quantorentheorie entsprechend müssen wir aus der Tatsache, daß eine Formel $\forall iA$ in einer maximal konsistenten Formelklasse K^+ nicht enthalten ist, darauf schließen können, daß die Formel $A\{i/k\}$, wobei k eine Individuenkonstante ist, nicht in K^+ enthalten ist. Da dies nicht von einer beliebigen maximal konsistenten Formelklasse gewährleistet wird, definieren wir:

D1. Wir nennen eine Formelklasse K **$\boldsymbol{\omega}$-vollständig** genau dann, wenn gilt: Wenn die Formeln $A\{i/k\}$ für alle Individuenkonstanten k $(k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ in K enthalten sind, so ist die Formel $\forall iA$ in K enthalten.

Häufig wird die ω-Vollständigkeit einer Formelklasse K wie folgt definiert: Wenn eine Formel $\exists iA$ Element von K ist, so ist für mindestens eine Individuenkonstante k ($k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$) die Formel $A\{i/k\}$ Element von K. Dieser Satz ergibt sich als Folgerung aus *D1.*

Wir beweisen nun folgendes Metatheorem:

MT1. Jede konsistente Formelklasse K von P' läßt sich zu einer ω-vollständigen maximal konsistenten Formelklasse K^+ erweitern.

Beweis: Da es in P' nur abzählbar unendlich viele Formeln gibt, lassen sich diese Formeln in einer unendlichen Liste $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ anordnen. Wir gehen von einer konsistenten Formelklasse K von P' aus, die keine freien Individuenvariablen enthalten soll. (Das ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn wenn wir eine konsistente Formelklasse K mit freien Individuenvariablen zulassen würden, so brauchten wir nur die Individuenvariablen durch Individuenkonstanten ersetzen, und zwar gleiche Individuenvariablen durch gleiche Konstanten und verschiedene durch verschiedene.) Ausgehend von der konsistenten Formelklasse K bilden wir auf folgende Weise eine unendliche Folge von Formelklassen $K^0, K^1, K^2, \ldots$ Die Klasse K_0^0 ist identisch mit K. Ist die $(m+1)$-te Formel der Abzählung $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eine Formel der Form $\forall iA$ (wir betrachten eine Quantorenlogik mit den Grundoperatoren $\sim$, $\supset$ und $\forall$), so bilden wir die Klasse K_{m+1}^0, indem wir zu den Elementen der Klasse K^0 die Formel $A\{i/k\} \supset \forall iA$ hinzuzufügen, wobei k die erste Individuenkonstante der Folge $1, 2, 3 \ldots$ ist, die weder in der Formel $\forall iA$ noch in den Formeln aus K_m^0 vorkommt. (Da wir unendlich viele Individuenkonstanten zur Verfügung haben, gibt es immer eine solche Individuenkonstante.) Hat die $(m+1)$-te Formel der Abzählung $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eine andere logische Form, so setzen wir $K_{m+1}^0 = K_m^0$. Die Klasse K^0 ist die Vereinigung aller Klassen $K_0^0, K_1^0, \ldots, K_n^0, \ldots$,d. h., eine Formel ist Element der Klasse K^0, wenn sie Element einer der Klassen K_i^0 ($i = 0, 1, 2, \ldots$) ist. Jede der Klassen K_i^0 ist konsistent. Ist die Klasse K_n^0 konsistent, so auch die Klasse K_{n+1}^0. Sind die beiden Klassen identisch, so gilt dies offensichtlich. Es sei K_{n+1}^0 die Klasse K_n^0 vereinigt mit $A\{i/k\} \supset \forall iA$, und K_{n+1}^0 sei inkonsistent. Dann gilt:

1. $K_n^0, A\{i/k\} \supset \forall iA \vdash B$
2. $K_n^0, A\{i/k\} \supset \forall iA \vdash {\sim}B$
3. $K_n^0, A\{i/k\} \supset \forall iA \vdash B \wedge {\sim}B$
4. $K_n^0 \vdash A\{i/k\} \supset \forall iA \supset B \wedge {\sim}B$ (*DT*)

Die Individuenkonstante k können wir in $A\{i/k\}$ durch eine Individuenvariable j, die vorher noch nicht vorgekommen ist, ersetzen. Da wir unendlich viele Variablen haben, gibt es immer eine solche Variable j. Eine derartige Ersetzung ist auch zulässig, d. h., wenn eine Formel C mit der Konstanten k beweisbar ist, so ist auch die Formel C^*, in der die Konstante k durch j ersetzt ist, beweisbar. Nach dem Begriff des Beweises aus Annahmen kann C nämlich entweder ein Axiom oder eine Formel aus K_n^0 sein oder nach einer der Regeln *R1-R4* aus vorhergehenden Formeln der Folge gewonnen sein. Wenn C ein Axiom ist, so ist auch C^* ein Axiom. C kann nicht aus K_n^0 sein, da k nicht in Formeln aus K_n^0 vorkommt. Nach den Regeln *R1*, *R2* und *R3* entsteht C^* auf analoge Weise aus vorhergehenden Formeln wie die Formel C. Erhält man C nach der Regel *R4*, so erhält man C^* nach *A5* und *R1.*

5. $K_n^0 \vdash A\{i/j\} \supset \forall iA \supset B \wedge {\sim}B$
6. $K_n^0 \vdash \forall j(A\{i/j\} \supset \forall iA \supset B \wedge {\sim}B)$ (5., *R2*)
7. $K_n^0 \vdash \exists j(A\{i/j\} \supset \forall iA) \supset B \wedge {\sim}B$ (6., *T16*, j soll in B nicht frei vorkommen)
8. $K_n^0 \vdash \forall jA\{i/j\} \supset \forall iA \supset B \wedge {\sim}B$ (7., *T31*)
9. $K_n^0 \vdash B \wedge {\sim}B$ (8., *T29*, *R1*).

Damit wäre entgegen der Voraussetzung K_n^0 inkonsistent, also ist auch K_{n+1}^0 konsistent.

Offenbar ist auch die Klasse K^0 konsistent, denn wäre K^0 inkonsistent, so gäbe es eine endliche Teilmenge von K^0, die inkonsistent wäre. Dies ist aber nicht möglich, da alle K_i^0 konsistent sind.

Die Formelklassen $K^1, K^2, \ldots, K^n, \ldots$ bilden wir nun genauso wie in der Aussagenlogik, d. h., wenn die $(n+1)$-te Formel mit K^n verträglich ist, so ist K^{n+1} die Klasse, deren Elemente die $(n+1)$-te Formel und alle Elemente von K^n sind. Wenn die $(n+1)$-te Formel nicht mit K^n verträglich ist, so sind K^n und K^{n+1} identisch. Mit K^+ bezeichnen wir wieder die Vereinigung der Klassen $K^0, K^1, K^2, \ldots$

Die Klasse K^+ ist konsistent und maximal. Der Beweis verläuft genauso wie in der Aussagenlogik. Ebenso gelten die Theoreme *T3-T6* des Abschnitts 8 des sechsten Kapitels für K^+. Außerdem ist K^+ ω-vollständig, d. h., wenn alle Formeln der Form $A\{i/k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ in K^+ enthalten sind, so ist auch die Formel $\forall iA$ in K^+ enthalten. $\forall iA$ möge die n-te Formel der Abzählung sein, d. h. A_n. Dann ist nach der Konstruktion von K^n die Formel $A\{i/k\} \supset \forall iA$ in K^n enthalten. Angenommen, alle Formeln der Form $A\{i/k\}$ seien in K^n enthalten und $\forall iA$ nicht. Dann ist nach *T3* aus Abschnitt 8 des sechsten Kapitels die Formel $\sim\forall iA$ in K^n enthalten, und mit $A\{i/k\} \supset \forall iA$ ist $\sim A\{i/k\}$ in K^n enthalten. Das widerspricht der Konsistenz von K^n.

MT2. Jede konsistente Formelklasse K der klassischen Quantorenlogik ist im Bereich der natürlichen Zahlen erfüllbar.

Beweis: Nach *MT1* gibt es zu jeder konsistenten Formelklasse K eine maximal konsistente, ω-vollständige Formelklasse K^+. Wir ordnen allen Aussagenvariablen, Prädikatformeln und Formeln aus dem Wertbereich der Prädikatformeln den Wahrheitswert v genau dann zu, wenn sie Elemente von K^+ sind. Formeln der Form $\sim A$ und $A \supset B$ ordnen wir die Wahrheitswerte wie in der klassischen Aussagenlogik zu. Formeln der Form $\forall iA$ ordnen wir den Wert v genau dann zu, wenn alle Formeln $A(i/1), \ldots, A(i/n), \ldots$ den Wert v haben. Es läßt sich durch Induktion über die Anzahl der logischen Operatoren in A zeigen, daß gilt: Bei der oben angegebenen Bewertung hat eine Formel A genau dann den Wert v, wenn A Element von K^+ ist. Der Anfangsschritt des Induktionsbeweises ist auf Grund der angegebenen Bewertung trivial. Für Formeln der Form $\sim A$ und $A \supset B$ beweisen wir die Behauptung genauso wie in der Aussagenlogik. Für Formeln der Form $\forall iA$ gilt die Behauptung auf Grund der ω-Vollständigkeit von K^+.

Als Folgerungen aus *MT2* ergeben sich folgende Metatheoreme:

MT3. Wenn eine Formel A in der klassischen Quantorenlogik nicht beweisbar ist, so ist $\sim A$ im Bereich der natürlichen Zahlen erfüllbar.

Beweis: Mit P bezeichnen wir die Konjunktion der Axiome der Quantorenlogik. Wenn P und $\sim A$ unverträglich wären, so würde für eine Formel B gelten $P \wedge \sim A \supset B$ und $P \wedge \sim A \supset \sim B$.

Hieraus folgt, daß dann $B \vee \sim B \supset \sim(P \wedge \sim A)$ und $P \supset A$ beweisbar wären. Das widerspricht der Annahme, daß A in der Quantorenlogik nicht beweisbar ist. Deshalb sind die Formeln P und $\sim A$ verträglich und nach *MT2* gemeinsam erfüllbar.

MT4. Wenn eine Formel A allgemeingültig ist, so ist A in der klassischen Quantorenlogik beweisbar.

Beweis: Wenn A allgemeingültig ist, so ist $\sim A$ unerfüllbar, und nach *MT3* ist A beweisbar.

MT5. Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, so $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Beweis: Wenn nicht gilt $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, so ist die Formelklasse $A_1, \ldots, A_n, \sim B$ gemeinsam erfüllbar. Es gibt also eine Werteverteilung, bei der gilt: $A_1 = v, \ldots, A_n = v$ und $B = f$, d. h. aber, daß dann B nicht semantisch aus $A_1, \ldots, A_n$ folgt.

9.11 Syntaktische Unvollständigkeit von P

Das System P ist im folgenden Sinne *syntaktisch unvollständig*: Zu den Axiomen von P kann man eine Formel hinzufügen, die kein Theorem von P ist, ohne daß das so erhaltene System widersprüchlich ist (d. h., P läßt sich ohne Widerspruch erweitern). Eine solche Formel ist beispielsweise: $\exists iA \supset A$. Setzt man diese Formel als Axiomenschema $A6$, so sind nach der Regel *SR1* aus Abschnitt 8 diese Axiome $A6$ mit den tautologischen Formeln $\sim\sim A \supset A$ äquivalent.

Die Formeln $\exists iA \supset A$ und andere Formeln, deren Hinzufügen zu den Axiomen von P nicht zum Widerspruch führt, sind nicht allgemeingültig, und sie werden ausschließlich auf Grund semantischer Überlegungen nicht als Theoreme von P akzeptiert.

10. Kapitel
Ein System des natürlichen Schließens der klassischen Quantorentheorie

10.1 Alphabet und Formeldefinition

Wir ergänzen das Alphabet des Systems *NSch* der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik durch folgende Symbole:

1. x, y, z, x_1, y_1, z_1, ... - Individuenvariablen
2. a, b, c, k_1, k_2, k_3, ... - Individuenkonstanten
3. P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, ... - Prädikatenvariablen
4. $\forall$, $\exists$ - die Quantoren „alle“ und „einige“.

Die Individuenvariablen betrachten wir als Leerstellen für individuelle Termini. Für sie können folglich beim logischen Schließen in beliebigen Wissensbereichen konkrete individuelle Termini eingesetzt werden. In den Umgangssprachen treten zwei Typen von individuellen Termini, d. h. von Termini, die einen bestimmten Gegenstand und nur diesen bezeichnen, auf: 1. Eigennamen; 2. bestimmte Kennzeichnungen. Eigennamen werden in der Umgangssprache vor allem zur Bezeichnung von Personen, Haustieren, Städten, Flüssen, Bergen usw. verwendet. Außerdem benutzt man für die Bezeichnug individueller Gegenstände zusammengesetzte Ausdrücke mit dem bestimmten Artikel, wie „die gegenwärtige Königin von England“, „die Butter auf diesem Tisch“, „der Film, der letzte Woche im Kino gespielt wurde“. Solche Wendungen nennt man *bestimmte Kennzeichnungen*. Bei der Verwendung der klassischen Quantorentheorie zum logischen Schließen dürfen nur solche Eigennamen und bestimmten Kennzeichnungen verwendet werden, die auch wirklich genau einen Gegenstand bezeichnen, d. h., leere und mehrdeutige Eigennamen und Kennzeichnungen werden ausgeschlossen.

Die Individuenkonstanten werden wir bei der Formulierung von Theoremen der Quantorenlogik nicht benutzen, sondern nur bei der Formulierung der Beseitigungsregel des Partikularisators und in einigen Beweisen von quantorenlogischen Theoremen. Sie stehen als Abkürzung für einen bestimmten individuellen Terminus, obwohl es für unsere Zwecke gleichgültig ist, für welchen individuellen Terminus sie stehen. Sie dürfen folglich nicht als Variablen angesehen werden, obwohl ihre spezielle Bedeutung nicht bekannt ist. Prädikatenvariablen sind Leerstellen für beliebige Prädikate. Wir treffen folgende Definitionen:

D1. Prädikatformel: $f^n(i_1, \ldots, i_n)$, wobei $n \geq 1$, ist eine Prädikatformel genau dann, wenn f^n eine n-stellige Prädikatenvariable ist und $i_1, \ldots, i_n$ Individuenvariablen oder -konstanten sind.

Darüber hinaus übernehmen wir die Definitionen *D2-D5* aus Abschnitt 2 des neunten Kapitels, ebenso wie die dort getroffenen Festlegungen über Klammereinsparungen.

10.2 Grundregeln der Quantorenlogik im System des natürlichen Schließens

Wir wählen folgende Grundregeln der Quantorenlogik im System des natürlichen Schließens:

I. Alle Grundregeln der Aussagenlogik werden auf quantorenlogische Formeln ausgedehnt. Die Metavariablen A, B, C, A_1, ..., A_n, ... in den Grundregeln der Aussagenlogik deuten wir dabei als Metavariablen für beliebige quantorenlogische Formeln. Wir verfügen folglich über folgende Regeln der Quantorenlogik:

AR, *EK*, *BK*, *EA*, *BA*, *EB*, *BB*, *ENa*, *BNa*, *ENk*, *BNk*.

II. Im weiteren formulieren wir eine Einführungsregel für den Generalisator ($E\forall$) und den Partikularisator ($E\exists$) sowie eine Beseitigungsregel für den Generalisator ($B\forall$) und den Partikularisator ($B\exists$).

III. In den Strukturregeln zum Aufbau eines direkten und eines indirekten Beweises der Aussagenlogik werden die Metavariablen wieder als Metavariablen für beliebige quantorenlogische Formeln gedeutet, und zu den Regeln zum Hinzufügen neuer Zeilen werden die Regeln $E\forall$, $B\forall$, $E\exists$, $B\exists$ aufgenommen.

Bei der Formulierung der Einführungs- und Beseitigungsregel für Quantoren benutzen wir das Symbol $A(i/j)$, das die Formel darstellt, die man aus der Formel A erhält, wenn man in ihr für die Individuenvariable i den Ausdruck j unter Beachtung folgender Bedingungen einsetzt:

1. In A wird i nur an den Stellen ersetzt, wo es frei vorkommt. Kommt i mehrmals frei in A vor, so wird es an allen Stellen seines Vorkommens durch j ersetzt.
2. Falls sich i in A im Wirkungsbereich eines Quantors befindet, der die Variable h bindet, so darf für i kein Ausdruck eingesetzt werden, der h als freie Variable enthält.

Die zweite einschränkende Bedingung hat die Aufgabe zu verhindern, daß ein freies Vorkommen von i in A zu einem gebundenen Vorkommen in $A(i/j)$ wird. Falls dies nicht ausgeschlossen wird, ist es möglich, daß man aus einer wahren Voraussetzung A durch Einsetzung eine falsche Folgerung $A(i/j)$ erhält.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir nun zur Formulierung der Regeln für Quantoren über.

1. *Beseitigungsregel für den Generalisator* ($B\forall$):

$\dfrac{\forall iA}{A(i/j)}$, wobei j eine Individuenvariable oder eine Individuenkonstante sein kann.

Beispiel für die Anwendung von $B\forall$:

$$\frac{\forall x(x+x=2x)}{y+y=2y}$$

2. *Einführungsregel für den Generalisator* ($E\forall$):

$$\frac{A}{\forall iA}$$

Bei der Einführungsregel des Allquantors ist folgende Bedingung zu beachten: Die Regel darf nur dann verwendet werden, wenn die Variable i nicht frei in den Annahmen des Beweises vorkommt. Wir erklären den Sinn dieser Einschränkung an einem Beispiel: Die Variable x nimmt beispielsweise Werte aus dem Wertbereich der Menschen an, und $P(x)$ bedeutet „x ist später als 1900 geboren“. Angenommen, aus einer gegebenen Menge von Voraussetzungen V sei der Satz zu beweisen „Wenn x später als 1900 geboren ist, so ist x heute noch keine 100 Jahre alt“. Um dies zu beweisen, genügt es offenbar, aus den Voraussetzungen V und der Voraussetzung „x ist später als 1900 geboren“ den Satz „x ist heute noch keine 100 Jahre alt“ abzuleiten. Aus der Annahme des Beweises „x ist später als 1900 geboren“, die die freie Variable x enthält, erhielten wir aber, falls wir die obige Einschränkung nicht beachten würden, $\forall xP(x)$, d. h. umgangssprachlich ausgedrückt „Alle Menschen sind später als 1900 geboren“. Dieser Schluß ist aber offensichtlich nicht korrekt.

Außerdem darf eine Variable i nicht durch den Allquantor gebunden werden, wenn i als Index einer Konstanten nach einer Anwendung der Regel $B\exists$ auftritt.
Beispiel für die Anwendung von $E\forall$:

$$\frac{x \cdot x = x^2}{\forall x(x \cdot x = x^2)}$$

3. *Einführungsregel für den Partikularisator* ($E\exists$):

$\dfrac{A(i/j)}{\exists iA}$, wobei j eine Individuenvariable oder eine Individuenkonstante sein kann.

Diese Regel kann, wie auch die Regel $B\forall$, ohne Einschränkung verwendet werden.
Beispiel:

$$\frac{x \text{ ist grün}}{\exists y \ (y \text{ ist grün})}$$

Bevor wir die Beseitigungsregel für den Partikularisator formulieren, wollen wir ihren Sinn erklären. In (mathematischen) Beweisen wird häufig auf folgende Art geschlossen. Es ist bekannt, daß es zumindest einen Gegenstand gibt, der die Bedingung H erfüllt. Obwohl wir mitunter keinen Gegenstand angeben können, der die Bedingung H erfüllt, so können wir doch nach der obigen Behauptung erschließen, daß ein Gegenstand a die Bedingung H erfüllt. Das Zeichen a ist hier keine Variable (obwohl im gewissen Sinne eine Unbekannte), sondern ist eine Konstante, ist eine Abkürzung für den Namen eines konkreten Gegenstandes. Wir haben die Individuenkonstanten a, b, c, ... vor allem eingeführt, um diese Art zu schließen formal darstellen zu können. Die Konstanten a, b, c, ... kommen dabei nur in Zeilen des Beweises vor, nicht jedoch in Theoremen der Quantorenlogik.

Die Beseitigungsregel des Partikularisators besagt, daß man z. B. von $\exists xP(x)$ auf $P(a)$ schließen kann. Diese Regel gilt jedoch nur mit bestimmten Einschränkungen, die wir im weiteren erklären möchten. Angenommen, wir hätten in einem Beweis die beiden Zeilen:

(1) $\exists xP_1(x)$ und
(2) $\exists xP_2(x)$.

Würden wir die Beseitigungsregel des Partikularisators ohne Einschränkungen verwenden, so könnten wir aus (1) auf $P_1(a)$ und aus (2) auf $P_2(a)$ schließen. In (1) und (2) wird jedoch nur behauptet, daß es mindestens einen Gegenstand gibt, der die Bedingung P_1 erfüllt, und daß es mindestens einen Gegenstand gibt, der die Bedingung P_2 erfüllt. Es ist offensichtlich, daß diese beiden Gegenstände verschieden sein können, und es kann sogar vorkommen, daß sich P_1 und P_2 gegenseitig ausschließen. Wir vereinbaren deshalb, daß wir in einem Beweis, in dem wir die Beseitigungsregel des Partikularisators verwenden, jedesmal eine Individuenkonstante (a, b, c, ...) einsetzen, die im betreffenden Beweis vorher noch nicht vorkam.
Zum Verständnis einer weiteren Einschränkung betrachten wir das folgende Beispiel:

(3) $\exists yR(y, x)$

möge bedeuten „Es gibt einen Tag y, der dem Tag x folgt“. Dieser Satz ist offenbar eine gültige Aussagefunktion, da jedem Tag ein weiterer folgt. Würde man jetzt von (3) auf $R(a, x)$ schließen, so könnte man daraus wieder $\forall xR(a, x)$ erhalten. Der letzte Ausdruck würde aber bedeuten, daß es einen bestimmten Tag a gäbe, der allen anderen Tagen folgen würde. Das wäre dann der letzte aller Tage oder der „Tag des Jüngsten Gerichts“. Wir sehen, daß dieser Schluß nicht korrekt ist. Der Schluß ist deshalb nicht korrekt, weil das ausgewählte a offenbar vom Wert der Variablen x abhängt. Um in derartigen Fällen die Beseitigungsregel des Partikularisators trotzdem verwenden zu können, kennzeichnen wir die gewählte Konstante a mit dem Index x und erhalten den Ausdruck $R(a_x, x)$, der bedeuten soll, daß es zu jedem Tag x einen von x abhängigen bestimmten Tag a_x derart gibt, daß a_x auf x folgt.

Analog können wir aus dem Ausdruck

(4) $\exists y Q(x, y, z)$,

der bedeutet, daß es für beliebige zwei verschiedene Punkte x und z einen Punkt y gibt, der zwischen x und z liegt, den Ausdruck $Q(x, a_{xz}, z)$ ableiten, der bedeutet, daß zwischen zwei beliebigen Punkten x und z ein gewisser bestimmter Punkt a_{xz} liegt, der von den Punkten x und z abhängig ist.

Nach diesen Erläuterungen können wir jetzt die Beseitigungsregel für den Partikularisator formulieren.

4. *Beseitigungsregel für den Partikularisator* ($B\exists$):

$$\frac{\exists i A}{A(i/k_{j1,j2,\ldots,jn})},$$

wobei $j1$, $j2$, …, jn alle freien Individuenvariablen der Formel A sind, die von i verschieden sind, und der Ausdruck $A(i/k_{j1,j2,\ldots,jn})$ die Formel darstellt, die aus A durch Einsetzung der Konstanten k, gekennzeichnet mit den Indizes $j1$, $j2$, …, jn, für die Individuenvariable i entsteht.

Wir unterstreichen, daß die Variablen $j1, j2, \ldots, jn$, die in dem Ausdruck $k_{j1,j2,\ldots,jn}$ vorkommen, als freie Variablen betrachtet werden. Deshalb kann $k_{j1,j2,\ldots,jn}$ dann und nur dann für i in A eingesetzt werden, wenn sich i nicht im Wirkungsbereich eines Quantors befindet, der die Variablen $j1$, $j2$, …, jn bindet. Die als Indizes auftretenden Variablen dürfen nicht durch einen Allquantor gebunden werden.

10.3 Einige Theoreme und abgeleitete Regeln der Quantorenlogik

Da alle Regeln der Aussagenlogik in die Quantorenlogik übernommen werden, sind alle Theoreme und Theoremschemata der Aussagenlogik Theoreme bzw. Theoremschemata der Quantorenlogik. Ebenso sind alle abgeleiteten Schlußregeln der Aussagenlogik auch Schlußregeln der Quantorenlogik. Im weiteren beweisen wir einige spezielle Theoreme der Quantorenlogik.

Zunächst beweisen wir einige Theoreme, die Beziehungen zwischen dem Generalisator und dem Partikularisator ausdrücken. Die Beweise werden ganz analog denen der Aussagenlogik aufgebaut, nur daß wir in der Quantorenlogik vier Schlußregeln mehr zur Verfügung haben. Wir übertragen alle Abkürzungen in der Schreibweise der Aussagenlogik in die Quantorenlogik und vereinbaren weiter, in den folgenden Beweisen Theoreme der Aussagenlogik im System des natürlichen Schließens mit *TAn* und Theoreme der Quantorenlogik mit *Tn* zu bezeichnen (z. B. *TA4*, *T1*).

T1. $\forall x P(x) \supset P(y)$

1.	$\forall x P(x)$	A. d. B.
2.	$P(y)$	($B\forall$, 1.)

T2. $P(y) \supset \exists x P(x)$

1.	$P(y)$	A. d. B.
2.	$\exists x P(x)$	($E\exists$, 1.)

T3. $\forall x P(x) \supset \exists x P(x)$

Der Beweis ergibt sich aus *T1*, *T2* und *TA1*.

Wie in der Aussagenlogik den Theoremen bestimmte Theoremschemata entsprechen, so entsprechen auch in der Quantorenlogik den Theoremen bestimmte Theoremschemata, deren Beweis dem Beweis der Theoreme ganz analog ist. Den Theoremen *T1-T3* entsprechen folgende Theoremschemata:

TS1. $\forall i A \supset A(i/j)$
TS2. $A(i/j) \supset \exists i A$
TS3. $\forall i A \supset \exists i A.$

Aus den Theoremschemata erhält man wieder abgeleitete Schlußregeln. Wenn wir uns im weiteren in einem Beweis auf ein Theorem der Quantorenlogik berufen, so meinen wir nicht nur das Theorem in der ursprünglich bewiesenen Form, sondern auch alle Varianten des Theorems, die sich aus dem entsprechenden Theoremschema ergeben.

T4. $\forall x P(x) \equiv {\sim}\exists x {\sim} P(x)$

a)	1. $\forall x P(x)$	A. d. B.
	2. $\exists x {\sim} P(x)$	A. d. i. B.
	3. ${\sim} P(a)$	($B\exists$, 2.)
	4. $P(a)$	($B\forall$, 1.)
	(Wdspr. 3., 4.)	
b)	1. ${\sim}\exists x {\sim} P(x)$	A. d. B.
	2. ${\sim} P(x) \supset \exists x {\sim} P(x)$	*T2*
	3. ${\sim\sim} P(x)$	(*TA8*, 1., 2.)
	4. $P(x)$	(*TA7*, 3.)
	5. $\forall x P(x)$	($E\forall$, 4.)

Dieses Theorem und die folgenden Theoreme drücken die Beziehungen zwischen dem Generalisator, dem Partikularisator und der Negation aus.

T5. ${\sim}\forall x P(x) \equiv \exists x {\sim} P(x)$
T6. ${\sim}\exists x P(x) \equiv \forall x {\sim} P(x)$
T7. $\exists x P(x) \equiv {\sim}\forall x {\sim} P(x)$
T8. $\forall x {\sim} P(x) \supset {\sim}\forall x P(x)$
T9. ${\sim}\exists x P(x) \supset \exists x {\sim} P(x)$

Die folgenden Theoreme werden *Gesetze der Quantorenverteilung* genannt, da sie es gestatten, von Formeln, in denen sich ein Quantor auf zusammengesetzte Formeln bezieht, zu Formeln überzugehen, in denen sich der Quantor nur auf Prädikatformeln bezieht.

T10. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$
T11. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists x P(x) \supset \exists x Q(x))$
T12. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$
T13. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$
T14. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
T15. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Wir beweisen *T16*:

T16. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

1.	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	A. d. B.
2.	$\sim(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x))$	A. d. i. B.
3.	$\sim\forall x P(x) \wedge \sim\exists x Q(x)$	(*TA23*, 2.)
4.	$\sim\forall x P(x)$	(BK, 3.)
5.	$\sim\exists x Q(x)$	(BK, 3.)
6.	$\exists x{\sim}P(x)$	(*T5*, 4.)
7.	$\forall x{\sim}Q(x)$	(*T6*, 5.)
8.	$\sim P(a)$	($B\exists$, 6.)
9.	$P(a) \vee Q(a)$	($B\forall$, 1.)
10.	$\sim Q(a)$	($B\forall$, 7.)
11.	$Q(a)$	(BA, 8., 9.)
	(Wdspr. 10., 11.)	

Bisher betrachteten wir Theoreme, die neben den logischen Operatoren nur Prädikatformeln enthielten. Wir geben jetzt Theoreme an, die außerdem auch Aussagenvariablen enthalten:

T17. $\forall x\, p \equiv p$
T18. $\exists x\, p \equiv p$
T19. $\forall x(p \supset P(x)) \equiv p \supset \forall x P(x)$
T20. $\exists x(p \supset P(x)) \equiv p \supset \exists x P(x)$
T21. $\forall x(P(x) \supset p) \equiv \exists x P(x) \supset p$
T22. $\exists x(P(x) \supset p) \equiv \forall x P(x) \supset p$
T23. $\forall x(p \vee P(x)) \equiv p \vee \forall x P(x)$
T24. $\exists x(p \wedge P(x)) \equiv p \wedge \exists x P(x)$

Wir beweisen *T25*:

T25. $\forall x(P(x) \equiv p) \supset (\forall x P(x) \equiv p)$

1.	$\forall x(P(x) \equiv p)$	A. d. B.
2.	$P(x) \equiv p$	($B\forall$, 1.)
3.	$P(x) \supset p$	(*BB*, 2.)
4.	$p \supset P(x)$	(*BB*, 2.)
1.1.	$\forall x P(x)$	z. A.
1.2.	$P(x)$	($B\forall$, 1.1.)
1.3.	p	(*AR*, 1.2., 3.)
5.	$\forall x P(x) \supset p$	(1.1.$\supset$1.3.)
2.1.	p	z. A.
2.2.	$P(x)$	(*AR*, 2.1., 4.)
2.3.	$\forall x P(x)$	($E\forall$, 2.2.)
6.	$p \supset \forall x P(x)$	(2.1.$\supset$2.3.)
7.	$\forall x P(x) \equiv p$	(*EB*, 5., 6.)

Die folgenden Theoreme werden *Gesetze der Quantorenvertauschung* genannt:

T26. $\forall x \forall y R(x,y) \equiv \forall y \forall x R(x,y)$
T27. $\exists x \exists y R(x,y) \equiv \exists y \exists x R(x,y)$

T28. $\exists x \forall y R(x,y) \supset \forall y \exists x R(x,y)$

1.	$\exists x \forall y R(x,y)$	A. d. B.
2.	$\forall y R(a,y)$	($B\exists$, 1.)
3.	$R(a,y)$	($B\forall$, 2.)
4.	$\exists x R(x,y)$	($E\exists$, 3.)
5.	$\forall y \exists x R(x,y)$	($E\forall$, 4.)

Übungen:

1. Was besagt das Theorem *T3*, wenn x als Werte Götternamen annimmt und das Prädikat $P(...)$ als „... ist vollkommen“ gedeutet wird? Zeigen Sie, welche Bedeutung die Voraussetzung hat, daß die Theoreme der Quantorenlogik nur für nichtleere Individuenbereiche gelten! Betrachten Sie den Gottesbeweis des Anselm von Canterbury!
2. Welche Schlußregeln erhalten wir aus *TS1-TS3*?
3. Beweisen Sie die Theoreme *T5-T9*! Geben Sie die abgeleiteten Schlußregeln an, die sich aus diesen Theoremen ergeben, und geben Sie zu jeder dieser Regeln ein umgangssprachliches Beispiel an! Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, daß die Umkehrungen der Theoreme *T8* bis *T9* nicht gelten!
4. Beweisen Sie die Theoreme *T10-T15*, und zeigen Sie anhand von Gegenbeispielen, daß die Umkehrungen der Theoreme, die als Hauptoperator eine Subjunktion enthalten, nicht gelten!
5. Beweisen Sie die Theoreme *T17-T24*!
6. Beweisen Sie die Theoreme *T26* und *T27*, und zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, daß die Umkehrung von *T28* nicht gilt! Woran scheitert der formale Beweis dieser Umkehrung?

10.4 Anwendung des quantorenlogischen Schließens

Wie die Regeln der Aussagenlogik, so können auch alle Regeln der Quantorenlogik in beliebigen Wissensbereichen zum logischen Schließen aus gegebenen Voraussetzungen verwendet werden. Wir betrachten im folgenden ein einfaches Beispiel. Wir zeigen, daß aus den folgenden zehn Sätzen der Satz „Ich gehe Känguruhs aus dem Wege“ logisch folgt:

1. Die einzigen Tiere in diesem Hause sind Katzen.
2. Jedes Tier, das gern in den Mond guckt, ist als Schoßtier geeignet.
3. Wenn ich ein Tier verabscheue, so gehe ich ihm aus dem Wege.
4. Nur solche Tiere sind Fleischfresser, die nachts umherschweifen.
5. Jede Katze tötet Mäuse.
6. Nur die Tiere in diesem Hause mögen mich leiden.
7. Känguruhs sind nicht als Schoßtiere geeignet.
8. Nur Fleischfresser töten Mäuse.
9. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht leiden mögen.
10. Tiere, die nachts umherschweifen, gucken gerne in den Mond.

Lösung:
Wir wählen folgende Symbolik: x ist eine Individuenvariable, die als Werte Tiernamen annimmt:

Prädikate:	$H(x)$	- x lebt in diesem Hause
	$K(x)$	- x ist eine Katze
	$M(x)$	- x guckt gern in den Mond
	$S(x)$	- x ist als Schoßtier geeignet
	$V(x)$	- x ist so, daß ich es verabscheue
	$W(x)$	- x ist so, daß ich ihm aus dem Wege gehe
	$N(x)$	- x schweift nachts umher
	$F(x)$	- x ist Fleischfresser
	$T(x)$	- x tötet Mäuse
	$L(x)$	- x mag mich leiden
	$A(x)$	- x ist ein Känguruh.

Wir haben in symbolischer Form folgende zehn Voraussetzungen:

1. $\forall x(H(x) \supset K(x))$
2. $\forall x(M(x) \supset S(x))$
3. $\forall x(V(x) \supset W(x))$
4. $\forall x(F(x) \supset N(x))$
5. $\forall x(K(x) \supset T(x))$
6. $\forall x(L(x) \supset H(x))$
7. $\forall x(A(x) \supset \sim S(x))$
8. $\forall x(T(x) \supset F(x))$
9. $\forall x(\sim L(x) \supset V(x))$
10. $\forall x(N(x) \supset M(x))$.

Zu beweisen ist: $\forall x(A(x) \supset W(x))$. Zunächst beseitigen wir in 1-10 den Generalisator:

11. $H(x) \supset K(x)$
12. $M(x) \supset S(x)$
13. $V(x) \supset W(x)$
14. $F(x) \supset N(x)$
15. $K(x) \supset T(x)$
16. $L(x) \supset H(x)$
17. $A(x) \supset \sim S(x)$
18. $T(x) \supset F(x)$
19. $\sim L(x) \supset V(x)$
20. $N(x) \supset M(x)$

1.1.	$A(x)$	z. A.
1.2.	$\sim S(x)$	(AR, 1.1., 17.)
1.3.	$\sim M(x)$	($TA8$, 1.2., 12.)
1.4.	$\sim N(x)$	($TA8$, 1.3., 20.)
1.5.	$\sim F(x)$	($TA8$, 1.4., 14.)
1.6.	$\sim T(x)$	($TA8$, 1.5., 18.)
1.7.	$\sim K(x)$	($TA8$, 1.6., 15.)
1.8.	$\sim H(x)$	($TA8$, 1.7., 11.)
1.9.	$\sim L(x)$	($TA8$, 1.8., 16.)
1.10.	$V(x)$	(AR, 19., 1.9.)
1.11.	$W(x)$	(AR, 13., 1.10.)

21. $A(x) \supset W(x)$ (1.1.$\supset$1.11.)
22. $\forall x(A(x) \supset W(x))$ ($E\forall$, 21.)

Übungen:

1. Zeigen Sie, daß aus den beiden Voraussetzungen:
   1. Alle Zahlen, die auf 0 oder 5 enden und deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 5 und durch 3 teilbar;
   2. Einige Zahlen enden auf 0 und sind nicht durch 3 teilbar;

   folgt: Es gibt Zahlen, die auf 0 enden und deren Quersumme nicht durch 3 teilbar ist!
2. In Göttingen kursierte 1902 folgende Anekdote: „In Göttingen gibt es nur zwei Sorten von Mathematikern. Die einen machen das, was ihnen gefällt, und nicht das, was Felix Klein gefällt, die anderen machen das, was F. Klein möchte, aber nicht das, was sie selber möchten. Klein gehört weder zu den einen noch zu den anderen. Also ist Klein kein Mathematiker." Prüfen Sie, ob sich die Folgerung logisch aus den formulierten Voraussetzungen ergibt! Was ergibt sich, wenn Sie zu den gegebenen Voraussetzungen den empirisch gesicherten Satz „F. Klein war ein Mathematiker in Göttingen" hinzunehmen?
3. Zeigen Sie, daß der Schluß von der Prämisse „Alle Menschen sind sterblich" auf die Konklusio „Einige Menschen sind sterblich" quantorenlogisch nicht gültig ist! Welche zusätzliche Prämisse muß man hinzunehmen, damit wir einen quantorenlogisch gültigen Schluß bekommen?
4. Russell und Whitehead führen in ihrer „Principia Mathematica" den Begriff der „formalen Implikation" ein. Die formale Implikation „$P(x) \supset_x Q(x)$" wird gelesen als „für alle x, wenn $P(x)$, so $Q(x)$" und „$P(x,y) \supset_{xy} Q(x,y)$" als „für alle x und für alle y, wenn $P(x,y)$, so $Q(x,y)$". Diese formalen Ausdrücke werden auch *binäre Quantoren* genannt. Die durch die folgenden Definitionen eingeführten binären Quantoren ermöglichen eine starke Vereinfachung der üblichen Formelsprache.

   D1. $(A \supset_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n} B) \equiv_{Def} \forall i_1 \forall i_2 \forall i_3 \ldots \forall i_n(A \supset B)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$
   D2. $(A \equiv_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n} B) \equiv_{Def} \forall i_1 \forall i_2 \forall i_3 \ldots \forall i_n(A \equiv B)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$
   Formulieren Sie als zusätzliche Schlußregeln zum System des natürlichen Schließens der klassischen Quantorenlogik die Einführungs- und Beseitigungsregeln für die „formale Implikation" (...$\supset_i$...) und die „formale Äquivalenz" (...$\equiv_i$...)!
5. Beweisen Sie in dem um die Regeln aus Aufgabe 4 erweiterten System der klassischen Quantorenlogik die folgenden Theoreme!
   - $P(x) \vee \sim\forall y P(y)$
   - $\forall y P(x,y) \supset \forall y P(x,x)$
   - $(P(x) \supset_x Q(x)) \supset \forall x{\sim}P(x) \vee \exists x Q(x)$
   - $(P(x) \equiv_x Q(x)) \supset (\exists x P(x) \equiv \exists x Q(x))$
   - $P(x) \supset_x (P(y) \supset_y (Q(x) \supset Q(y)) \vee \forall z P(z))$
   - $\exists x \forall y(P(x) \supset Q(x) \supset (Q(x) \supset R(x) \supset (P(y) \supset R(y))))$.
6. Übersetzen Sie in die Sprache der Quantorenlogik! Benutzen Sie folgende Symbolik:
   1. $M(x)$: x ist ein Mann
   2. $F(x)$: x ist eine Frau
   3. $J(x,y)$: x ist jünger als y
   4. $K(x,y)$: x ist Kind von y

5. $V(x, y)$: x ist verheiratet mit y
6. $B(x)$: x wohnt in Berlin
7. $R(x)$: x wohnt in Rostock!

- Jeder Mensch hat Mutter und Vater.
- Jeder, der einen Vater hat, hat auch eine Mutter.
- Jeder Mensch ist jünger als die Eltern seiner Eltern.
- x ist verheiratet.
- Es gibt einen Mann, dessen Sohn eine Frau hat, die älter ist als er selbst.
- x und y sind Brüder.
- Wenn es in Berlin eine Frau gibt, die einen Bruder in Rostock hat, so gibt es in Rostock einen Mann, der eine Schwester in Berlin hat.
- Nicht jeder verheiratete Mann wohnt in Berlin.
- Nicht jede Frau in Berlin hat keinen Sohn in Rostock.
- Alle Kinder von x sind verheiratet.
- Es gibt einen Menschen, dessen Kinder alle verheiratet sind.
- Jedes Kind von x ist verheiratet mit einem Kind von y.
- y hat ein Kind, das nicht mit einem Kind von x verheiratet ist.
- Es gibt zwei solche Menschen, daß jedes Kind des einen mit einem Kind des anderen verheiratet ist.
- Es gibt zwei solche Menschen, daß kein Kind des einen mit einem Kind des anderen verheiratet ist.
- Wenn y Kind von x ist, so ist jedes Kind von y Enkel von x.

7. Überprüfen Sie, welche der folgenden Aussagereihen korrekte quantorenlogische Schlüsse darstellen! Wählen Sie hierzu eine entsprechende Formalisierung, und geben Sie die Beweise an!

- Keine Primzahl, die größer als 3 ist, ist gerade.
  Einige natürliche Zahlen sind Primzahlen.
  ―――――――――――――――――――
  Einige natürliche Zahlen sind nicht gerade.

- Alle Fische sind Säugetiere.
  Alle Wale sind Fische.
  ―――――――――――――――――――
  Alle Wale sind Säugetiere.

- Einige Seefahrer haben Amerika entdeckt.
  Einige Australier sind Seefahrer.
  ―――――――――――――――――――
  Einige Australier haben Amerika entdeckt.

- Alle Männer sind Väter.
  Alle Menschen sind Männer.
  ―――――――――――――――――――
  Alle Menschen sind Väter.

- Einige Tierarten sind vom Aussterben bedroht.
  Einige Vogelarten sind Tierarten.
  ―――――――――――――――――――
  Einige Vogelarten sind vom Aussterben bedroht.

- Wer achtzig Jahre alt wird, lebt gesund.
  ―――――――――――――――――――
  Wer gesund lebt, wird achtzig Jahre alt.

- Jeder, der in Deutschland lebt, lebt in Dresden.
  ―――
  Jeder lebt in Deutschland, der in Dresden lebt.

8. Beweisen Sie im System des natürlichen Schließens, daß die folgenden syllogistischen Schlüsse auch gültige Schlüsse der klassischen Quantorenlogik sind!

   - Kein Mensch ist das, was zu sein er vorgibt.
     Alle dünkelhaften Personen sind Menschen.
     ―――
     Keine dünkelhafte Person ist das, was sie zu sein vorgibt.
   - Es gibt Menschen, die keine Kriminalromane lesen.
     Alle Menschen sind an Neuigkeiten interessiert.
     ―――
     Manche an Neuigkeiten interessierte Menschen lesen keine Kriminalromane.
   - Alle, die an die Zukunft übertriebene Hoffnungen knüpfen, sind oft später enttäuscht.
     Manche abwartende Leute knüpfen an die Zukunft übertriebene Hoffnungen.
     ―――
     Einige abwartende Leute sind oft später enttäuscht.
   - Keine Lüge ist wahr.
     Manche Höflichkeit ist eine Lüge.
     ―――
     Es gibt Höflichkeiten, die nicht wahr sind.
   - Kein Mensch ist allwissend.
     Alle Götter sind allwissend.
     ―――
     Kein Gott ist ein Mensch.

9. Die folgenden Schlüsse der traditionellen Logik sind in der klassischen Quantorenlogik nicht beweisbar. Zeigen Sie dies mit Hilfe der Venndiagramme! Ergänzen Sie die angegebenen Prämissen so, daß korrekte quantorenlogische Schlüsse entstehen!

   - Alle Menschen sind sterblich.
     ―――
     Einige Menschen sind sterblich.
   - Keine ungerade Zahl ist durch zwei teilbar.
     ―――
     Einige ungerade Zahlen sind nicht durch zwei teilbar.
   - Alle Studenten interessieren sich für ihr Fachgebiet.
     Alle Jugendliche in diesem Raum sind Studenten.
     ―――
     Einige Jugendliche in diesem Raum interessieren sich für ihr Fachgebiet.
   - Alle Katzen sind Raubtiere.
     Alle Katzen sind Nachtschwärmer.
     ―――
     Einige Nachtschwärmer sind Raubtiere.
   - Alle Wale sind Säugetiere.
     Alle Säugetiere bringen lebende Junge zur Welt.
     ―――
     Einige, die lebende Junge zur Welt bringen, sind Wale.

10. Überprüfen Sie, ob aus den folgenden Prämissen der Schluß „Die Katzen in diesem Hause fangen Mäuse“ folgt!

   - Wenn ein Tier Mäuse fängt, so ist es nützlich.
   - Wenn ein Tier nicht nützlich ist, so erhält es kein Futter.
   - Alle Katzen sind Tiere.

- Eine Katze ist nur dann nützlich, wenn sie Mäuse fängt.
- Die Katzen in diesem Hause erhalten Futter.

11. Aus den Prämissen „Alle Vögel legen Eier" und „Alle Krokodile legen Eier" soll die Aussage „Einige eierlegende Tiere sind keine Vögel" abgeleitet werden. Ergänzen Sie die fehlenden Prämissen, die für einen korrekten Schluß erforderlich sind!
12. Welche Schlußfolgerung läßt sich aus den Prämissen „Alle Metalle leiten den Strom" und „Für die Energieübertragung werden nur Materialien verwendet, die den Strom leiten" ziehen?
    Welche Schlüsse werden möglich, wenn die Prämissen um „Kupfer ist ein Metall" und „Porzellan leitet den Strom nicht" ergänzt werden?
13. Welche Schlußfolgerung läßt sich aus den folgenden Prämissen ziehen?
    - Alle Menschen sind sterblich.
    - Einige Säugetiere sind Menschen.
    - Alle Säugetiere schützen ihre Nachkommen.
    - Alle sterblichen Wesen verteidigen ihr Leben.
14. Welche Schlußfolgerung läßt sich aus den folgenden Prämissen ableiten?
    - Niemand, der arbeitet, ist faul.
    - Alle, die die Prüfung bestehen, arbeiten.
    - Einige Stipendienempfänger sind faul.
    - Alle Stipendienempfänger sind Studenten.
15. Beweisen Sie, daß das System des natürlichen Schließens semantisch vollständig ist! Benutzen Sie dazu die Ergebnisse des 9. Kapitels!
16. Sind die Regeln $E\forall$, $B\forall$, $E\exists$ und $B\exists$ von einander unabhängig?

10.5 Semantische Tableaus und Sequenzenkalkül

Einen Kalkül der semantischen Tableaus für die klassische Quantorenlogik erhält man, wenn man zu dem Kalkül der semantischen Tableaus für die klassische Aussagenlogik (vgl. Abschnitt 14 des 4. Kapitels und Abschnitt 10 des 5. Kapitels) die folgenden Regeln hinzufügt. Bei der Formulierung dieser Regeln für die Entwicklung der semantischen Tableaus und der Sequenzenregeln setzen wir immer voraus, daß in A die Individuenvariable i frei für eine Einsetzung der Individuenvariablen j ist, d. h., in A sind keine Vorkommen der Form $\forall jB$ oder $\exists jB$ enthalten, in denen i frei vorkommt.

15. *Regel des vorderen Allquantors* ($V\forall$):

$$\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \forall iA & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \forall iA & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ A\{i/j\} & \vdots \end{array}$$

(Ist die Formel $\forall iA$ wahr, so ist $A\{i/j\}$ für jede Individuenvariable j wahr).

16. *Regel des hinteren Allquantors* ($H\forall$):

$$
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & \forall iA \\
. & . \\
. & . \\
. & .
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & \forall iA \\
. & . \\
. & . \\
 & A\{i/j\}
\end{array}\ ,
$$

wobei j eine Individuenvariable ist, die in den Formeln der ersten Tafel nicht frei vorkommt.

17. *Regel des vorderen Existenzquantors* ($V\exists$):

$$
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & . \\
\exists iA & . \\
. & . \\
. & . \\
. & .
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & . \\
\exists iA & . \\
. & . \\
. & . \\
A\{i/j\} & .
\end{array}\ ,
$$

wobei die Individuenvariable j in den Formeln der ersten Tafel nicht frei vorkommt.

18. *Regel des hinteren Existenzquantors* ($H\exists$):

$$
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & \exists iA \\
. & . \\
. & . \\
. & .
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|l}
. & . \\
. & . \\
. & . \\
. & \exists iA \\
. & . \\
. & . \\
 & A\{i/j\}
\end{array}
$$

Wir betrachten einige Beispiele:

v		f	
1.		$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset \forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$	
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$		$\forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$	
3.		$\forall xP(x)$	
		$\exists xQ(x)$	
4.		$P(x)$	
5.		$Q(x)$	
6. $P(x) \vee Q(x)$			
7. $P(x)$	$Q(x)$		

Die angegebene Formel ist eine Tautologie, da alle Teiltableaus geschlossen sind.

v		f
1.		$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$		$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
3.		$\forall x P(x)$
		$\forall x Q(x)$
4.		$P(x)$
5.		$Q(y)$
6. $P(x) \vee Q(x)$		
7. $P(x)$	$Q(x)$	

Die angegebene Formel ist keine Tautologie, da sich das rechte Tableau nicht schließen läßt. Der Grund liegt in der Einschränkung für die Variable bei der Anwendung der Regel $H\forall$ im fünften Schritt.

Wie schon in der Aussagenlogik läßt sich auch in der Quantorenlogik der Kalkül der semantischen Tableaus als Sequenzenkalkül darstellen. Wir brauchen dazu zu dem Kalkül *G3* aus Abschnitt 10 des fünften Kapitels nur folgende Regeln hinzuzufügen:

9. *Regel des vorderen Allquantors* ($V\forall$):

$$\frac{F_1(\forall i A), A\{i/j\} \longrightarrow F_2}{F_1(\forall i A) \longrightarrow F_2}$$

10. *Regel des hinteren Allquantors* ($H\forall$):

$$\frac{F_1 \longrightarrow F_2(\forall i A), A\{i/j\}}{F_1 \longrightarrow F_2(\forall i A)} ,$$

wobei die Individuenvariable j in F_1 und F_2 nicht frei vorkommt.

11. *Regel des vorderen Existenzquantors* ($V\exists$):

$$\frac{F_1(\exists i A), A\{i/j\} \longrightarrow F_2}{F_1(\exists i A) \longrightarrow F_2} ,$$

wobei die Individuenvariable j in F_1 und F_2 nicht frei vorkommt.

12. *Regel des hinteren Existenzquantors* ($H\exists$):

$$\frac{F_1 \longrightarrow F_2(\exists i A), A\{i/j\}}{F_1 \longrightarrow F_2(\exists i A)} .$$

10.6 Paradoxien der quantorenlogischen Folgebeziehung

Wird die klassische Quantorenlogik als Theorie der logischen Folgebeziehung für Aussagen mit den Quantoren „alle“ und „einige“ gedeutet, d. h., interpretiert man die Tautologien (Theoreme) der klassischen Quantorenlogik der Form $A \supset B$ als „Aus A folgt logisch B“ ($A \vdash B$), so ergeben sich außer den bereits in der Aussagenlogik auftretenden noch zusätzliche Paradoxien. Insbesondere sind Formeln der Form $\forall x P(x) \supset P(y)$ und $P(y) \supset \exists x P(x)$ Tautologien der klassischen Quantorenlogik. Entsprechend werden in der klassischen Theorie der Folgebeziehung die Regeln $\forall x P(x) \vdash P(y)$ und $P(y) \vdash \exists x P(x)$ als gültig akzeptiert, bei denen im Konsequent Individuenvariablen vorkommen, die im Antezedent fehlen. Man sieht sofort, daß diese Regeln nicht akzeptabel sind, wenn man für die Individuenvariablen x und y entsprechend die individuellen Termini „Erdmond“ und „B. Russell“ und für P das Prädikat „bewegt sich um die Erde“ einsetzt. Man erhält dann nämlich die falschen Aussagen: „Aus der Aussage ‚Alle Erdmonde bewegen sich um die Erde‘ folgt logisch ‚B. Russell bewegt sich um die Erde‘“ und „Aus der Aussage ‚Ein Erdmond bewegt sich um die Erde‘ folgt logisch die Aussage ‚Es gibt einen B. Russell, der sich um die Erde bewegt‘“. Um die oben angeführten Regeln doch noch zu retten, darf man jetzt - nach Meinung der Vertreter dieser Theorie - plötzlich für die Individuenvariablen nicht mehr beliebige individuelle Termini und für die Prädikatenvariablen nicht mehr beliebige Prädikattermini einsetzen, wie es eigentlich in einer logischen Theorie sein müßte, sondern für die Individuenvariablen Namen von Individuen aus einem vorgegebenen Bereich (einer Individuenmenge oder -klasse) und für die Prädikatenvariablen sogenannte Aussagenfunktionen, d. h. Funktionen, die jedem Ausdruck $P(k)$, wo P ein Prädikat und k ein Individuum aus dem gegebenen Bereich ist, einen Wahrheitswert zuordnen. Beim Aufbau der klassischen Prädikatenlogik werden also faktisch sowohl der Mengen- oder Klassenbegriff als auch der Funktionsbegriff vorausgesetzt. In bezug auf die zugrundeliegenden Individuenmengen werden in der klassischen Quantorenlogik folgende Voraussetzungen getroffen: 1) die Individuenbereiche sind nicht leer; 2) alle Individuenvariablen haben den gleichen Individuenbereich; 3) die Individuenbereiche enthalten nur solche Individuen, für die jedes Prädikat als Aussagefunktion gedeutet werden kann, d. h., jedes Prädikat ist für jedes Subjekt eindeutig definiert, es gilt der klassische Fall $P(x) \vee \neg P(x)$, und die Unbestimmtheit ist ausgeschlossen. Alle diese Voraussetzungen haben außerlogische Natur, und die klassische Quantorenlogik muß als eine mathematische Theorie beliebiger Individuenmengen mit den oben angegebenen Eigenschaften angesehen werden. Im Rahmen der klassischen Quantorenlogik kann beispielsweise die Aussage „Gott existiert nicht“ nicht formuliert werden, da im Rahmen dieser Theorien keine leeren Termini auftreten dürfen.

Eine logische Quantorentheorie, die die genannten ontologischen und mathematischen Annahmen nicht voraussetzt, ist in Sinowjew/Wessel 1975 dargestellt. In dieser Theorie können für die Subjektvariablen beliebige Subjekttermini (auch leere) und für die Prädikatenvariablen beliebige Prädikattermini eingesetzt werden. Es werden die beiden Formen der Negation unterschieden. Die Theorie ist widerspruchsfrei, in einem bestimmten Sinne vollständig und entscheidbar. Außerdem können in ihr die erwähnten Paradoxien nicht abgeleitet werden, da in ihren Theoremen der Form $A \vdash B$ die Formel B nur solche Variablen enthält, die auch in A vorkommen. Wir können diese Theorie hier nicht darstellen. Für ein richtiges Verständnis der Logik ist es jedoch wichtig zu wissen, daß es eine solche Quantorenlogik gibt.

10.7 Existenzbelastung einfacher und zusammengesetzter Aussagen

Wir haben bereits in der nichttraditionellen Prädikationstheorie (NTP) festgestellt:
Elementare prädikative Aussagen der Form $P(s_1, \ldots, s_n)$ und $\neg P(s_1, \ldots, s_n)$ sind in dem Sinne existentiell belastet, daß sie nur wahr sein können, wenn ihre Subjekte $s_1, \ldots, s_n$ existieren. Für das Existenzprädikat E gilt also in NTP:

E1. $P(s_1, \ldots, s_n) \supset E(s_1) \wedge \ldots \wedge E(s_n)$

E2. $\neg P(s_1, \ldots, s_n) \supset E(s_1) \wedge \ldots \wedge E(s_n)$.

K.-H. Krampitz hat sich in seiner Dissertation B (Krampitz 1990) die Aufgabe gestellt, Regeln zu formulieren, nach denen man die Existenzvoraussetzungen zusammengesetzter Aussagen ermitteln kann. Wir stützen uns auf die Ergebnisse von Krampitz und geben hier eine etwas präzisierte Fassung dieser Regeln an.

Das in diesem Abschnitt angegebene Regelsystem für die Ermittlung der Existenzbelastung zusammengesetzter Formeln und Aussagen ist ziemlich grob und nicht für alle Zwecke ausreichend. Im Abschnitt 16 des vierzehnten Kapitels geben wir ein genaueres Regelsystem für die Ermittlung der Existenzbelastung an. Doch für die Zielsetzung dieses Abschnitts ist das folgende Regelsystem ausreichend.

Von einer existentiellen Belastung einer Aussage zu sprechen ist nur sinnvoll, wenn diese Aussage wahr ist. Deshalb führe ich für den Satz „Wenn A wahr ist, so ist A existentiell belastet“ die Abkürzung „A hat die Charakteristik e“ und für den Satz „Wenn A wahr ist, so ist A nicht existentiell belastet“ die Abkürzung „A hat die Charakteristik n“ ein. Für e und n gelten dann folgende Regeln:

R1. Alle elementaren prädikativen Aussagen haben die Charakteristik e.

R2. Wenn A die Charakteristik e hat, so hat $\sim A$ die Charakteristik n.

R3. Wenn A die Charakteristik n hat, so hat $\sim A$ die Charakteristik e.

R4. $A \vee B$ hat die Charakteristik e genau dann, wenn A die Charakteristik e hat und B die Charakteristik e hat.

Die drei folgenden sind abgeleitete Regeln.

R5. $A \wedge B$ hat die Charakteristik e genau dann, wenn A oder B die Charakteristik e hat.

R6. $A \supset B$ hat die Charakteristik e genau dann, wenn A die Charakteristik n hat und B die Charakteristik e hat.

R7. $A \equiv B$ hat die Charakteristik n genau dann, wenn A und B entweder beide die Charakteristik e haben oder beide die Charakteristik n.

R8. $\forall iA$ und $\exists iA$ haben die Charakteristik e genau dann, wenn A die Charakteristik e hat.

Wir stellen eine zusätzliche Regel für Definitionen der Form $A \equiv_{Def} B$ auf. Da Definitionen Festsetzungen sind und nicht wahr oder falsch sein können, hat es keinen Sinn von existentieller Belastung von Definitionen zu sprechen. Da man aus Definitionen der Form $A \equiv_{Def} B$ aber die Aussagen der Form $A \equiv B$ erhält, stellen wir folgende Definitionsregel auf.

R9. Eine Definition $A \equiv_{Def} B$ muß so aufgebaut werden, daß die Aussage $A \equiv B$ die Charakteristik n hat.

Unsere Regeln können wir übersichtlich durch folgende Tabellen, ähnlich den Wahrheitstabellen, darstellen:

A	$\sim A$	$\forall iA$	$\exists iA$
n	e	n	n
e	n	e	e

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \supset B$	$A \equiv B$	$A \equiv_{Def} B$
n	n	n	n	n	n	n
n	e	e	n	e	e	e
e	n	e	n	n	e	e
e	e	e	e	n	n	n

Schreibt man jetzt Aussagenvariablen und elementaren Prädikatformeln die Charakteristik e zu, so kann man rekursiv von jeder Formel ermitteln, ob sie die Charakteristik e oder n hat. Werden Formelschemata benutzt, so müssen den Metavariablen A, B, C etc. beide Charakteristika e und n zugeschrieben werden. Es gilt also folgendes Metatheorem:

MT1. Jede Formel der klassischen Quantorenlogik hat genau eine der Charakteristika e oder n.

Betrachten wir folgende Axiomatisierung der klassischen Quantorenlogik:

A1. $A \supset (B \supset A)$

A2. $A \supset (B \supset C) \supset (A \supset B \supset (A \supset C))$

A3. $\sim A \supset \sim B \supset (B \supset A)$

A4. $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall iB)$, wobei i nicht frei in A vorkommt.

A5. $\forall iA \supset A\{i/j\}$, wobei i frei für j in A ist.

R1. Aus A und $A \supset B$ erhält man B.

R2. Wenn $\vdash A$, so $\vdash \forall iA$.

Es läßt sich leicht zeigen, daß alle Axiomenschemata die Charakteristik n haben und daß die Schlußregeln von Formeln mit der Charakteristik n stets nur zu Formeln mit der Charakteristik n führen. Es gilt also folgendes Metatheorem:

MT2. Alle Theoreme (Tautologien) der klassischen Aussagenlogik und Quantorenlogik haben die Charakteristik n, d. h., sie sind nicht existentiell belastet.

Philosophisch gesprochen bedeutet das, daß alle Tautologien dieser Logik nichts über die außersprachliche Wirklichkeit aussagen. *MT2* beantwortet präzise eine philosophische Frage, die in der Literatur ausgiebig diskutiert wird (vgl. Wittgenstein 1967, 1969, Müller 1967, Lazerowitz 1977).

Aus *MT2* erhält man mit *R3*:

MT3. Alle Kontradiktionen der klassischen Aussagenlogik und Quantorenlogik haben die Charakteristik e.

Die Charakteristik e kann hier aber nicht als „existentiell belastet" gedeutet werden, da nur wahre Aussagen existentiell belastet sein können, Kontradiktionen aber aus logischen Gründen falsch sind. Philosophisch gesprochen bedeutet das, daß auch alle Kontradiktionen nichts über die außersprachliche Wirklichkeit aussagen.

Generell stellen wir an eine logische Theorie die Anforderung, daß ihre Theoreme nicht existentiell belastet sind. Ist irgendein Satz existentiell belastet, so kann er kein Satz der Logik sein, da seine Wahrheit von außerlogischen Umständen abhängt.

Wie verhält es sich aber mit Aussagen über die logische Folgebeziehung und die entartete logische Folgebeziehung? Ihrer logischen Form nach sind sie elementare prädikative Aussagen und deshalb existentiell belastet. Solche Aussagen haben die Form $\vdash (tA, tB)$ und $\vdash (tA)$. Bei Aussagen dieser Form kann die existentielle Belastung aber allein durch die syntaktischen Bildungsregeln eingelöst werden. Wir akzeptieren deshalb folgende Regeln:

R10. Für $\vdash (tA, tB)$ ist die existentielle Belastung eingelöst genau dann, wenn A und B Formeln des entsprechenden Kalküls (bzw. Aussagen) sind.

R11. Für $\vdash tA$ ist die existentielle Belastung eingelöst, genau dann, wenn A eine Formel des entsprechenden Kalküls (bzw. eine Aussage) ist.

Für die Systeme der klassischen, der strengen und der strikten logischen Folgebeziehung gilt folgendes Metatheorem:

MT4. Wenn $A \vdash B$ eine gültige Regel der logischen Folgebeziehung ist, so hat $A \supset B$ die Charakteristik n.

Für die Theorie der entarteten logischen Folgebeziehung gilt:

MT5. Wenn $\vdash A$ beweisbar ist, so hat A die Charakteristik n.

Übungen:

1. Beweisen Sie *MT1*.
2. Beweisen Sie *MT2*.

10.8 Quantorenlogik höherer Ordnung

Die bisher betrachtete Quantorenlogik nennt man *Quantorenlogik erster Ordnung*. In ihrer Sprache kommen neben den Aussagenvariablen nur Individuenvariablen und -konstanten, Prädikatenvariablen und die Quantoren $\forall$ und $\exists$ vor. Die Quantoren binden in ihr nur Individuenvariablen. In der logischen Literatur wird außerdem die Quantifikation von Prädikaten behandelt. Wir sind der Auffassung, daß sich die Quantifikation von Prädikaten auf die Quantifikation von Subjekttermini zurückführen läßt (vgl. Sinowjew/Wessel 1975, 10. Kapitel, § 4, § 35), können dies aber aus Platzgründen hier nicht darstellen. Deshalb beschreiben wir nur kurz, wie die Quantifikation von Prädikaten in der logischen Literatur üblicherweise behandelt wird.

Die bisher von uns verwendeten Prädikatenvariablen haben als Argumente nur Individuenvariablen und -konstanten. Man nennt sie *Prädikatenvariablen erster Ordnung*. Konstante Prädikate haben wir bis jetzt nicht verwendet. Wir ergänzen unsere Symbolik dadurch, daß wir neben den Prädikatenvariablen P, Q, R, ... auch Prädikatenkonstanten erster Ordnung P', Q', R', ... usw. verwenden.

In der Quantorenlogik zweiter Ordnung werden nun Prädikatenvariablen (und Prädikatenkonstanten) eingeführt, die als Argument mindestens eine Prädikatenvariable oder -konstante erster Ordnung haben. Außerdem wird die Quantifikation von Prädikatenvariablen erster Ordnung zugelassen. Für die Quantifikation von Prädikatenvariablen erster Ordnung im System des natürlichen Schließens gelten ganz analoge Regeln wie in der Quantorenlogik erster Ordnung, mit den analogen Einschränkungen. So darf etwa die Einführungsregel des Allquantors für Prädikatenvariablen erster Ordnung nur angewandt werden, wenn die zu quantifizierende Prädikatenvariable erster Ordnung nicht frei in den Annahmen des Beweises vorkommt. Bei der Anwendung der Beseitigungsregel des Partikularisators $\exists$ für Prädikatenvariablen erster Ordnung muß immer ein konstantes Prädikat erster Ordnung gewählt werden, das im bisherigen Beweis nicht vorkommt, außerdem müssen alle frei in der Formel vorkommenden Prädikatenvariablen erster Ordnung als Indizes der gewählten Prädikatenkonstante geschrieben werden.

Das Spiel zum Aufbau von Quantorenlogiken höherer Ordnung läßt sich fortsetzen. Auf der Quantorenlogik zweiter Ordnung kann man eine solche dritter Ordnung aufbauen usw. Eine Quantorenlogik n-ter Ordnung läßt sich auf einer Quantorenlogik $(n-1)$-ter Ordnung wie folgt aufbauen. Das Alphabet der Quantorenlogik $(n-1)$-ter Ordnung wird durch Prädikatenvariablen und -konstanten n-ter Ordnung ergänzt. Die Formeldefinition wird entsprechend ergänzt. In der Quantorenlogik n-ter Ordnung dürfen Prädikatenvariablen $(n-1)$-ter Ordnung quantifiziert werden. Es gelten analoge Einführungs- und Beseitigungsregeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$. Wir werden im weiteren an einigen Stellen nur von der Quantorenlogik zweiter Ordnung Gebrauch machen. Dabei führen wir noch nicht einmal Prädikatenvariablen und -konstanten zweiter Ordnung ein, sondern quantifizieren nur über Prädikatenvariablen erster Ordnung.

11. Kapitel
Quantorenlogik mit Identität

11.1 Philosophische Bemerkungen zum Identitätsbegriff

Da in der vormathematischen Logik die Unterscheidung von ein- und zweistelligen Prädikaten sowie die Relationslogik wenig ausgearbeitet waren, wurde in der Geschichte der Philosophie häufig die Funktion von „ist“ als Prädikationsoperator und als Relation des Bedeutungseinschlusses mit seiner Rolle als Identitätsrelation verwechselt. Erkennbar ist dieser grobe Fehler in den folgenden Sätzen von M. Stirner (Pseudonym für J. Kaspar): „Ineinander den Menschen sehen und gegeneinander als Menschen handeln, das nennt man ein sittliches Verhalten. Es ist ganz und gar die ‚geistige‘ Liebe des Christentums. Sehe ich nämlich in dir den Menschen, wie ich in mir den Menschen und nichts als den Menschen sehe, so sorge ich für dich, wie ich für mich sorgen würde, denn wir stellen ja beide nichts als den mathematischen Satz vor: $A = C$ und $B = C$, folglich $A = B$, d. h. ich nichts als Mensch und du nichts als Mensch, folglich ich und du dasselbe.“ (Stirner 1924, S. 170) Wäre dieser Schluß korrekt, so würde nach dem gleichen Schema aus den beiden wahren Voraussetzungen „J. Kaspar ist ein Lebewesen“ und „Ein Esel ist ein Lebewesen“ auch folgen „J. Kaspar ist ein Esel“. In beiden Fällen handelt es sich aber um Trugschlüsse, die auf einer Verwechslung verschiedener logischer Formen beruhen.

Wir erklären zunächst, warum das zweistellige Prädikat der Identität in der Sprache erforderlich ist und was es bedeutet. Danach gehen wir auf einige philosophische Probleme ein, die mit einer Fehldeutung der Identität zusammenhängen und in der Geschichte der Philosophie heftig diskutiert wurden. Subjekttermini, die die Aufgabe haben, genau einen Gegenstand zu bezeichnen, nennen wir *singuläre Subjekttermini.* Dabei kann ein singulärer Subjektterminus leer sein, d. h., es ist möglich, daß es keinen Gegenstand gibt, den er bezeichnet. Er kann mehrdeutig sein, wenn es mehrere Gegenstände gibt, die er bezeichnet. Wenn es genau einen Gegenstand gibt, der durch einen singulären Subjektterminus bezeichnet wird, so nennen wir diesen singulären Subjektterminus einen *individuellen Subjektterminus.* Wir beschränken uns zunächst auf eine Erläuterung der Identitätsrelation für individuelle Subjekttermini.

Alle natürlichen Sprachen bieten die Möglichkeit, einen Gegenstand mit verschiedenen Termini zu bezeichnen. Auf den ersten Blick scheint dies eine nebensächliche Eigenschaft der Sprache zu sein und sogar auf Redundanz hinzudeuten. Wir wollen uns am folgenden Beispiel verdeutlichen, daß dieser erste Eindruck falsch ist. Nehmen wir an, die Kriminalpolizei hat einen Mord an der Person N. N. zu klären. Die ersten Ermittlungen mögen ergeben, daß der Mord von einer Person allein ausgeführt wurde. In diesem Fall ist der Terminus „der Mörder des N. N.“ mit dem bestimmten Artikel sinnvoll. Die Kriminalpolizei verfügt dann über eine individuelle Bezeichnung für den Täter, obwohl sie in diesem Stadium der Ermittlungen noch nicht weiß, wer der Täter ist. Gelingt es ihr, in der weiteren Ermittlung durch empirische Untersuchungen und logische Schlüsse festzustellen, daß die Termini „der Mörder des N. N.“ und „die Person K. K.“ bedeutungsgleich sind, d. h. denselben Gegenstand bezeichnen, so haben sie den Mörder von N. N. identifiziert. Man sagt dann, daß die Person K. K. identisch mit dem Mörder von N. N. ist. Die Kriminalpolizei macht sich dabei natürlich keine Gedanken über die Bedeutungsgleichheit von Termini, und doch liegt diese logische Relation ihrer schwierigen Arbeit der Identifikation zugrunde.

Der Prozeß der Identifikation spielt in allen Lebensbereichen und in allen Wissenschaften eine wichtige Rolle. Er hat in verschiedenen Bereichen ganz unterschiedlichen Charakter. Die in all diesen Fällen festgestellte Identitätsrelation hat jedoch die gleichen logischen Eigenschaften. Wenn gesagt wird „a und b sind identisch“ (symbolisch $a = b$), so wird damit nicht ausgedrückt, daß die Relation der Identität zwischen zwei unterschiedlichen Objekten a und b besteht, sondern nur, daß „a“ und „b“ zwei verschiedene Bezeichnungen für ein und dasselbe Objekt sind. In einer Aussage „a und b sind identisch“, wird nicht über die Termini „a“ und „b“ gesprochen, sondern über die mit diesen Termini bezeichneten Objekte, die Termini „a“ und „b“ werden in ihr verwendet und nicht angeführt. Eine Identitätsaussage „a ist identisch mit b“ ist in logischer Hinsicht abgeleitet von der Aussage „der Terminus a und der Terminus b sind bedeutungsgleich“ ($ta \rightleftharpoons tb$). Die Beziehung der Bedeutungsgleichheit $\rightleftharpoons$ definieren wir mit Hilfe der Beziehung des Bedeutungseinschlusses $\rightharpoonup$ auf folgende Weise:

$$ta \rightleftharpoons tb \equiv_{Def} (ta \rightharpoonup tb) \wedge (tb \rightharpoonup ta).$$

Mit Hilfe der Bedeutungsgleichheit könnten wir die Identitätsrelation durch folgende Definition einführen. Wir werden später sehen, aus welchen Gründen diese Definition inkorrekt ist. Wir beschränken uns auf den Fall, daß a und b individuelle Subjekttermini sind:

$$(a = b) \equiv_{Def} (ta \rightleftharpoons tb).$$

Eine Identitätsaussage entsteht also dadurch, daß man von einer Aussage über die Bedeutungsgleichheit von individuellen Termini zu einer kürzeren und bequemeren ontologischen Aussage übergeht.

Die Grundzüge der Identitätslehre wurden in der Geschichte der Philosophie bereits von Aristoteles gelegt. Er schreibt: „Das Identische, um es nur in einem allgemeinen Umriß zu beschreiben, scheint drei verschiedene Bedeutungen zu haben. Wir nennen etwas identisch der Zahl oder der Art oder der Gattung nach: der Zahl nach identisch das, was mehr als einen Namen hat, aber nur ein Ding ist, wie Gewand und Kleid; der Art nach, was mehr als eines ist, aber keinen Unterschied in der Art aufweist, wie z. B. Mensch mit Mensch und Pferd mit Pferd identisch ist; denn man nennt solches der Art nach identisch, was unter dieselbe Art fällt. Ebenso nennt man der Gattung nach identisch, was unter dieselbe Gattung fällt, wie Pferd, verglichen mit Mensch.“ (Aristoteles 1948, S. 9) Unsere Beschränkung auf individuelle Subjekttermini ist auch im Sinne des Aristoteles. „Es versteht sich wohl von selbst, daß man allgemein mit identisch besonders das der Zahl nach meint.“ (Aristoteles 1948, S. 9/10) Für diese Art der Identität entwickelte er eine ziemlich reiche Theorie: „Wiederum muß man sehen, ob mit dem, womit das eine identisch ist, es auch das andere ist. Sind nicht beide mit demselben Dritten identisch, so sind sie es offenbar auch nicht untereinander.
Auch muß man nach dem urteilen, was dem vorgeblich Identischen mitfolgt, und nach dem, dem es selbst mitfolgt. Was dem einen mitfolgt, muß es auch dem anderen, und wenn das eine davon mitfolgt, muß auch das andere mitfolgen.
Steht eines dieser Stücke nicht in dem erforderlichen Einklang, so ist offenbar keine Identität vorhanden.“ (Aristoteles 1948, S. 162)

In diesem Text ist eine ganze Reihe von Sätzen über die Identität enthalten, die in der modernen Logik der Identität berücksichtigt werden. Aristoteles formulierte bereits das häufig fälschlicherweise G. W. Leibniz zugeschriebene Identitätsprinzip: Identische Gegenstände unterscheiden sich in keiner Eigenschaft (principium identitatis indiscernibilium), wie der folgende Text belegt: „Überhaupt muß man alles ins Auge fassen, was wie immer von jedem der beiden ausgesagt wird und wovon beide ausgesagt werden, und muß sehen, ob irgendwo die Übereinstimmung fehlt. Was von dem einem, muß von dem anderen, und wovon das eine, von dem muß auch das andere ausgesagt werden.“ (Aristoteles 1948, S. 164)

Eine erste symbolische Formulierung dieses Prinzips gab Ch. S. Peirce 1885: $(a = b) \equiv_{Def} \equiv_{Def} \forall P((P(a) \wedge P(b)) \vee (\sim P(a) \wedge \sim P(b)))$, (in Worten: a ist mit b identisch genau dann, wenn für alle Eigenschaften P gilt: P kommt entweder a und b zu, oder P kommt weder a noch b zu). Diese Definition der Identität wurde bekannt, da sie B. Russell und N. Whitehead in ihre „Principia Mathematica“ aufnahmen. Weit verbreitet ist diese Definition heute in der Schreibweise: $(a = b) \equiv_{Def} \forall P(P(a) \equiv P(b))$.

In der Geschichte der Philosophie wurde die Identitätsrelation umfangreich diskutiert, und wir finden verschiedene Fehldeutungen. Wir gehen hier nur auf einige Auffassungen ein. So wurde die Identität von den einen Philosophen als eine rein ideale Relation angesehen. Th. v. Aquin schreibt: „Die Relation, welche durch den Namen ‚dasselbe‘ bezeichnet wird (importatur), ist eine bloß gedachte Relation, falls man schlechthin von demselben spricht; denn eine solche Relation kann nur in der Zuordnung eines (Dinges) zu ihm selbst bestehen, welche die Vernunft zum Vorschein bringt, durch irgend zwei ihrer Betrachtungsweisen (considerationes)“ (zitiert nach Bocheński 1956, S. 177). Thomas von Aquin hat hier insofern recht, als die Identitätsrelation nur durch die Eigenschaften unserer Sprache, in der wir über die Wirklichkeit sprechen, zustande kommt. Doch heißt das nicht, daß die Identität eine bloß ideale Relation ist. Eine Identitätsaussage $a = b$ hat die Form einer ontologischen Behauptung, und die Relation der Identität zwischen a und b existiert, wenn ein Gegenstand existiert, der mit den individuellen Termini „a“ und „b“ bezeichnet wird.

Die auf Aristoteles zurückgehende Definition der Identität als Übereinstimmung in allen Eigenschaften enthält die Gefahr von Fehldeutungen, die in der Geschichte der Philosophie auch auftreten.

Die Leibnizsche Definition halten wir für unzweckmäßig, weil sie bei empirischen Individuen praktisch nutzlos ist, da man dort doch nie die Übereinstimmung in allen Eigenschaften überprüfen kann. In der modernen mathematischen Logik umgeht man diese Schwierigkeit, indem man immer einen festen Individuenbereich mit genau definierten Prädikaten vorgibt. Außerdem legt diese Definition nahe, man würde die Identität von *zwei* Gegenständen durch Vergleich aller ihrer Eigenschaften feststellen.

Bei dem Versuch, die Leibnizsche Identitätsdefinition auf empirische Gegenstände anzuwenden, versuchte man, die Identitätsrelation unmittelbar ontologisch zu begründen, ohne ihren Ursprung in den Eigenschaften der Sprache zu sehen. Man sagt dann etwa, die Identitätsrelation würde aus der relativen Beständigkeit der Realität abstrahiert. Führt man diesen falschen Ansatz fort, so entsteht folgendes Dilemma. Aus dem Satz $a = a$ ergibt sich dann etwa „Sokrates ist Sokrates“. Diesen Satz kann man jetzt fälschlicherweise so auffassen, als ob Sokrates zu allen Zeiten seiner Existenz die gleichen Eigenschaften gehabt hätte, d. h., daß Sokrates sich nicht verändert hätte. Solche metaphysischen ontologischen Deutungen des Satzes $a = a$ wurden in der Geschichte der Philosophie vorgenommen, und als Folgerung solcher Deutungen behauptete man entweder, es gäbe überhaupt keine Veränderung oder, da diese Feststellung aller Erfahrung widersprach, verwarf man den Satz $a = a$. So setzte G. W. F. Hegel etwa der metaphysischen Deutung des Satzes $a = a$, d. h. der Leugnung aller Veränderung, sein Prinzip der dialektischen Identität entgegen, nach dem kein Gegenstand sich selbst gleich bleibt. Gleichzeitig verwarf er den Satz $a = a$.

Wir wollen uns die Hegelsche Argumentation etwas näher unter logischem Gesichtspunkt ansehen. Hegels Grundgedanken seines Prinzips der dialektischen Identität formulieren wir später logisch korrekt bei der Erläuterung des Veränderungsprädikats. Hier belegen wir drei für Hegel typische logische Fehler durch entsprechende Textstellen. Ein erster Fehler besteht darin, daß die Bezeichnungen eines Gegenstandes mit diesem Gegenstand selbst verwechselt werden. Eine Identitätsaussage $A = B$ wird so gedeutet, als ob die Buchstaben A und B

identisch sein sollen. A und B werden nicht als verschiedene Bezeichnungen ein und desselben Gegenstandes aufgefaßt. Als Beleg mag ein Zitat aus der „Jenenser Logik" dienen: „Nicht die Bestimmtheit A ist an sich, sondern daß sie sich selbst gleich sei, dies ist an sich; und sie ist dem Andersein nur dadurch entnommen, daß sie in der Tat als diese Bestimmtheit vertilgt, ganz ideell ist oder gesetzt als ein Erkanntes. Sie ist sich gleich, so daß $A = A$ eine Verschiedenheit, zwei A ausdrückt, aber daß die Verschiedenheit, dies Anders unmittelbar nicht ist; beide A sollen nicht nur gleich sein; es ist nicht $A = B$ - B soll auch ein A sein -, sondern $A = A$; es ist dasselbe A, das auf beiden Seiten ist; sie haben nicht durch die Stellung, wie im Urteil, eine Ungleichheit, nur durch das Rechts oder Links, wo sie geschrieben, oder das Früher oder Später, wenn sie ausgesprochen werden, - Verschiedenheiten, die unmittelbar darin wegfallen, daß man nicht sagen kann, welches Rechts oder Links usw. sei. Nicht als ob das Eine das Rechts und das Andere das Links sei, - jedes ist das Eine und das Andere." (Hegel 1968, S. 135)

Zu dieser falschen Auffassung der Identität trug die Verwendung des Identitätszeichens in der Mathematik bei. In der Mathematik sind Zahlen Objekte, die durch Definition eingeführt werden. Sie existieren erst, wenn man Zeichen für sie einführt. Man unterscheidet zwar zwischen Ziffer und Zahl, aber ohne Bezeichnungen (Ziffern) existieren auch die Zahlen als abstrakte Objekte nicht. Das führt dann dazu, daß man die Zahlen und die Zahlentermini häufig nicht unterscheidet.

Ein zweiter Fehler besteht in der Verwechslung der Identität mit einer einfachen Prädikation. Die folgende Textstelle mag das belegen: „Dieser Widerspruch, oder daß der Satz der Identität sich selbst aufhebt, gefühlt, drückt sich so aus, daß mit einem solchen Satze gar nichts gesagt sei. Der Baum ist –, man erwartet, daß etwas von ihm gesagt werde, etwas, das ihn ausdrücke als ein in einer Bestimmtheit sich Erhaltendes, in der Bestimmtheit des Prädikats sich Gleichbleibendes; aber ‚der Baum ist der Baum' drückt eben nicht das Ansich desselben aus, indem es ihn nicht als ein in sich selbst Reflektiertes darstellt." (Hegel 1968, S. 136)

Ein dritter Fehler Hegels besteht darin, daß er die Worte „identisch" und „verschieden" (eine Aussage der Form „a ist verschieden von b" oder „a unterscheidet sich von b" ist einfach eine Negation der betreffenden Identitätsaussage $a = b$, deshalb behandeln wir „den Unterschied" nicht gesondert) nicht als zweistellige Prädikate (oder Relationen) behandelt, sondern einmal als Subjekttermini und zum anderen als einstellige Prädikate. (Der letztere Fehler ist etwa dem folgenden analog: Alle Menschen sind gleich. Einige sind aber gleicher.) Der folgende Text mag dies belegen: „So ist (es) die leere Identität, an welcher diejenigen festhängen bleiben, welche sie als solche für etwas Wahres nehmen und immer vorzubringen pflegen, die Identität sei nicht die Verschiedenheit, sondern die Identität und die Verschiedenheit seien verschieden. Sie sehen nicht, daß sie schon hierin selbst sagen, daß die Identität ein Verschiedenes ist; denn sie sagen, die Identität sei verschieden von der Verschiedenheit, indem dies zugleich als die Natur der Identität zugegeben werden muß, so liegt darin, daß die Identität nicht äußerlich, sondern an ihr selbst, in ihrer Natur dies sei, verschieden zu sein." (Hegel 1951, S. 28)

Zu Hegels Kritik am logischen Identitätsbegriff seien abschließend noch zwei Bemerkungen gestattet. Falls wir nur individuelle Subjekttermini zulassen, so hat Hegel erstens natürlich recht, wenn er schreibt, der Satz der Identität $a = a$ sei eine Tautologie. Alle logischen Gesetze sind Tautologien, die uns keine Informationen über die nichtsprachliche Wirklichkeit liefern. Unrecht hat er, wenn er sich bei seiner Kritik am logischen Identitätsbegriff auf den Satz $a = a$ beschränkt. Würde sich die Identitätslogik auf diesen Satz beschränken, so wäre sie wirklich überflüssig, aber die Identitätslogik wird ja gerade erforderlich, weil wir einen Gegenstand mit verschiedenen Namen bezeichnen können und weil wir aus Aussagen mit verschiedenen Namen des gleichen Gegenstandes logische Schlüsse ziehen müssen. Zweitens darf man von der Identitätsrelation nicht mehr erwarten, als sie wirklich zu leisten imstande ist. Mit ihrer Hilfe allein lassen sich z. B. Veränderungen nicht beschreiben. Trotzdem bleibt natürlich der Satz „Die Spree ist identisch mit der Spree“ logisch wahr, obwohl sich das Wasser der Spree ständig verändert. Diese ständig sich verändernde Naturerscheinung bezeichnen wir gerade mit dem Terminus „Spree“, und man kann selbstverständlich beliebig oft in der Spree baden (wenn man das Bedürfnis dazu verspürt).

11.2 Quantorenlogik mit Identität im System des natürlichen Schließens

Ergänzung zum Alphabet der klassischen Quantorenlogik:

$=$ - das konstante zweistellige Prädikat „... ist identisch mit ...“

Ergänzung zur Definition einer Prädikatformel:

Wenn i und j Individuenvariablen oder -konstanten sind, so ist $=(i,j)$ eine Prädikatformel.

Anstelle von $=(i,j)$ verwenden wir die übliche Schreibweise $i = j$. Für $\sim(i = j)$ verwenden wir in diesem Kapitel die Schreibweise $i \neq j$.

Mit der Einführung der Identitätsrelation haben wir die Ausdrucksmöglichkeiten der Quantorenlogik erweitert. Einige Beispiele mögen dies erläutern.

1. Beispiel: Wir wollen den Satz „Emil ist der klügste Student in diesem Studienjahr“ mit Hilfe der Symbolik der Quantorenlogik mit Identität ausdrücken. Wir wählen folgende Abkürzungen:
a für „Emil“;
$P(x)$ für „x ist ein Student in diesem Studienjahr“;
$R(x,y)$ für „x ist klüger als y“.
Unser Satz läßt sich dann wie folgt schreiben:
$P(a) \wedge \forall x(P(x) \wedge (x \neq a) \supset R(a,x))$.

2. Beispiel: „Außer Karl (b) und Gustav (c) ist Emil (a) der klügste Student in diesem Studienjahr.“
$P(a) \wedge \forall x(P(x) \wedge (x \neq a) \wedge (x \neq b) \wedge (x \neq c) \supset R(a,x))$.

3. Beispiel: „Es gibt genau einen Kaiser von China.“ ($P(x)$ steht für „x ist Kaiser von China“.)
$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \supset x = y))$.

In der Quantorenlogik mit Identität lassen sich auch sogenannte Anzahlaussagen ausdrücken.

4. Beispiel: „Es gibt höchstens ein Ding.“ - $\forall x \forall y(x = y)$
„Es gibt höchstens zwei Dinge.“ - $\forall x \forall y \forall z(x = y \vee x = z \vee y = z)$.

5. Beispiel: „Die Eigenschaft P trifft auf höchstens ein Ding zu.“ - $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \supset x = y)$
„Die Eigenschaft P trifft auf höchstens zwei Dinge zu.“ - $\forall x \forall y \forall z(P(x) \wedge P(y) \wedge$
$\wedge P(z) \supset x = y \vee y = z \vee x = z)$.

6. Beispiel: „Es gibt mindestens zwei Dinge.“ - $\exists x \exists y(x \neq y)$.

7. Beispiel: „Die Eigenschaft P trifft auf mindestens zwei Dinge zu.“ - $\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge$
$\wedge x \neq y)$.

8. Beispiel: „Die Eigenschaft P trifft auf genau zwei Dinge zu.“ - $\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge$
$\wedge x \neq y) \wedge \forall x \forall y \forall z(P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \supset x = y \vee y = z \vee x = z)$.

Ein vollständiges System der Quantorenlogik mit Identität erhalten wir, wenn wir im System des natürlichen Schließens zu den Grundregeln der Quantorenlogik folgendes Axiom und folgende Regel hinzufügen:

A1. $x = x$

Ersetzbarkeitsregel für Identitäten (*ERI*):

$$\frac{\begin{array}{c} i_1 = i_2 \\ A \end{array}}{A[i_1/i_2]} \,,$$

wobei i_1 und i_2 Individuenvariablen oder -konstanten sind und das Symbol $A[i_1/i_2]$ Formeln darstellt, die man aus der Formel A erhält, wenn man in ihr die Individuenkonstante i_1 bzw. die frei in ihr vorkommende Individuenvariable i_1, falls sie sich nicht im Wirkungsbereich eines Quantors befindet, der i_2 bindet, an null oder mehr Stellen ihres Vorkommens durch i_2 ersetzt.

Zu den Strukturregeln zum Aufbau von direkten oder indirekten Beweisen werden entsprechend Punkte hinzugefügt, nach denen *A1* als Beweiszeile geschrieben werden kann und nach denen wir Zeilen nach der Ersetzbarkeitsregel für Identitäten (*ERI*) zum Beweis hinzufügen können. Wir beweisen einige Theoreme:

T1. $x = y \supset y = x$

1. $x = y$	A. d. B.
2. $x = x$	(*A1*)
3. $y = x$	(*ERI*, 1., 2.)

Mit Hilfe von *T1* erhalten wir die abgeleitete Regel

$$\frac{\begin{array}{c} i_2 = i_1 \\ A \end{array}}{A[i_1/i_2]} \,,$$

die wir ebenfalls mit *ERI* abkürzen.

T2. $x = y \wedge y = z \supset x = z$

1. $x = y$	A. d. B.
2. $y = z$	A. d. B.
3. $x = z$	(*ERI*, 1., 2.)

Mit *A1*, *T1* und *T2* haben wir gezeigt, daß die Identität eine Äquivalenzrelation ist.

T3. $x = y \wedge P(x) \supset P(y)$

1. $x = y$	A. d. B.
2. $P(x)$	A. d. B.
3. $P(y)$	(*ERI*, 1., 2.)

T4. $P(x) \wedge {\sim}P(y) \supset x \neq y$

1. $P(x)$	A. d. B.
2. ${\sim}P(y)$	A. d. B.
3. $x = y$	A. d. i. B.
4. $P(y)$	(*ERI*, 1., 3.)
(Wdspr. 2., 4.)	

T5. $x = z \wedge y = z \supset x = y$ — Drittengleichheit

1. $x = z$	A. d. B.
2. $y = z$	A. d. B.
3. $x = y$	(*ERI*, 1., 2.)

T6. $P(x) \equiv \exists y(y = x \wedge P(y))$

a) 1. $P(x)$ — A. d. B.
2. $x = x$ — $(A1)$
3. $x = x \wedge P(x)$ — (EK, 1., 2.)
4. $\exists y(y = x \wedge P(y))$ — ($E\exists$, 3.)

b) 1. $\exists y(y = x \wedge P(y))$ — A. d. B.
2. $a_x = x \wedge P(a_x)$ — ($B\exists$, 1.)
3. $a_x = x$ — (BK, 2.)
4. $P(a_x)$ — (BK, 2.)
5. (Px) — (ERI, 3., 4.)

Übungen:

1. Formulieren Sie den Satz „Anton liebt nur ein Mädchen“ in der Sprache der Quantorenlogik mit Identität! Verwenden Sie folgende Abkürzungen: a für „Anton“, $P(x)$ für „x ist ein Mädchen“, $R(x, y)$ für „x liebt y“!
2. Warum ist im ersten Beispiel im Abschnitt 2 die Bedingung $(x \neq a)$ wesentlich?
3. Formulieren Sie in der Sprache der Quantorenlogik mit Identität die Aussage „Es gibt höchstens n Dinge“! Warum läßt sich auf diese Art nicht ausdrücken „Es gibt höchstens abzählbar unendlich viele Dinge“?
4. Formulieren Sie in der Sprache der Quantorenlogik mit Identität die Aussage „Die Eigenschaft P trifft auf n Dinge zu“!
5. Formulieren Sie symbolisch die Aussage „Es gibt mindestens n Dinge“!
6. Formulieren Sie symbolisch die Aussage „Die Eigenschaft P trifft auf mindestens n Dinge zu“!
7. Formulieren Sie in der Sprache der Quantorenlogik mit Identität die Aussage „Es gibt genau n Dinge“!
8. Formulieren Sie in der Sprache der Quantorenlogik mit Identität die Aussage „Die Eigenschaft P trifft auf genau einen Gegenstand zu“!
9. Formulieren und charakterisieren Sie den Unterschied zwischen dem Ersetzbarkeitstheorem der Aussagenlogik und der Regel *ERI*!
10. Beweisen Sie die abgeleitete Ersetzbarkeitsregel für Identitäten mit Hilfe von *T1*!
11. Die Formel $x = y \supset z = y$, in der x, y, z als Werte natürliche Zahlen annehmen, ist offenbar keine wahre arithmetische Aussage. Wir geben im folgenden zwei nichtkorrekte Beweise dieser Formel mit Hilfe der beiden Theoreme der Quantorenlogik mit Identität 1. $\forall x(x = x)$ und 2. $\forall x(x = y) \supset z = y$ an. Bestimmen Sie die Fehler in diesen Beweisen!

Erster nichtkorrekter Beweis:

1. $x = y$ — A. d. B.
2. $\forall x(x = x)$ — (1.)
3. $\forall x(x = y) \supset z = y$ — (2.)
4. $\forall x(x = x) \supset z = y$ — (ERI, 1., 3.)
5. $z = y$

Zweiter nichtkorrekter Beweis:

1. $x = y$ — A. d. B.
2. $\forall x(x = x)$ — (1.)

3. $\forall x(x = y) \supset z = y$ (2.)
4. $\forall x(x = y)$ (ERI, 1., 2.)
5. $z = y$ (AR, 3., 4.).

12. Beweisen Sie folgende Theoreme:

T7. $P(x) \supset \exists y(y = x)$
T8. $P(x) \equiv \forall y(y = x \supset P(y))$
T9. $\forall x(x = x)$
T10. $\forall x \forall y(x = y \supset y = x)$
T11. $\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \supset x = z)$
T12. $\forall x \forall y(\forall z(x = z \equiv y = z) \equiv x = y)$
T13. $\forall x(P(x) \equiv \exists y(x = y \land P(y)))$
T14. $\forall x(P(x) \equiv \forall y(x = y \supset P(y)))$
T15. $\forall x \forall y(x = y \supset (P(x) \equiv P(y)))$
T16. $\forall x \forall y((P(x) \land x = y) \equiv (P(y) \land x = y))$
T17. $\exists x \forall y(P(y) \equiv y = x) \equiv (\exists x P(x) \land \forall x \forall y((P(x) \land P(y)) \supset x = y))$
T18. $\forall x \exists y(y \neq x \land P(y)) \equiv \exists x \exists y(x \neq y \land (P(x) \land P(y)))$
T19. $(\forall x \exists y R(x, y) \land \forall x {\sim} R(x, x)) \supset \forall x \exists y(x \neq y \land R(x, y))$
T20. $\exists x \forall y(y \neq x \supset P(y)) \equiv \forall x \forall y(x \neq y \supset (P(x) \lor P(y)))$
T21. $\exists y \forall x(x = y) \supset (\forall x P(x) \lor \forall x {\sim} P(x))$
T22. $\forall x \forall y \forall z(x = y \lor x = z \lor y = z) \supset (\forall x P(x) \lor \forall x(P(x) \supset Q(x)) \lor \forall x(P(x) \supset {\sim} Q(x)))$

13. Übersetzen Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen in die Sprache der klassischen Quantorenlogik mit Identität! Vergleichen Sie dazu die Ausführungen in Kap. 8, Abschnitt 1, Kap. 9, Abschnitt 1 sowie Kap. 10, Abschnitt 6! Verwenden Sie zur Übersetzung von All- und Partikuläraussagen die folgende auf Gottlob Frege zurückgehende Übersetzungsvorschrift! Wählen Sie eine passende Symbolik!

01. „Alle A sind B." - $\forall x(A(x) \supset B(x))$
02. „Kein A ist B." - $\forall x(A(x) \supset {\sim} B(x))$
03. „Einige A sind B." - $\exists x(A(x) \land B(x))$
04. „Einige A sind nicht B." - $\exists x(A(x) \land {\sim} B(x))$

- Sokrates ist weise.
- Sokrates läuft.
- Sokrates ist ein Philosoph.
- Sokrates ist der Lehrer von Plato.
- Otto liebt Hedwig.
- Otto und Hedwig lieben sich.
- Otto liebt ein Mädchen.
- Alle Fische leben im Wasser.
- Kein Pinguin kann fliegen.
- Einige Vögel können nicht fliegen.
- Einige Wassertiere sind keine Fische.
- Jeder Junge liebt ein Mädchen.
- Jeder Mensch hat genau eine Mutter.
- Für zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte gibt es einen Punkt, der zwischen ihnen liegt.
- Wenn zwei Strecken mit einer dritten gleich sind, so sind sie auch untereinander gleich.

- Höchstens drei Mannschaften erhalten eine Medaille.
- Genau zwei Mannschaften erreichen das Endspiel.

14. Welche Schlußfolgerung läßt sich aus den folgenden Prämissen ableiten?
    - Jeder Junge liebt nur ein Mädchen.
    - Fritz und Anton sind Jungen.
    - Paula ist ein Mädchen.
    - Fritz liebt Paula.
    - Anton liebt alle Mädchen, die Fritz liebt.

11.3 Existenzbelastung der Quantorenlogik mit Identität

In Abschnitt 7 des zehnten Kapitels haben wir nachgewiesen, daß die Theoreme (Tautologien) der Quantorenlogik ohne Identität nicht existentiell belastet sind. Außerdem haben wir die generelle Forderung aufgestellt, daß logische Theoreme nicht existentiell belastet sein dürfen. Wie verhält es sich in dieser Hinsicht mit den Theoremen der Quantorenlogik mit Identität?

Die Identität ist eine zweistellige Relation, und eine Aussage der Form $x = y$ ist existentiell belastet. Bei der Darstellung der Quantorenlogik mit Identität im System des natürlichen Schließens haben wir neben der Ersetzbarkeitsregel für Identitäten $x = x$ als Axiom gesetzt. $x = x$ ist aber existentiell belastet und deshalb nicht logisch wahr. Eine Aussage $x = x$ ist nur wahr, wenn der Terminus x nicht leer ist. Diese Erkenntnis findet sich schon bei Russell. Er schreibt: „Daneben gibt es viele Aussagen, die mit Hilfe logischer Terme ausgedrückt werden können, aber in der Logik nicht bewiesen werden können und daher keine Aussagen der Logik sind. Nehmen wir z. B. die Aussage ‚Es gibt wenigstens ein Ding in der Welt'. Sie läßt sich mit Hilfe logischer Terme ausdrücken, so daß sie, wenn man will, besagt, daß die Aussagefunktion ‚$x = x$' möglich ist. Sie ist also eine Aussage, die mit Hilfe logischer Terme ausgedrückt werden kann, aber man kann nicht aus logischen Gründen wissen, ob sie wahr oder falsch ist. Weiß man es, dann weiß man es aus empirischen Gründen, denn es könnte auch sein, daß es kein Universum gibt, so daß die Aussage nicht wahr wäre." (Russell 1979, S. 237)

Betrachten wir einige andere Darstellungen der Quantorenlogik mit Identität.
Church gibt folgende Ergänzungen an (Church 1956):

1. $x = x$
2. $x = y \wedge P(x) \supset P(y)$.

Die Formel 2 ist im Unterschied zu 1 nicht existentiell belastet.
Hao Wang gibt folgende Ergänzung an (Quine 1980, S. 13):

$$P(y) \equiv \exists x(x = y \wedge P(x)).$$

Diese Formel ist nicht existentiell belastet und akzeptabel. Bei Beweisen in diesem System werden aber Fehler gemacht, durch die sich schnell existentiell belastete Formeln einschleichen.

So wird etwa $y = y$ wie folgt bewiesen. In dem Axiom wird für $P(...)$ das Prädikat $\sim(... = y)$ eingesetzt, und man erhält:

$$\sim(y = y) \equiv \exists x(x = y \wedge \sim x = y).$$

Da $\sim\exists x(x = y \wedge \sim x = y)$ beweisbar ist, schließt man auf das existentiell belastete $y = y$.

Die angegebene Einsetzung ist logisch nicht korrekt, da sie von einer existentiell nicht belasteten Formel zu einer existentiell belasteten führt. Die Einsetzungsregel für Prädikatenvariablen muß so eingeschränkt werden, daß für e-Formeln nur e-Formeln und für n-Formeln nur n-Formeln eingesetzt werden dürfen.

Ausführlich werden in Lorenz 1982, Schirn 1975 und Griffin 1977 die philosophischen Schwierigkeiten der Leibnizschen Identitätsdefinition erörtert. Viele dieser Probleme lassen sich im Rahmen der hier vorgetragenen Konzeption lösen. Leibniz definiert die Identität wie folgt: „Definition 1. Dasselbe ist das, wovon das eine für das andere eingesetzt werden kann bei bleibendem Wahrheitsattribut. Wenn da A und B sind und A geht in irgendeinen wahren Satz ein und, indem man darin an irgendeiner Stelle für A B einsetzt, ein neuer Satz entsteht und dieser ebenso wahr ist (und dies in jedem solchen Satze immer zutrifft), sagt man, A und B seien dieselben; und wenn A und B dieselben sind, wird umgekehrt die Substitution stattfinden, wie ich sie genannt habe. Dieselben werden auch ‚Zusammenfallende' genannt; manchmal nennt man auch A und A ‚dasselbe', während A und B, wenn sie dieselben sind, ‚zusammenfallend' heißen.
Definition 2. Verschieden ist, was nicht dasselbe ist oder wobei die Substitution manchmal nicht zutrifft." (Leibniz 1960, S. 315)

Später erhielt diese Definition folgende symbolische Fassung:

$$x = y \equiv_{Def} \forall P(P(x) \equiv P(y)).$$

Diese Definition ist nicht korrekt, da die Bisubjunktion

$$x = y \equiv \forall P(P(x) \equiv P(y))$$

existentiell belastet und damit nicht logisch wahr ist. Hier hat Peirce recht, wenn er schreibt: „Leibniz's Prinzip der Ununterscheidbaren ist gänzlich Unsinn. Ohne Zweifel sind alle Dinge voneinander unterschieden; aber dafür gibt es keine logische Notwendigkeit." (Ch. S. Peirce, Collected Papers, I-VI, Cambridge/Mass. 1931-1935, 4.311; zitiert nach Lorenz 1982, Bd.1, S. 98) Das hindert ihn allerdings nicht, an anderer Stelle die Formel

$$x = y \equiv \forall P(P(x) \wedge P(y) \vee {\sim}P(x) \wedge {\sim}P(y))$$

zu setzen (ebenda, 3.398), die gleichfalls existentiell belastet und deshalb nicht logisch wahr ist.

In der Literatur wird zwischen dem Prinzip der Identität der Ununterscheidbaren

$$\forall x \forall y \forall P((P(x) \equiv P(y)) \supset x = y)$$

und dem Prinzip der Ununterscheidbarkeit von Identischen (auch *Substitutionsprinzip* genannt)

$$\forall x \forall y(x = y \supset \forall P(P(x) \equiv P(y)))$$

unterschieden. Das erste ist existentiell belastet und darum nicht logisch wahr, das zweite ist nicht existentiell belastet und akzeptabel. In Wessel 1987, 1988 war bei der Behandlung der Problematik vager Prädikate im Rahmen der nichttraditionellen Prädikationstheorie aufgefallen, daß das Leibnizsche Prinzip der Identität der Ununterscheidbaren nicht gilt, da in der nichttraditionellen Prädikationstheorie die Formeln $P(x) \equiv P(y)$ und $\neg P(x) \equiv \neg P(y)$ nicht äquivalent sind. Wir meinten damals, daß es im Rahmen der nichttraditionellen Prädikationstheorie nicht ausreichend sei, wenn x und y die gleichen Prädikate zukommen müssen, um sie als identisch anzusehen, sondern es müßten ihnen auch die gleichen Prädikate abgesprochen werden. Deshalb wurde eine strenge Identität wie folgt definiert:

$$x = y \equiv_{Def} \forall P((P(x) \equiv P(y)) \wedge (\neg P(x) \equiv \neg P(y))).$$

Diese Definition ist nicht mehr aufrechtzuerhalten, da die entsprechende Bisubjunktion existentiell belastet ist.

Die Quantorenlogik mit Identität, wie sie gewöhnlich dargestellt wird, ist keine logische Theorie, da sie existentielle Voraussetzungen hat. Es handelt sich bei ihr um ein Teilstück einer Ontologie oder - um mit Heinrich Scholz zu reden - um „Metaphysik als strenge Wissenschaft" (vgl. Scholz 1941).

In der logischen Terminitheorie werden wir die Identität mit Hilfe der Bezeichnungsrelation definieren.

11.4 Unterscheidbarkeit und Ununterscheidbarkeit

Im Rahmen der nichttraditionellen Prädikationstheorie (*NTP*) lassen sich einige Begriffe einführen, die der Klärung der Identitätsproblematik dienen. Es ist zu vermuten, daß die hier vorgeschlagenen Begriffe auch dazu beitragen können, die im Rahmen der Philosophie der Quantenmechanik diskutierte Identitätsproblematik zu erhellen (vgl. Dalla Chiara 1991, Wessel 1994b).

Schwache Unterscheidbarkeit:

D1. $x \parallel y \equiv_{Def} E(x) \wedge E(y) \wedge \exists P(P(x) \wedge {\sim}P(y) \vee {\sim}P(x) \wedge P(y))$

Hierbei ist zu beachten, daß ${\sim}P(y) \equiv \neg P(y) \vee ?P(y)$ und ${\sim}P(x) \equiv \neg P(x) \vee ?P(x)$. Bei *D1* und allen folgenden Definitionen wurde die Regel *R9* aus Abschnitt 7 des zehnten Kapitels beachtet, d. h., die entsprechenden Bisubjunktionen sind nicht existentiell belastet.

T1. $x \parallel y \equiv E(x) \wedge E(y) \wedge \exists P(P(x) \wedge {\sim}P(y) \vee {\sim}P(x) \wedge P(y))$ (*D1*)
T2. ${\sim}(x \parallel y) \equiv {\sim}E(x) \vee {\sim}E(y) \vee {\sim}\exists P(P(x) \wedge {\sim}P(y) \vee {\sim}P(x) \wedge P(y))$ (*T1*, *AL*)
T3. ${\sim}(x \parallel y) \equiv {\sim}E(x) \vee {\sim}E(y) \vee \forall P(P(x) \equiv P(y))$ (*T2*, *QL*)
T4. ${\sim}(x \parallel x)$

Beweis: Wir setzen in *T1* x für y ein und erhalten:

1. $x \parallel x \equiv E(x) \wedge \exists P(P(x) \wedge {\sim}P(x) \vee {\sim}P(x) \wedge P(x))$
2. ${\sim}\exists P(P(x) \wedge {\sim}P(x) \vee {\sim}P(x) \wedge P(x))$ (*QL*)
3. ${\sim}E(x) \vee {\sim}\exists P(P(x) \wedge {\sim}P(x) \vee {\sim}P(x) \wedge P(x))$ (2., *AL*)
4. ${\sim}(E(x) \wedge \exists P(P(x) \wedge {\sim}P(x) \vee {\sim}P(x) \wedge P(x))$ (3., *AL*)
5. ${\sim}(x \parallel x)$ (1., 4., *AL*)

T5. $x \parallel y \supset y \parallel x$

1. $x \parallel y$ A. d. B.
2. $E(x)$ (1., *T1*, *AL*)
3. $E(y)$ (1., *T1*, *AL*)
4. $\exists P(P(x) \wedge {\sim}P(y) \vee {\sim}P(x) \wedge P(y))$ (1., *T1*, *AL*)
5. $\exists P(P(y) \wedge {\sim}P(x) \vee {\sim}P(y) \wedge P(x))$ (4., *QL*)
6. $E(y) \wedge E(x) \wedge \exists P(P(y) \wedge {\sim}P(x) \vee {\sim}P(y) \wedge P(x))$ (2., 3., 5.)
7. $y \parallel x$ (6., *T1*)

T6. ${\sim}(x \parallel y) \supset {\sim}(y \parallel x)$ (*T5*, *AL*)
T7. ${\sim}E(x) \supset {\sim}(x \parallel y)$ (*T3*, *AL*)
T8. ${\sim}E(y) \supset {\sim}(x \parallel y)$ (*T3*, *AL*)
T9. $\forall P(P(x) \equiv P(y)) \supset {\sim}(x \parallel y)$ (*T3*, *AL*)
T10. ${\sim}E(x) \vee {\sim}E(y) \supset {\sim}(x \parallel y)$ (*T3*, *AL*)

Es ist leicht zu sehen, daß die Relation ... $\|$ ... nicht transitiv ist. Setzen wir in $x \parallel y \wedge \wedge y \parallel z \supset x \parallel z$ x für z ein, so erhalten wir $x \parallel y \wedge y \parallel x \supset x \parallel x$. Hier ist das Antezedent erfüllbar, das Konsequent nicht. Die Relation der schwachen Unterscheidbarkeit ist also irreflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.

Auch die äußere Negation der Relation der schwachen Unterscheidbarkeit $\sim$(... $\|$ ...) ist nicht transitiv, denn die drei Formeln $\sim(x \parallel y)$, $\sim(y \parallel z)$ und $(x \parallel z)$ sind gemeinsam erfüllbar. Wir brauchen nur anzunehmen, daß $(x \parallel z)$ und $\sim E(y)$ gelten.

Hingegen gilt die folgende abgeschwächte Version der Transitivität der äußeren Negation der schwachen Unterscheidbarkeit:

T11. $E(y) \supset (\sim x \parallel y \wedge \sim y \parallel z \supset \sim x \parallel z)$

Beweis:

1.	$E(y)$	A. d. B.
2.	$\sim x \parallel y$	A. d. B.
3.	$\sim y \parallel z$	A. d. B.
4.	$x \parallel z$	A. d. i. B.
5.	$E(x)$	(4., *T1*, *AL*)
6.	$\exists P(P(x) \wedge \sim P(y) \vee \sim P(x) \wedge P(y))$	(4., *T1*, *AL*)
7.	$\sim E(x) \vee \sim E(y) \vee \forall P(P(x) \equiv P(y))$	(2., *T3*, *AL*)
1.1.	$\sim E(x)$	(verzweigter Beweis, 7.)
	(Wdspr. 1.1., 5.)	
2.1.	$\sim E(y)$	(verzweigter Beweis, 7.)
	(Wdspr. 2.1., 1.)	
3.1.	$\forall P(P(x) \equiv P(y))$	(verzweigter Beweis, 7.)
3.2.	$P'(x) \wedge \sim P'(y) \vee \sim P'(x) \wedge P'(y)$	($B\exists$, 6. (P' ist ein konstantes Prädikat))
3.3.	$P'(x) \equiv P'(y)$	($B\forall$, 3.1.)
1.1.1.	$P'(x) \wedge \sim P'(y)$	(verzweigter Beweis, 3.2.)
1.1.2.	$P'(x)$	(*BK*, 1.1.1.)
1.1.3.	$\sim P'(y)$	(*BK*, 1.1.1.)
1.1.4.	$\sim P'(x)$	(*AL*, 1.1.3., 3.3.)
	(Wdspr. 1.1.2., 1.1.4.)	
2.1.1.	$\sim P'(x) \wedge P'(y)$	(verzweigter Beweis, 3.2.)
2.1.2.	$\sim P'(x)$	(*BK*, 2.1.1.)
2.1.3.	$P'(y)$	(*BK*, 2.1.1.)
2.1.4.	$\sim P'(y)$	(*AL*, 2.1.3., 3.3.)
	(Wdspr. 2.1.3., 2.1.4.)	

Strenge Ununterscheidbarkeit:

D2. $\neg(x \parallel y) \equiv_{Def} E(x) \wedge E(y) \wedge \sim(x \parallel y)$

T12. $\neg(x \parallel y) \equiv E(x) \wedge E(y) \wedge \sim(x \parallel y)$ (*D2*)
T13. $\sim\neg(x \parallel y) \equiv \sim E(x) \vee \sim E(y) \vee (x \parallel y)$ (*T12*, *AL*)
T14. $E(x) \equiv \neg(x \parallel x)$ (*T12*, *T4*, *AL*)
T15. $E(x) \supset \neg(x \parallel x)$ (*E*-Reflexivität der Relation $\neg$(... $\|$ ...), *T14*)
T16. $\neg(x \parallel x) \supset E(x)$ (*T14*)

T17. $\sim E(x) \equiv \sim\neg(x \parallel x)$ $(T14)$

T18. $\neg(x \parallel y) \supset \neg(y \parallel x)$

1. $\neg(x \parallel y)$ A. d. B.
2. $E(x)$ (1., *T12*, *AL*)
3. $E(y)$ (1., *T12*, *AL*)
4. $\sim(x \parallel y)$ (1., *T12*, *AL*)
5. $\sim(y \parallel x)$ (4., *T6*)
6. $\neg(y \parallel x)$ (3., 2., 5., *T12*)

T19. $\neg(x \parallel y) \wedge \neg(y \parallel z) \supset \neg(x \parallel z)$

1. $\neg(x \parallel y)$ A. d. B.
2. $\neg(y \parallel z)$ A. d. B.
3. $E(x)$ (1., *T12*)
4. $E(y)$ (1., *T12*)
5. $E(z)$ (2., *T12*)
6. $\sim(x \parallel y)$ (1., *T12*)
7. $\sim(y \parallel z)$ (2., *T12*)
8. $\sim E(x) \vee \sim E(y) \vee \forall P(P(x) \equiv P(y))$ (1., *T2*)
9. $\sim E(y) \vee \sim E(z) \vee \forall P(P(y) \equiv P(z))$ (2., *T2*)
10. $\forall P(P(x) \equiv P(y))$ (8., 3., 4.)
11. $\forall P(P(y) \equiv P(z))$ (9., 4., 5.)
12. $\forall P(P(x) \equiv P(z))$ (10., 11., *QL*)
13. $E(x) \wedge E(z) \wedge \forall P(P(x) \equiv P(z))$ (3., 5., 12.)
14. $\sim(x \parallel z)$ (13., *T3*)
15. $\neg(x \parallel z)$ (3., 5., 14., *T12*)

T20. $\sim\neg(x \parallel y) \supset \sim\neg(y \parallel x)$ $(T18)$

Die Relation der strengen Ununterscheidbarkeit ist also E-reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die äußere Negation der Relation der strengen Ununterscheidbarkeit ist nicht transitiv, denn die drei Formeln $\sim\neg(x \parallel y)$, $\sim\neg(y \parallel z)$ und $\neg(x \parallel z)$ sind gemeinsam erfüllbar. Wir brauchen nur anzunehmen, daß $\neg(x \parallel z)$ und $\sim E(y)$ gelten.

Strenge Unterscheidbarkeit:

D3. $x \mid y \equiv_{Def} \exists P(P(x) \wedge \neg P(y) \vee \neg P(x) \wedge P(y))$

T21. $x \mid y \equiv \exists P(P(x) \wedge \neg P(y) \vee \neg P(x) \wedge P(y))$ $(D3)$

T22. $\sim(x \mid y) \equiv \sim\exists P(P(x) \wedge \neg P(y) \vee \neg P(x) \wedge P(y))$ (*T21*, *AL*)

T23. $\sim(x \mid y) \equiv \forall P((\sim P(x) \vee \sim\neg P(y)) \wedge (\sim\neg P(x) \vee \sim P(y)))$ (*T22*, *QL*)

T24. $\sim(x \mid x)$ (*T22*, *NTP*, *QL*)

T25. $x \mid y \supset y \mid x$

1. $x \mid y$ A. d. B.
2. $\exists P(P(x) \wedge \neg P(y) \vee \neg P(x) \wedge P(y))$ (1., *T21*)
3. $P'(x) \wedge \neg P'(y) \vee \neg P'(x) \wedge P'(y)$ (2., $B\exists$)
4. $P'(y) \wedge \neg P'(x) \vee \neg P'(y) \wedge P'(x)$ (3., *AL*)
5. $\exists P(P(y) \wedge \neg P(x) \vee \neg P(y) \wedge P(x))$ (4., $E\exists$)
6. $y \mid x$ (5., *T21*)

T26. $\sim(x \mid y) \supset \sim(y \mid x)$ (*T25*)

Die Relation der strengen Unterscheidbarkeit ist nicht transitiv, denn setzen wir in $x \mid y \wedge \wedge y \mid z \supset x \mid z$ x für z ein, so erhalten wir $x \mid y \wedge y \mid x \supset x \mid x$. Hier ist das Antezedent erfüllbar, das Konsequent aber nicht (*T24*). Auch die äußere Negation der Relation der strengen Unterscheidbarkeit $\sim(... \mid ...)$ ist nicht transitiv, d. h., es gilt nicht $\sim(x \mid y) \wedge \sim(y \mid z) \supset \sim(x \mid z)$. Die drei Formeln $\sim(x \mid y)$, $\sim(y \mid z)$ und $(x \mid z)$ sind gemeinsam erfüllbar.

Um dies zu zeigen, wähle ich einen Individuenbereich mit drei paarweise verschiedenen Individuenkonstanten a, b, c, wobei gelten soll $\sim E(b)$. Wegen $x \mid y \supset E(x) \wedge E(y)$ gelten insbesondere $\sim E(y) \supset \sim x \mid y$ und $\sim E(x) \supset \sim x \mid y$. Wegen $\sim E(b)$ gilt also $\sim a \mid b \wedge \sim b \mid c$. Ich wähle ein konstantes Prädikat P' mit folgenden Wertzuschreibungen $P'(a) = v$, $\neg P'(a) = f$, $P'(b) = \neg P'(b) = f$. Dann gilt mit *T23* $a \mid c$. Bei dieser Interpretation sind die drei Formeln $\sim(x \mid y)$, $\sim(y \mid z)$ und $(x \mid z)$ gemeinsam erfüllbar. Hingegen gilt die folgende abgeschwächte Version der Transitivität der äußeren Negation der strengen Unterscheidbarkeit:

T27. $E(y) \supset (\sim x \mid y \wedge \sim y \mid z \supset \sim x \mid z)$

Im folgenden Beweis von *T27* sei P' ein beliebiges konstantes Prädikat und Q' sei wie folgt definiert:

D0. $Q'(x) \equiv_{Def} E(x) \wedge \sim\neg P'(x)$
$\neg Q'(x) \equiv_{Def} \neg P'(x)$.

Beweis:

1.	$E(y)$	A. d. B.
2.	$\sim x \mid y$	A. d. B.
3.	$\sim y \mid z$	A. d. B.
4.	$x \mid z$	A. d. i. B.
5.	$\exists P(P(x) \wedge \neg P(z) \vee \neg P(x) \wedge P(z))$	(*D3*, 4.)
6.	$\forall P((\sim P(x) \vee \sim\neg P(y)) \wedge (\sim\neg P(x) \vee \sim P(y)))$	(*T23*, 2.)
7.	$\forall P((\sim P(y) \vee \sim\neg P(z)) \wedge (\sim\neg P(y) \vee \sim P(z)))$	(*T22*, 3.)
8.	$P'(x) \wedge \neg P'(z) \vee \neg P'(x) \wedge P'(z)$	($B\exists$, 5.)
1.1.	$P'(x) \wedge \neg P'(z)$	(z. A., 8.)
1.2.	$P'(x)$	
1.3.	$\neg P'(z)$	
1.4.	$\neg Q'(z)$	(1., 3., *D0*)
1.5.	$(\sim P'(x) \vee \sim\neg P'(y)) \wedge (\sim\neg P'(x) \vee \sim P'(y))$	($B\forall$, 6.)
1.6.	$\sim\neg P'(y)$	(1., 5., 1.2., *AL*)
1.7.	$E(y) \wedge \sim\neg P'(y)$	(*EK*, 1., 1.6.)
1.8.	$Q'(y)$	(*D0*, 1., 7.)
1.9.	$(\sim Q'(y) \vee \sim\neg Q'(z)) \wedge (\sim\neg Q'(y) \vee \sim Q'(z)))$	($B\forall$, 7.)
1.10.	$\sim\neg Q'(z)$	(1.9., 1.8., *AL*)
	(Wdspr. 1.4., 1.10.)	
2.1.	$\neg P'(x) \wedge P'(z)$	(z. A., 8.)
2.2.	$\neg P'(x)$	
2.3.	$P'(z)$	
2.4.	$\neg Q'(x)$	(2.2., *D0*)
2.5.	$(\sim P'(y) \vee \sim\neg P'(z)) \wedge (\sim\neg P'(y) \vee \sim P'(z))$	($B\forall$, 7.)

2.6. $\sim\neg P'(y)$ (2.5., 2.3., *AL*)
2.7. $E(y) \wedge \sim\neg P'(y)$ (*EK*, 1., 2.6.)
2.8. $Q'(y)$ (2.7., *D0*)
2.9. $(\sim Q'(x) \vee \sim\neg Q'(y)) \wedge (\sim\neg Q'(x) \vee \sim Q'(y))$ ($B\forall$, 6.)
2.10. $\sim\neg Q'(y)$ (2.9., 2.8., *AL*)
(Wdspr. 1.4., 1.10.)

Schwache Ununterscheidbarkeit:

D4. $\neg(x \mid y) \equiv_{Def} E(x) \wedge E(y) \wedge \sim(x \mid y)$

T28. $\neg(x \mid y) \equiv E(x) \wedge E(y) \wedge (x \mid y) \equiv_{Def} E(x) \wedge E(y)$ (*D4*)
T29. $\sim\neg(x \mid y) \equiv \sim E(x) \vee \sim E(y) \vee (x \mid y)$ (*T28*, *AL*)
T30. $E(x) \equiv \neg(x \mid x)$ (*T28*, *T24*, *AL*)
T31. $\neg(x \mid y) \supset \neg(y \mid x)$ (*T28*, *T26*, *AL*)
T32. $\neg(x \mid y) \wedge \neg(y \mid z) \supset \neg(x \mid z)$ (*D4*, *T27*)
T33. $x \mid y \supset x \parallel y$ (*T21*, *T1*, *QL*, *NTP*)

Die Umkehrung von *T33* gilt nicht.

T34. $\sim(x \parallel y) \supset \sim(x \mid y)$ (*T33*, *AL*)
T35. $\neg(x \parallel y) \supset \neg(x \mid y)$ (*T12*, *T28*)

Die Umkehrung von *T35* gilt nicht.

T36. $\neg(x \parallel y) \supset \sim(x \parallel y)$ (*NTP*)
T37. $\neg(x \mid y) \supset \sim(x \mid y)$ (*NTP*)
T38. $\sim\neg(x \mid y) \supset \sim\neg(x \parallel y)$ (*T33*)
T39. $(x \parallel y) \supset \sim\neg(x \parallel y)$ (*T36*)
T40. $(x \mid y) \supset \sim\neg(x \mid y)$ (*T37*)

Wir kommen später in der Terminitheorie auf die hier vorgeschlagenen Begriffe zurück und zeigen ihren Zusammenhang zum Identitätsbegriff.

12. Kapitel
Intuitionistische und konstruktive Logik

12.1 Intuitionismus und Konstruktivismus als Richtungen in den Grundlagen der Mathematik

Die intuitionistische und die konstruktive Logik wurden von Mathematikern aufgebaut, die im Grundlagenstreit der Mathematik die philosophischen Richtungen des Intuitionismus und Konstruktivismus vertreten. Der *Intuitionismus* entstand als eine philosophische und mathematische Richtung der Mathematik und Logik Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts vor allem als eine Reaktion auf die Mengenlehre G. Cantors. Einer der grundlegenden Begriffe dieser Lehre ist der Begriff der *aktualen Unendlichkeit*, der auch zu einem Eckpfeiler der modernen mengentheoretisch orientierten klassischen Logik und Mathematik wurde. Unter einer *aktual unendlichen Menge* versteht man dabei eine Menge, die unendlich ist und gleichzeitig abgeschlossen vorliegt. Der russische Mathematiker W. Uspenski charakterisiert das Aktual-Unendliche folgendermaßen: „Die Abstraktion der aktualen Unendlichkeit besteht darin, daß vom Unvollendetsein und vom Unvollendbarsein des Erzeugungsprozesses einer unendlichen Menge, von der Unmöglichkeit, eine solche Menge durch ein vollständiges Verzeichnis ihrer Elemente anzugeben, abgesehen wird (in diesem Sinne besteht die Abstraktion der aktualen Unendlichkeit im Abstrahieren von der ‚Unendlichkeit' der Menge).“ (Uspenski 1960, S. 16) Der Begriff des aktual Unendlichen wird von den Intuitionisten und Konstruktivisten, doch nicht nur von ihnen, abgelehnt. Die gesamte Mathematik und Philosophie der Antike kam ohne diesen Begriff aus, und man verwendete nur den Begriff der potentiellen Unendlichkeit, der die Möglichkeit ausdrückt, einen Prozeß ohne Ende immer weiter fortzusetzen, da es keine zwingenden Gründe gibt, ihn abzubrechen. Von diesem endlos „Immer-weiter-konstruieren“, „Immer-mehr-erkennen“, „Immer-weiterzählen“ usw. wird aber beim Begriff des Aktual-Unendlichen gerade abgesehen.

Im Mittelalter spielte das Problem des Unendlichen vor allem in der Theologie eine Rolle, Gott werden sowohl die Eigenschaften der Aktualität als auch der Unendlichkeit zugeschrieben. Diese Auffassung Gottes als aktuale Unendlichkeit findet man beispielsweise bei A. Magnus und bei Th. v. Aquino. Am Ausgang des Mittelalters vertritt am ausgeprägtesten N. Cusanus den Unendlichkeitsgedanken. Ziel der menschlichen Erkenntnis sei das Erkennen Gottes. Gott sei aber das Unendliche, und zwar das unendlich Große und das unendlich Kleine. Der Erkenntnis Gottes komme man daher am nächsten, wenn man den Übergang vom Endlichen zum Unendlichen vollziehe. Diesen Übergang erläutert Cusanus anhand von Beispielen aus der Mathematik. Läßt man eine Seite eines Dreiecks unbeschränkt wachsen, so wachsen auch die beiden anderen Seiten und fallen im Unendlichen zu einer Geraden zusammen. Vergrößert man den Durchmesser eines Kreises bis ins Unendliche, so fällt die Kreislinie mit der Geraden zusammen. Ebenso wie im Kreis mit unendlichem Durchmesser Umfang und Durchmesser zusammenfallen, so fällt in Gott alles zusammen. Gott ist aktuale Unendlichkeit, Anfang von allem, alles durchdringend und alles erfassend.

Bei Cusanus sehen wir, wie eng verwoben philosophischer und mathematischer Unendlichkeitsbegriff waren. Seine metaphysischen Spekulationen führen ihn zu mathematischen Spekulationen, zu den Anfängen von Grenzbetrachtungen, die später über J. Kepler und B. Cavalieri zur Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz führen. So wie Cusanus die Unendlichkeitsproblematik von der Theologie auf die Mathematik verlagert, so wird später in der Naturphilosophie G. Brunos und im Pantheismus B. Spinozas die aktuale Unendlichkeit Gottes auf die Welt übertragen.

Der Zusammenhang zwischen der theologischen Auffassung von der aktualen Unendlichkeit Gottes und dem mathematischen Begriff der aktualen Unendlichkeit ist auch noch bei dem Begründer der Mengenlehre, G. Cantor, sichtbar. Cantor unterscheidet das Aktual-Unendliche in drei Beziehungen: „Erstens sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, in Deo realisiert ist, wo ich es Absolut-Unendliches oder kurzweg Absolutes nenne; zweitens sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; drittens sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken in abstracto aufgefaßt werden kann. In den beiden letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und insofern dem Endlichen verwandtes Aktual-Unendliches sich darstellt, nenne ich es Transfinitum und setze es dem Absoluten strengstens entgegen." (Cantor 1966, S. 378) Cantor besteht ausdrücklich auf der metaphysischen Bedeutung seiner Lehre vom Transfiniten, und er besitzt engen Kontakt zu dem katholischen Philosophen C. Gutberlet, der in seiner Schrift „Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet" (1878) das Aktual-Unendliche verteidigt.

Seit dem Ausgang des Mittelalters gab es stets Wissenschaftler und Philosophen, die sich gegen eine Verwendung des Begriffes des Aktual-Unendlichen aussprachen. Zu ihnen gehören so bekannte Mathematiker wie R. Descartes, C. F. Gauß und L. Kronecker, aber auch bedeutende Philosophen wie I. Kant und Th. Hobbes. Auch K. Marx verwendet den Terminus „unendlich" immer im Sinne von „potentiell-unendlich".

Wir sehen, daß die Ablehnung des Begriffes der aktualen Unendlichkeit keine spezifische Besonderheit der Intuitionisten ist. Charakteristisch für die Intuitionisten ist der Grund für die Ablehnung dieses Begriffs, der sich aus ihrem Gesamtverständnis der Mathematik ergibt. Für sie ist Mathematik gedankliche Konstruktion. A. Heyting schreibt beispielsweise: „Intuitionistische Mathematik besteht aus gedanklichen Konstruktionen; ein mathematischer Satz drückt eine rein empirische Tatsache aus, nämlich das Ergebnis einer solchen Konstruktion ‚$2+2=3+1$' muß gelesen werden als Abkürzung für die Feststellung: ‚Ich habe die mit ‚$2+2$' und ‚$3+1$' beschriebenen gedanklichen Konstruktionen ausgeführt und gefunden, daß sie zu demselben Resultat führen." (zit. nach Enzensberger 1967, S. 67)

H. Poincaré, einer der Vorläufer und Wegbereiter des Intuitionismus, charakterisiert die verschiedenen Auffassungen der Mathematik der Anhänger der Cantorschen Mengenlehre und der Intuitionisten, die er Pragmatiker nennt, auf folgende Weise: „Die Pragmatiker stellen sich auf den Standpunkt der Erstreckung (extension), die Cantorianer auf den Standpunkt der Erfassung (compréhension). Handelt es sich um eine endliche Menge, so kann dieser Unterschied nur vom Standpunkt der formalen Logik von Interesse sein: aber es scheint, daß er tiefere Bedeutung hat, was die unendlichen Mengen anlangt. Stellt man sich auf den Standpunkt der Erstreckung, so besteht eine Menge aus der allmählichen Aneinanderreihung neuer Glieder. Wir können durch Verbindung der alten Glieder neue Glieder bilden, mit Hilfe dieser wieder neue Glieder und wenn die Menge unendlich ist, so ist es darum, weil keine Ursache vorliegt, diesen Vorgang abzubrechen. Vom Standpunkt der Erfassung dagegen gehen wir von einer Menge aus, in der alle Dinge bereits vor unserer Überlegung bestehen. Sie erscheinen uns anfangs als ununterschieden. Wir legen aber gewisse unter ihnen fest, um sie wieder erkennen zu können, indem wir sie mit Aufschriften versehen oder in Fächer einordnen. Die Gegenstände aber sind früher da als die Aufschriften und die Menge selbst würde bestehen, selbst wenn es niemanden gäbe, der es unternähme, sie zu ordnen." (Poincaré 1913, S. 149/150) Und an anderer Stelle charakterisiert er die Cantorianer zutreffend: „Aber die Cantorianer sind Realisten selbst in bezug auf die mathematischen Größen. Diese Größen scheinen ihnen eine unabhängige Existenz zu besitzen. Sie schaffen die Geometrie nicht, sie entdecken sie. Diese Objekte existieren sozusagen ohne zu existieren, da sie sich zu reinen Essentien verflüchtigen. Da nun naturgemäß die Anzahl dieser Objekte unbeschränkt ist, so sind die Anhänger des mathematischen Realismus noch in viel höherem Maße Infinitisten als die Idealisten. Ihre Unendlichkeit ist nicht reine Folgerung, da sie vor dem Geiste, der sie entdeckte, Existenz besaß. Ob sie sie bejahen oder verneinen, sie sind gezwungen, an die wirkliche Unendlichkeit zu glauben.“ (Poincaré 1913, S. 162)

Die Intuitionisten lehnen nicht nur den Begriff der aktualen Unendlichkeit ab, sondern sie glauben auch, die Gesetze der Logik einschränken zu müssen, um die in der Cantorschen Mengenlehre auftretenden Antinomien zu vermeiden. Sie sind der Auffassung, daß die Gesetze und Regeln der Logik nicht universal gültig sind und daß es bereichsspezifische Logiken gibt. Unserer Auffassung nach ist dieses Logikverständnis der Intuitionisten falsch. Wir verschieben jedoch unsere kritische Einschätzung dieser Logikauffassung und versuchen hier nur, den Gedankengang der Begründer des Intuitionismus zu verdeutlichen. Aus diesem Grunde führen wir ein längeres Zitat aus der Arbeit L. E. J. Brouwers „Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere der Funktionentheorie“ (1925) an, das die Ansichten des Begründers des Intuitionismus bezüglich des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten verdeutlicht: „Für innerhalb eines bestimmten endlichen Hauptsystems mit Hilfe des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hergeleitete Eigenschaften besteht stets Sicherheit, daß man bei Verfügung über einen hinreichenden Zeitraum zu ihrer empirischen Bestätigung gelangen kann.

Nun haben wir die Naturerscheinung, daß zahlreiche Objekte und Mechanismen der Anschauungswelt in bezug auf ausgedehnte Komplexe von Tatsachen und Ereignissen beherrscht werden können, indem man sie als (eventuell teilweise unbekannte) endliche diskrete, für bestimmte bekannte Teile an bestimmte Gesetze zeitlicher Verkettung gebundene Systeme betrachtet. Mithin sind auf diese Objekte und Mechanismen in bezug auf die betreffenden Komplexe von Tatsachen und Ereignissen die Gesetze der theoretischen Logik, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, anwendbar, obwohl eine vollständige empirische Bestätigung der gezogenen Schlüsse hier meistens a priori materiell ausgeschlossen ist und bei (juristischen und anderen) zeitlichen Rückschlüssen nicht einmal von einer partiellen Bestätigung die Rede sein kann. Sowohl dieser unvollständigen Verifizierbarkeit der nichtsdestoweniger als unumstößlich richtig betrachteten Schlüsse wie der partiellen Unbekanntheit der repräsentierenden endlichen Systeme und dem Umstand, daß die theoretische Logik häufiger und von mehreren auf diese materiellen, als auf mathematischen Objekte angewandt wurde, ist es wahrscheinlich zuzuschreiben, daß man den Gesetzen der theoretischen Logik, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, einen aprioristischen Charakter zugesprochen und die in der Projektion eines endlichen diskreten Systems auf die betreffenden Objekte gelegenen Bedingungen ihrer Anwendbarkeit aus den Augen verloren hat, so daß man sogar dazu kommen konnte, für die völlig primäre und autonome Denkhandlung, welche die Mathematik der unendlichen Systeme darstellt, eine tiefere Rechtfertigung in den logischen Gesetzen zu suchen. Dementsprechend führte bei der logischen Behandlung der Anschauungswelt das Auftreten eines Widerspruchs nie zum Zweifel an der Unerschütterlichkeit der logischen Gesetze, sondern nur zur Modifizierung und Ergänzung der auf die Anschauungswelt projizierten mathematischen Fragmente.

Die Konsequenz des den Gesetzen der theoretischen Logik zugeschriebenen aprioristischen Charakters brachte mit sich, daß man bis vor kurzem diese Gesetze, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, auch in der Mathematik der unendlichen Systeme rückhaltlos angewandt hat und sich dabei nicht von der Erwägung hat stören lassen, daß die auf diesem

Wege erhaltenen Resultate im allgemeinen weder praktisch noch theoretisch einer empirischen Bestätigung zugänglich sind.“ (zit. nach Becker 1964, S. 332/333)

Heyting erklärt das Anliegen L. E. J. Brouwers und der Intuitionisten wie folgt: „Er untersuchte die gedankliche mathematische Konstruktion als solche, ohne nach der Natur der konstruierten Dinge zu fragen, etwa ob diese Dinge unabhängig von der Kenntnis über sie existieren. Dieser Gesichtspunkt führt unmittelbar zur Ablehnung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten. Ich kann es am besten an einem Beispiel zeigen: Vergleichen wir die Definitionen zweier natürlicher Zahlen, sagen wir k und l.

(a) k ist die größte Primzahl von der Art, daß $k - 1$ auch eine Primzahl ist; wenn es keine solche Zahl gibt, ist $k = 1$.

(b) l ist die größte Primzahl von der Art, daß $l - 2$ auch eine Primzahl ist; wenn es keine solche Zahl gibt, ist $l = 1$.

Die gesamte klassische Mathematik vernachlässigt den offensichtlichen Unterschied in der Art dieser Definitionen. k kann wirklich errechnet werden ($k = 3$), während wir keine Methoden besitzen, l zu ermitteln, da es nicht bekannt ist, ob die Folge der Primzahlzwillinge p, $p + 2$ unendlich ist oder nicht. Deswegen lehnen Intuitionisten (b) als Definition einer ganzen Zahl ab ... Diese Überlegung führt nun zur Ablehnung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten, denn wenn die Folge der Primzahlzwillinge entweder endlich oder unendlich wäre, so würde (b) auch eine ganze Zahl definieren.“ (zit. nach Enzensberger 1967, S. 58/60)

Wir haben in diesem einleitenden Abschnitt nur auf einige Wesenszüge des Intuitionismus aufmerksam gemacht, eine erschöpfende Charakteristik ist hier nicht möglich. Von den Intuitionisten wird nicht nur das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten verworfen, sondern sie lehnen auch eine ganze Reihe anderer logischer Gesetze ab. Sie betrachten die Logik als einen Teil der Mathematik. Ein logischer Satz ist nach ihrer Auffassung nur ein mathematischer Satz von äußerster Allgemeinheit. Die Logik kann dieser Auffassung nach also auch nicht als Grundlage der Mathematik dienen. Trotzdem wurde die intuitionistische Logik als besondere Disziplin aufgebaut. In den folgenden Abschnitten stellen wir die intuitionistische Logik dar und geben erst am Ende dieses Themenkomplexes eine kritische Einschätzung dieser Logikkonzeption.

12.2 Die intuitionistische Auffassung der logischen Operatoren

Aus der Darstellung des vorigen Abschnitts ist bereits deutlich geworden, daß die Intuitionisten die logischen Operatoren der Konjunktion, Adjunktion, Negation usw. anders auffassen, als dies in der klassischen Logik geschieht. Da bestimmte Gesetze der klassischen Logik in der intuitionistischen Logik nicht gelten, ist offensichtlich, daß es sich in beiden Logiken um verschiedene Komplexe von Operatoren handelt. Doch die Intuitionisten treten mit dem gleichen Anspruch wie die Vertreter der klassischen Logik auf, daß in ihrer Logik die logischen Eigenschaften der Operatoren „nicht“, „und“, „oder“ usw. der Umgangssprache erfaßt werden.

Ohne hier eine strenge Semantik anzustreben, geben wir im folgenden an, wie die Intuitionisten ihre Operatoren verstanden haben wollen. Für die intuitionistischen Operatoren verwenden wir die gleichen Symbole wie in der klassischen Logik. Es handelt sich dabei aber um verschiedene Operatoren.

Konjunktion: Eine Konjunktion $p \wedge q$ kann man genau dann behaupten, wenn man sowohl p als auch q behaupten kann.

Adjunktion: Eine Adjunktion $p \vee q$ kann man genau dann behaupten, wenn man mindestens eine der beiden Aussagen p und q behaupten kann. Hier ist der Unterschied zur klassischen Adjunktion offensichtlich, denn klassisch ist man immer berechtigt, $p \vee \sim p$ zu behaupten, auch wenn man nicht weiß, ob p oder $\sim p$ gilt.

Negation: $\sim p$ kann man genau dann behaupten, wenn es eine Konstruktion gibt, die die Annahme, daß die Konstruktion p durchgeführt ist, zum Widerspruch führt.

Diese Negation unterscheidet sich erheblich von der klassischen Negation. Heyting schreibt hierzu: „Streng gesagt, müssen wir genau unterscheiden zwischen der Verwendung von ‚nicht' in der Mathematik und in der gewöhnlichen Sprache nichtmathematischer Erörterungen. In mathematischen Behauptungen kann keine Unbestimmtheit entstehen; ‚nicht' hat immer einen genauen Sinn. ‚Das Urteil p ist nicht wahr' oder ‚Das Urteil p ist falsch' bedeutet ‚Wenn wir die Wahrheit von p annehmen, so gelangen wir zu einem Widerspruch' ...

Dort, wo die Gefahr einer Zweideutigkeit besteht, geben wir die mathematische Negation mit Hilfe solcher Ausdrücke, wie ‚es ist unmöglich, daß ...', ‚es ist falsch, daß ...', ‚es kann nicht sein, daß ...' usw. wieder, während die faktische Negation mittels solcher Ausdrücke, wie ‚wir haben kein Recht zu behaupten, daß ...', ‚niemand weiß, daß ...' usw. wiedergegeben wird.

... Jede mathematische Behauptung läßt sich in folgender Form ausdrücken: ‚Ich habe gedanklich die Konstruktion A durchgeführt'. Die mathematische Negation dieser Behauptung läßt sich ausdrücken als ‚Ich habe gedanklich die Konstruktion B durchgeführt, die die Annahme zum Widerspruch führt, daß sich die Konstruktion von A vollenden läßt'. Behauptung und Negation werden hier in der gleichen Form ausgedrückt. Andererseits ist die faktische Negation der ersten Behauptung: ‚Ich habe gedanklich die Konstruktion von A nicht durchgeführt'; diese Feststellung hat nicht die Form einer mathematischen Behauptung." (Heyting 1956, S. 28/29)

Heyting unterscheidet hier zwei Negationen, die mathematische und die faktische, die er auch beide gebraucht. In der intuitionistischen Logik wird aber nur die mathematische Negation berücksichtigt. Wir haben hier nach Auffassung der Intuitionisten also eine bereichsspezifische Negation, die nur für die Mathematik gilt. Eine solche Auffassung der Logik ist nicht akzeptabel, denn sie führt konsequent fortgesetzt zur Zerstörung der Logik als selbständiger Wissenschaft. Wir werden später sehen, wie man das hier von den Intuitionisten aufgeworfene Problem der beiden Negationen in einem universellen logischen Regelsystem lösen kann.

Subjunktion: Eine Subjunktion $p \supset q$ kann man genau dann behaupten, wenn man über eine solche Konstruktion r verfügt, die, zu einer beliebigen p beweisenden Konstruktion hinzugefügt, automatisch eine q beweisende Konstruktion ergibt. Mit anderen Worten, die Konstruktion p bildet zusammen mit der Konstruktion r einen Beweis von q.

Generalisator: Eine Aussage $\forall x P(x)$ bedeutet, daß $P(x)$ für ein beliebiges x aus einem gegebenen Bereich gilt, d. h., wir können genau dann $\forall x P(x)$ behaupten, wenn wir über eine allgemeine Konstruktionsmethode verfügen, die es gestattet, für ein beliebiges Element a aus dem gegebenen Bereich eine Konstruktion von $P(a)$ zu erhalten.

Partikularisator: Eine Aussage $\exists x P(x)$ wird als wahr angesehen, wenn faktisch ein Element aus dem gegebenen Bereich aufgebaut ist, für das $P(a)$ wahr ist.

Das hier angegebene Verständnis der intuitionistischen logischen Operatoren stützt sich vor allem auf Heytings Buch „Intuitionism". In den angegebenen Erläuterungen kommen solche Termini wie „behaupten", „Konstruktion" etc. vor, deren genauer Sinn nicht angegeben wird. Es gibt verschiedene Versuche, diese Termini zu präzisieren bzw. sie durch andere zu ersetzen. Doch eindeutige und befriedigende Ergebnisse liegen in dieser Hinsicht bisher nicht vor.

12.3 Der intuitionistische (konstruktive) Aussagenkalkül

Das erste vollständige Axiomensystem der intuitionistischen Logik stammt von A. Heyting (Heyting 1930). Wir geben hier ein äquivalentes Axiomensystem von H. Scholz und K. Schröter an, in dem die Axiome nach den vorkommenden Operatoren gruppiert sind.

Für den Ausdruck *klassischer Aussagenkalkül* verwenden wir die Abkürzung *KAK* und für den Ausdruck *intuitionistischer Aussagenkalkül* die Abkürzung *IAK*. Die Basis des *IAK* hat folgende Form:

Alphabet:

1. p, q, r mit und ohne Indizes als Aussagenvariablen;
2. die Operatoren $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$ und $\equiv$ werden genauso genannt wie im *KAK*;
3. Klammern als Hilfszeichen.

D1. Aussagenlogische Formeln werden wie im *KAK* definiert.

Wir wählen die gleichen Klammereinsparungsregeln wie im *KAK*.

Axiome des *IAK*:

I. Axiome für die Subjunktion:

A1. $p \supset (q \supset p)$
A2. $p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$

II. Axiome für die Konjunktion:

A3. $p \wedge q \supset p$
A4. $p \wedge q \supset q$
A5. $p \supset q \supset (p \supset r \supset (p \supset q \wedge r))$

III. Axiome für die Adjunktion:

A6. $p \supset p \vee q$
A7. $p \supset q \vee p$
A8. $p \supset r \supset (q \supset r \supset (p \vee q \supset r))$

IV. Axiome für die Bisubjunktion:

A9. $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$
A10. $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$
A11. $p \supset q \supset (q \supset p \supset (p \equiv q))$

V. Axiome für die Negation:

A12. $\sim p \supset (p \supset q)$
A13. $(p \supset \sim p) \supset \sim p.$

Schlußregeln:

R1. Einsetzungsregel für Variablen;
R2. Abtrennungsregel, d. h., aus A und $A \supset B$ erhält man B.

Die Definitionen eines Beweises und eines Beweises aus Annahmen übernehmen wir aus dem *KAK*.

Beweis einiger Theoreme und Metatheoreme:

T1. $p \supset p$

1. $p \supset (q \supset p \supset p) \supset (p \supset (q \supset p) \supset (p \supset p))$ — (*A2*, *R1*)
2. $p \supset (q \supset p \supset p)$ — (*A1*, *R1*)
3. $p \supset (q \supset p) \supset (p \supset p)$ — (1., 2., *R2*)
4. $p \supset (q \supset p)$ — (*A1*)
5. $p \supset p$ — (3., 4., *R2*)

MT1. Alle Theoreme des *IAK* sind Tautologien der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik. Beweis: Alle Axiome sind Tautologien, und die Schlußregeln *R1* und *R2* führen von Tautologien stets zu Tautologien.

MT2. Der *IAK* ist widerspruchsfrei.
MT2 folgt unmittelbar aus *MT1*.

MT3. (*Deduktionstheorem*, *DT*) Wenn $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n \vdash B$, so $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$.
Mit *A1*, *A2* und *T1* wird *MT3* analog wie im *KAK* bewiesen.

T2. $p \supset q \supset (q \supset r \supset (p \supset r))$

Nach *R2* gilt: $p \supset q$, $q \supset r$, $p \vdash r$. Hierauf wenden wir dreimal das Deduktionstheorem an und erhalten *T2*.

T3. $p \supset ({\sim}p \supset q)$
$p, {\sim}p \vdash q$ — (*A12*, *R2*)

Hierauf wenden wir zweimal das Deduktionstheorem an.

T4. $p \supset {\sim}{\sim}p$

1. $p \supset ({\sim}p \supset {\sim}{\sim}q)$ — (*T3*, *R1*)
2. $({\sim}p \supset {\sim}{\sim}p) \supset {\sim}{\sim}p$ — (*A13*, *R1*)
3. $p \supset {\sim}{\sim}p$ — (1., 2., *T2*, *R2*)

T5. $p \supset {\sim}q \supset (q \supset {\sim}p)$
$p \supset {\sim}q, q \vdash {\sim}p$

1. $q \supset ({\sim}q \supset {\sim}p)$ — (*T3*, *R1*)
2. q — (*AF*)
3. ${\sim}q \supset {\sim}p$ — (1., 2., *R2*)
4. $p \supset {\sim}q$ — (*AF*)
5. $p \supset {\sim}p$ — (3., 4., *T2*)
6. $(p \supset {\sim}p) \supset {\sim}p$ — (*A13*)
7. ${\sim}p$ — (5., 6., *R2*)

T6. $p \supset q \supset (p \supset {\sim}q \supset {\sim}p)$
$p \supset q, p \supset {\sim}q \vdash {\sim}p$

1. $p \supset {\sim}q \supset (q \supset {\sim}p)$ — (*T5*)
2. $p \supset {\sim}q$ — (*AF*)
3. $q \supset {\sim}p$ — (1., 2., *R2*)
4. $p \supset q$ — (*AF*)

5. $p \supset {\sim}p$ (3., 4., *T2*)
6. $p \supset {\sim}p \supset {\sim}p$ (*A13*)
7. ${\sim}p$ (5., 6., *R2*)

Mit Hilfe von *T6* und *DT* erhalten wir das folgende Metatheorem:

MT4. Wenn $A_1, \ldots, A_n, C \vdash D$ und $A_1, \ldots, A_n, C \vdash {\sim}D$, so $A_1, \ldots, A_n \vdash {\sim}C$.

Wenn wir im weiteren *MT4* verwenden, so nennen wir die Formel C *Annahme des intuitionistischen indirekten Beweises* und kürzen sie mit A. d. i. i. B. ab.

T7. $p \supset q \supset ({\sim}q \supset {\sim}p)$

$p \supset q, {\sim}q \vdash {\sim}p$

1. $p \supset q \supset (p \supset {\sim}q \supset {\sim}p)$ (*T6*)
2. $p \supset q$ (*AF*)
3. $p \supset {\sim}q \supset {\sim}p$ (1., 2., *R2*)
4. ${\sim}q \supset (p \supset {\sim}q)$ (*A1*, *R1*)
5. ${\sim}q$ (*AF*)
6. $p \supset {\sim}q$ (4., 5., *R2*)
7. ${\sim}p$ (3., 6., *R2*)

T8. ${\sim}{\sim}{\sim}p \supset {\sim}p$ (Gesetz der dreifachen Negation)

1. $p \supset {\sim}{\sim}p$ (*T4*)
2. $p \supset {\sim}{\sim}p \supset ({\sim}{\sim}{\sim}p \supset {\sim}p)$ (*T7*, *R1*)
3. ${\sim}{\sim}{\sim}p \supset {\sim}p$ (1., 2., *R2*)

T9. ${\sim}(p \wedge {\sim}p)$ (Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch)

1. $p \wedge {\sim}p \supset {\sim}p$ (*A4*, *R1*)
2. $p \wedge {\sim}p \supset p$ (*A3*, *R1*)
3. $p \wedge {\sim}p \supset p \supset (p \wedge {\sim}p \supset {\sim}p \supset {\sim}(p \wedge {\sim}p))$ (*T6*, *R1*)
4. ${\sim}(p \wedge {\sim}p)$ (1., 2., 3., *R2*)

T10. $q \supset {\sim}({\sim}p \wedge p)$

1. ${\sim}({\sim}p \wedge p) \supset (q \supset {\sim}({\sim}p \wedge p))$ (*A1*, *R1*)
2. ${\sim}({\sim}p \wedge p)$ (*T9*)
3. $q \supset {\sim}({\sim}p \wedge p)$ (1., 2., *R2*)

T11. ${\sim}(p \vee q) \supset {\sim}p \wedge {\sim}q$

1. $p \supset p \vee q$ (*A6*)
2. $q \supset p \vee q$ (*A7*)
3. ${\sim}(p \vee q) \supset {\sim}p$ (1., *T7*, *R1*, *R2*)
4. ${\sim}(p \vee q) \supset {\sim}q$ (2., *T7*, *R1*, *R2*)
5. ${\sim}(p \vee q) \supset {\sim}p \wedge {\sim}q$ (3., 4., *A5*, *R1*, *R2*)

T12. ${\sim}{\sim}(p \vee {\sim}p)$

1. ${\sim}(p \vee {\sim}p) \supset {\sim}p \wedge {\sim}{\sim}p$ (*T11*, *R1*)
2. ${\sim}({\sim}p \wedge {\sim}{\sim}p) \supset {\sim}{\sim}(p \vee {\sim}p)$ (1., *T7*, *R1*, *R2*)
3. ${\sim}({\sim}p \wedge {\sim}{\sim}p)$ (*T9*, *R1*)
4. ${\sim}{\sim}(p \vee {\sim}p)$ (2., 3., *R2*)

T13. $q \supset {\sim}{\sim}(p \vee {\sim}p)$ (*A1*, *T12*, *R1*, *R2*)

T14. $p \supset (q \supset r) \supset (p \wedge q \supset r)$
$p \supset (q \supset r), p \wedge q \vdash r$

1. $p \wedge q \supset p$ — $(A3)$
2. $p \wedge q \supset q$ — $(A4)$
3. $p \wedge q$ — (AF)
4. p — (1., 3., $R2$)
5. q — (2., 3., $R2$)
6. $p \supset (q \supset r)$ — (AF)
7. r — (4., 5., 6., $R2$)

T15. $\sim p \wedge p \supset q$ — ($A12$, $T14$, $R1$, $R2$)

MT5. Wenn A ein Theorem des IAK ist, so sind $p \supset A$ und $\sim A \supset p$ in IAK beweisbar. *MT5* gilt auf Grund von *A1* und *T3*.

T16. $\sim p \vee q \supset (p \supset q)$

1. $\sim p \supset (p \supset q) \supset (q \supset (p \supset q) \supset (\sim p \vee q \supset (p \supset q)))$ — ($A8$, $R1$)
2. $\sim p \vee q \supset (p \supset q)$ — ($A12$, $A1$, 1., $R1$, $R2$)

T17. $p \supset q \supset \sim(p \wedge \sim q)$

1. $p, p \supset q \vdash q$ — $(R2)$
2. $p \vdash p \supset q \supset q$ — (DT, 1.)
3. $p \vdash \sim q \supset \sim(p \supset q)$ — (2., $T7$, $R1$, $R2$)
4. $p \supset (\sim q \supset \sim(p \supset q))$ — (3., DT)
5. $p \wedge \sim q \supset \sim(p \supset q)$ — (4., $T14$, $R1$, $R2$)
6. $p \supset q \supset \sim(p \wedge \sim q)$ — (5., $T5$, $R1$, $R2$)

T18. $p \vee q \supset (\sim p \supset q)$

1. $p \supset (\sim p \supset q)$ — $(T3)$
2. $q \supset (\sim p \supset q)$ — ($A1$, $R1$)
3. $p \supset (\sim p \supset q) \supset (q \supset (\sim p \supset q) \supset (p \vee q \supset (\sim p \supset q)))$ — ($A8$, $R1$)
4. $p \vee q \supset (\sim p \wedge \sim q)$ — (1., 2., 3., $R2$)

T19. $p \vee q \supset \sim(\sim p \supset q)$

1. $\sim p \wedge \sim q \supset \sim p$ — ($A3$, $R1$)
2. $\sim p \wedge \sim q \supset \sim q$ — ($A4$, $R1$)
3. $p \supset \sim(\sim p \wedge \sim q)$ — (1., $T5$, $R1$, $R2$)
4. $q \supset \sim(\sim p \wedge \sim q)$ — (2., $T5$, $R1$, $R2$)
5. $p \vee q \supset \sim(\sim p \wedge \sim q)$ — (3., 4., $A8$, $R1$, $R2$)

T20. $p \vee q \supset (p \supset q \supset q)$

1. $p \supset (p \supset q \supset q)$ — (Zeile 2 aus dem Beweis von $T17$, DT)
2. $q \supset (p \supset q \supset q)$ — ($A1$, $R1$)
3. $p \wedge q \supset (p \supset q \supset q)$ — (1., 2., $A8$, $R1$, $R2$)

T21. $p \wedge q \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$

1. $\sim p \supset \sim(p \wedge q)$ — ($A3$, $T7$, $R1$, $R2$)
2. $\sim q \supset \sim(p \wedge q)$ — ($A4$, $T7$, $R1$, $R2$)
3. $\sim p \vee \sim q \supset \sim(p \wedge q)$ — (1., 2., $A8$, $R1$, $R2$)
4. $p \wedge q \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$ — (3., $T5$, $R1$, $R2$)

T22. $p \wedge q \supset \sim(p \supset \sim q)$

1.	$p, p \supset \sim q \vdash \sim q$	$(R2)$
2.	$p \vdash p \supset \sim q \supset \sim q$	(1., DT)
3.	$p \vdash q \supset \sim(p \supset \sim q)$	(2., $T5$)
4.	$p \supset (q \supset \sim(p \supset \sim q)$	(3., DT)
5.	$p \wedge q \supset \sim(p \supset \sim q)$	(4., $T14$, $R1$, $R2$)

T23. $p \supset (q \supset r) \supset (q \supset (p \supset r))$

1.	$p \supset (q \supset r), q, p \vdash r$	$(R2)$
2.	$p \supset (q \supset r) \supset (q \supset (p \supset r))$	(1., DT)

T24. $\sim\sim(p \supset q) \supset (\sim\sim p \supset \sim\sim q)$
$\sim\sim(p \supset q), \sim\sim p \vdash \sim\sim q$

1.	$\sim\sim(p \supset q)$	(AF)
2.	$\sim\sim p$	(AF)
3.	$\sim q$	A. d. i. i. B.
4.	$p \supset q \supset (\sim q \supset \sim p)$	$(T7)$
5.	$\sim q \supset (p \supset q \supset \sim p)$	(4., $T23$, $R1$, $R2$)
6.	$p \supset q \supset \sim p$	(3., 5., $R2$)
7.	$\sim(p \supset q)$	(2., 6., $T7$, $R1$, $R2$)
8.	$\sim\sim(p \supset q), \sim\sim p \vdash \sim\sim q$	(1., 7., $MT4$)

T25. $p \supset (q \supset p \wedge q)$
$p, q \vdash p \wedge q$

1.	$(p \supset p) \supset p \supset ((p \supset p) \supset q \supset ((p \supset p) \supset p \wedge q))$	($A5$, $R1$)
2.	p	(AF)
3.	q	(AF)
4.	$(p \supset p) \supset p$	(2., $A1$, $R1$, $R2$)
5.	$(p \supset p) \supset q$	(3, $A1$, $R1$, $R2$)
6.	$(p \supset p) \supset q \supset ((p \supset p) \supset p \wedge q)$	(1., 4., $R2$)
7.	$p \supset p \supset p \wedge q$	(5., 6., $R2$)
8.	$p \supset p$	$(T1)$
9.	$p \wedge q$	(7., 8., $R2$)

Übungen:

1. Beweisen Sie, daß der in Abschnitt 3 angegebene IAK mit der folgenden Axiomatisierung des IAK von Łukasiewicz (1952) deduktiv äquivalent ist!
   Axiome: 1. $q \supset (p \supset q)$, 2. $p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$, 3. $p \wedge q \supset p$, 4. $p \wedge q \supset q$, 5. $p \supset (q \supset p \wedge q)$, 6. $p \supset p \vee q$, 7. $q \supset p \vee q$, 8. $p \supset r \supset (q \supset r \supset (p \vee q \supset r))$, 9. $p \supset \sim q \supset (q \supset \sim p)$, 10. $p \supset (\sim p \supset q)$. Als Schlußregeln haben wir die Abtrennungs- und die Einsetzungsregel. Die Bisubjunktion wird definiert:
   $A \equiv B \equiv_{Def} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.
2. Beweisen Sie, daß der in Abschnitt 3 angegebene IAK mit der folgenden Axiomatisierung des IAK von K. Schröter (1957) deduktiv äquivalent ist! Im Kalkül von Schröter sind die Axiome ebenfalls nach den vorkommenden Operatoren geordnet. Für die Subjunktion setzt er folgende Axiome:

1. $p \supset (q \supset p)$, 2. $p \supset (p \supset q) \supset (p \supset q)$, 3. $p \supset q \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$. Die Axiome für die Konjunktion und Adjunktion sind die gleichen wie in Abschnitt 3. Für die Bisubjunktion setzt er keine Axiome, da sie definierbar ist. Für die Negation wählt er: 10. $p \supset {\sim}q \supset (q \supset {\sim}p)$, 11. ${\sim}p \supset (p \supset q)$. Schlußregeln sind die Abtrennungs- und die Einsetzungsregel.

3. Beweisen Sie, daß der in Abschnitt 3 angegebene *IAK* mit der folgenden Axiomatisierung des *IAK* von A. Heyting (1930) deduktiv äquivalent ist!
   Axiome: 1. $p \supset p \wedge p$, 2. $p \wedge q \supset q \wedge p$, 3. $p \supset q \supset (p \wedge r \supset q \wedge r)$, 4. $(p \supset q) \wedge (q \supset r) \supset$ $\supset (p \supset r)$, 5. $q \supset (p \supset q)$, 6. $p \wedge (p \supset q) \supset q$, 7. $p \supset p \vee q$, 8. $p \vee q \supset q \vee p$, 9. $(p \supset r) \wedge (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)$, 10. ${\sim}p \supset (p \supset q)$, 11. $(p \supset q) \wedge (p \supset {\sim}q) \supset {\sim}p$.
   Schlußregeln sind die Abtrennungs- und die Einsetzungsregel.
4. In der folgenden Axiomatisierung der intuitionistischen Logik wird zum Alphabet eine konstante falsche Aussage f hinzugenommen. Geben Sie die Formeldefinition an! Beweisen Sie, daß die folgende Axiomatisierung der intuitionistischen Logik der in Abschnitt 3 angegebenen deduktiv äquivalent ist.
   Axiome: 1. $p \supset (q \supset p)$, 2. $p \supset (q \supset r) \supset (p \supset q \supset (p \supset r))$, 3. $p \wedge q \supset p$, 4. $p \wedge q \supset q$, 5. $p \supset q \supset (p \supset r \supset (p \supset q \wedge r))$, 6. $p \supset p \vee q$, 7. $q \supset p \vee q$, 8. $p \supset r \supset (q \supset r \supset (p \vee q \supset r))$, 9. $f \supset p$. Schlußregeln sind die Einsetzungs- und die Abtrennungsregel.
   Hinweis zur Lösung: Fügen Sie zur Axiomatisierung des Abschnitts 3 folgende Definition: $f \equiv_{Def} {\sim}(p \supset p)$ und zum hier angegebenen System die Definition ${\sim}A \equiv_{Def} A \supset f$ hinzu!
5. Beweisen Sie *MT4*!
6. Beweisen Sie, daß die konstruktive Bisubjunktion reflexiv, symmetrisch und transitiv ist!
7. Beweisen Sie, daß das folgende System des natürlichen Schließens dem axiomatischen Aufbau der intuitionistischen Logik im Abschnitt 3 deduktiv äquivalent ist. Im System des natürlichen Schließens für die intuitionistische Logik haben wir folgende Grundregeln zum Hinzufügen neuer Zeilen zum Beweis: die Regeln *AR, BK, EK, EA, EB* und *BB* werden genauso formuliert wie in der klassischen Logik; als Beseitigungsregel der Adjunktion (*BA*) wählen wir die Regel:

$$\begin{array}{c} A \supset C \\ B \supset C \\ A \vee B \\ \hline C \end{array}$$

   Außerdem haben wir die Strukturregel zum Aufbau eines direkten Beweises und folgende Strukturregel zum Aufbau eines intuitionistischen indirekten Beweises:
   Wir formulieren die Regel wieder bezüglich des Formelschemas *FSI*:
   $A_1 \supset (A_2 \supset (A_3 \supset \ldots \supset (A_n \supset B)\ldots) \quad (n \geq 0)$.
   1. In den ersten n Zeilen werden $A_1, \ldots, A_n$ als Annahmen des Beweises geschrieben.
   2. Falls B die Form ${\sim}C$ hat, wird in der $(n+1)$-ten Zeile C als Annahme des intuitionistischen indirekten Beweises geschrieben. Falls B nicht mit einer Negation beginnt, kann keine Annahme des intuitionistischen indirekten Beweises geschrieben werden, der indirekte intuitionistische Beweis aber trotzdem geführt werden.
   3. Bereits bewiesene Theoreme können als neue Zeilen zum Beweis hinzugefügt werden.
   4. Auf der Grundlage vorhandener Zeilen können zum Beweis neue Zeilen nach den 7 Grundregeln *AR, BK, EK, EA, BA, EB* und *BB* hinzugefügt werden.
   5. Der Beweis ist beendet, wenn in ihm eine Formel und ihre Negation als Beweiszeilen auftreten.

12.4 Die dreiwertige Logik von Heyting. *IAK* und Aussagenalgebra

A. Heyting konstruierte eine dreiwertige Logik, mit deren Hilfe es möglich ist zu beweisen, daß die von den Intuitionisten verworfenen logischen Gesetze, wie z. B. das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten und die Regel zur Beseitigung der doppelten Negation, im intuitionistischen Aussagenkalkül nicht beweisbar sind.

Die Basis der dreiwertigen Logik H^3 von Heyting hat folgende Form. Wahrheitswerte sind 1, 2 und 3. Ausgezeichneter Wahrheitswert ist 1; dieser entspricht dem Wert v und der Wert 3 dem Wert f der zweiwertigen Logik. Nach Heytings Auffassung steht der Wert 2 für einen Satz, der nicht falsch sein kann, dessen Richtigkeit aber nicht bewiesen ist.

Die Operatoren werden durch folgende Wahrheitstabellen definiert:

Negation:

A	$\sim A$
1	3
2	3
3	1

Zweistellige Operatoren:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	2	2
1	3	3	1	3	3
2	1	2	1	1	2
2	2	2	2	1	1
2	3	3	2	3	3
3	1	3	1	1	3
3	2	3	2	1	3
3	3	3	3	1	1

Die Definitionen der Konjunktion und der Adjunktion lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$A \wedge B \approx \max(A, B)$$
$$A \vee B \approx \min(A, B).$$

Wir diskutieren hier nicht die inhaltlichen Gründe, die zur Konstruktion dieser dreiwertigen Logik führten, sondern betrachten sie als ein technisches Hilfsmittel der Logik, mit dessen Hilfe wir die Nichtableitbarkeit bestimmter Formeln im intuitionistischen Aussagenkalkül beweisen können. Die folgenden Metatheoreme beschreiben die Beziehungen zwischen der dreiwertigen Logik von Heyting und dem intuitionistischen Aussagenkalkül.

MT1. Wenn eine Formel A im *IAK* beweisbar ist, so ist sie eine Tautologie in der dreiwertigen Logik von Heyting.

Beweis: Die Axiome des *IAK* sind Tautologien der dreiwertigen Logik H^3, und die Schlußregeln vererben den tautologischen Charakter von Formeln.

MT2. Die Formeln $\sim p \vee p$ und $\sim\sim p \supset p$ sind keine Theoreme des *IAK*.

Beweis: Wir interpretieren die Operatoren des *IAK* in der dreiwertigen Logik H^3. Wegen *MT1* sind alle Theoreme des *IAK* Tautologien von H^3. Die Formeln $\sim p \vee p$ und $\sim\sim p \supset p$ sind aber keine Tautologien von H^3, da sie bei $p = 2$ den Wert 2 annehmen.

MT3. Der *IAK* ist bezüglich der Klasse der Tautologien der zweiwertigen Aussagenalgebra nicht semantisch vollständig, d. h., nicht alle Tautologien dieser Algebra sind Theoreme des *IAK*.

Beweis: Das Metatheorem folgt aus *MT2* und der Tatsache, daß $\sim p \vee p$ und $\sim\sim p \supset p$ Tautologien der zweiwertigen Aussagenalgebra sind.

MT4. Die Formeln $(p \supset q) \supset (\sim p \vee q)$ und $\sim(p \wedge \sim q) \supset (p \supset q)$ sind keine Theoreme des *IAK*.

Beweis: Im System H^3 ist die erste Formel keine Tautologie, da sie bei $p = 2$ und $q = 2$ den Wert 2 annimmt, und die zweite Formel ist keine Tautologie, da sie bei $p = 1$ und $q = 2$ den Wert 2 annimmt.

Aus *MT4* folgt, daß es im *IAK* nicht möglich ist, die Subjunktion $\supset$ mit Hilfe von $\sim$ und $\vee$ bzw. von $\sim$ und $\wedge$ zu definieren.

MT5. Die Formeln $\sim(\sim p \wedge \sim q) \supset p \vee q$, $(\sim p \supset q) \supset p \vee q$, $(p \supset q \supset q) \supset p \vee q$ sind keine Theoreme des *IAK*.

Beweis: Die ersten beiden Formeln nehmen bei $p = 2$ und $q = 2$ den Wert 2 an, die dritte Formel nimmt bei $p = 2$ und $q = 3$ den Wert H^3 an.

Aus *MT5* folgt, daß es im *IAK* nicht möglich ist, die Adjunktion $\vee$ mit Hilfe von $\sim$ und $\supset$ bzw. von $\sim$ und $\wedge$ bzw. mit $\supset$ allein zu definieren.

MT6. Die Formeln $\sim(\sim p \vee \sim q) \supset p \wedge q$, $\sim(p \supset \sim q) \supset p \wedge q$ sind keine Theoreme des *IAK*.

Beweis: Beide Formeln nehmen bei $p = 2$ und $q = 2$ den Wert 2 an.

Aus *MT6* folgt, daß es im *IAK* nicht möglich ist, die Konjunktion $\wedge$ mit Hilfe von $\sim$ und $\vee$ bzw. von $\sim$ und $\supset$ zu definieren.

Im Abschnitt 3 haben wir gezeigt, daß die Umkehrungen der in den Metatheoremen *MT2*—*MT6* angegebenen Subjunktionen im *IAK* beweisbar sind. Aus Übung 1 des Abschnitts 3 ist ersichtlich, daß die Bisubjunktion mit Hilfe der Subjunktion und Konjunktion definierbar ist. Aus *MT4*—*MT6* ergibt sich, daß die intuitionistischen Operatoren $\sim$, $\wedge$, $\vee$ und $\supset$ einen Komplex von unabhängigen Grundoperatoren bilden.

MT7. Die Formeln $\sim p \supset \sim q \supset (q \supset p)$, $\sim p \supset q \supset (\sim q \supset p)$, $(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim q \supset p)$ sind keine Theoreme des *IAK*.

Beweis: Die erste Formel nimmt bei $p = 2$ und $q = 1$ den Wert 2 an, die beiden übrigen Formeln nehmen bei $p = 2$ und $q = 3$ den Wert 2 an. Die Formel $(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim q \supset p)$ liegt bestimmten indirekten Beweisen zugrunde und wird dabei folgendermaßen interpretiert: Wenn aus der Annahme der Negation von p ein Widerspruch folgt, so gilt p. Diese Art von indirekten Beweisen wird von den Intuitionisten und Konstruktivisten verworfen. In der Literatur findet man manchmal die Behauptung, die Vertreter der intuitionistischen bzw. konstruktiven Logik lehnten in der Mathematik alle indirekten Beweise ab. So undifferenziert ist diese Behauptung nicht richtig. Im Rahmen der klassischen Logik lassen sich indirekte Beweise ganz allgemein wie folgt charakterisieren: Soll ein bestimmter Satz bewiesen werden, so nimmt man zunächst an, dieser Satz gelte nicht, und leitet aus dieser Annahme Folgerungen ab, die die ursprüngliche Annahme widerlegen. Meist leitet man als Folgerung einen logischen Widerspruch ab. Die Ausarbeitung der konstruktiven Logik führte dazu, daß zwischen verschiedenen Arten von indirekten Beweisen unterschieden werden kann, von denen nur einige von den Konstruktivisten akzeptiert werden. Abgelehnt werden von den Konstruktivisten solche indirekten Beweise, in denen der zu beweisende Satz eine unnegierte Behauptung A ist, die Annahme des indirekten Beweises demzufolge $\sim A$. Gelingt es nun, aus $\sim A$ einen Widerspruch herzuleiten, so ist damit auch konstruktiv gezeigt, daß $\sim\sim A$ gilt. Da es in der intuitionistischen Logik aber nicht statthaft ist, von der doppelten Negation einer Behauptung zu der Behauptung selbst überzugehen, folgt daraus jedoch nicht, daß A gilt, während klassisch natürlich A aus $\sim\sim A$ logisch folgt. Hat die zu beweisende Behauptung hingegen die Form $\sim A$, und gelingt es, aus der Annahme des indirekten Beweises A einen Widerspruch herzuleiten, so gilt auch konstruktiv $\sim A$. Denn wenn die zu beweisende Behauptung eine negierte Aussage $\sim A$ ist und aus der Annahme des indirekten Beweises $\sim\sim A$ ein Widerspruch abgeleitet wird, so gilt $\sim\sim\sim A$. Da auch konstruktiv der Übergang von der dreifachen Negation zur einfachen Negation einer Behauptung zulässig ist, folgt daraus $\sim A$.

MT8. Die Formel $p \supset \sim q \vee q$ ist kein Theorem des *IAK*.

Beweis: Die Formel nimmt bei $p = 1$ und $q = 2$ in H^3 den Wert 2 an.

MT9. Der *IAK* ist nicht vollständig bezüglich H^3, d. h., nicht alle Tautologien von H^3 sind Theoreme des *IAK*.

Beweis: Beispielsweise sind die Formeln $\sim(p \wedge q) \supset \sim p \vee \sim q$ und $(p \supset q) \vee (q \supset p)$ Tautologien in H^3, aber keine Theoreme des *IAK* (vgl. Übung 2i, j zu Abschnitt 9).

Aus *MT1* und *MT9* sind die Beziehungen des *IAK* und der dreiwertigen Logik H^3 ersichtlich. H^3 ist dem *IAK* nicht in dem Sinne adäquat, daß eine Formel genau dann ein Theorem des *IAK* ist, wenn sie in H^3 eine Tautologie ist. Da nicht alle Tautologien von H^3 Theoreme des *IAK* sind, haben wir nur ein negatives Kriterium: Wenn eine Formel keine Tautologie in H^3 ist, so ist sie nicht im *IAK* beweisbar.

Von K. Gödel wurde gezeigt, daß es keine Aussagenalgebra mit einer endlichen Zahl von Wahrheitswerten gibt, die dem *IAK* adäquat ist. Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Metatheorem, das wir ohne Beweis angeben:

MT10. Wenn im *IAK* eine Formel $A \vee B$ beweisbar ist, so ist in ihm die Formel A oder die Formel B beweisbar.

Nebenbei sei vermerkt, daß dieses Metatheorem für den klassischen Aussagenkalkül natürlich nicht gilt, denn dort ist beispielsweise die Formel $p \vee \sim p$ beweisbar, obwohl weder p noch $\sim p$ beweisbar sind.

MT11. Es gibt keine endliche adäquate Aussagenalgebra für den *IAK*.

Beweis: Wir beweisen *MT11* indirekt, d. h., wir nehmen an, es gäbe eine adäquate endliche Aussagenalgebra für den *IAK*. Diese Aussagenalgebra möge n Wahrheitswerte haben. 1 möge der ausgezeichnete Wert dieser Algebra sein und a ein beliebiger Wert. Da diese Algebra dem *IAK* adäquat sein soll, muß gelten $a \equiv a = 1$, da $A \equiv A$ ein Theorem des *IAK* ist; weiter muß gelten $1 \vee a = a \vee 1 = 1$, da $A \vee (A \supset A)$ und $(A \supset A) \vee A$ Theoreme des *IAK* sind. Außerdem gilt offensichtlich, daß keine Formel der Form $p_i \equiv p_j$ $(i \neq j)$ im *IAK* beweisbar ist, da sie schon im *KAK* nicht beweisbar ist. Aus den Aussagenvariablen $p_1, \ldots, p_{n+1}$ bilden wir alle möglichen Bisubjunktionen $p_i \equiv p_j$, wobei $i < j$, und verknüpfen diese Formeln in beliebiger Reihenfolge zu einer Adjunktion B. Die Formel B müßte dann eine Tautologie sein, da immer mindestens eine Formel $p_i \equiv p_j$ den Wert 1 annimmt, weil wir nur n Wahrheitswerte, aber $n+1$ verschiedene Variablen haben, eine Bisubjunktion aber den Wert 1 annimmt, wenn beide Glieder den gleichen Wahrheitswert haben, und eine Adjunktion den Wert 1 annimmt, wenn mindestens eines ihrer Glieder den Wert 1 hat. Folglich müßte die Formel B ein Theorem des *IAK* sein. Auf Grund von *MT10* müßte dann eine der Formeln $p_i \equiv p_j$ $(i \neq j)$ ein Theorem des *IAK* sein. Wir haben aber bereits gezeigt, daß das nicht der Fall ist. Folglich gibt es keine endliche Aussagenalgebra, die dem *IAK* adäquat ist.

Von St. Jaśkowski wurde eine unendliche Folge von Aussagenalgebren konstruiert (Jaśkowski 1936), für die gilt:

MT12. Eine Formel ist genau dann ein Theorem des *IAK*, wenn sie in jeder der Jaśkowski-Algebren eine Tautologie ist.

Übungen:

1. Beweisen Sie folgende Theoreme im *IAK* des Abschnitts 3:
   1. $(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$
   2. $(p_1 \equiv p_2) \wedge (q_1 \equiv q_2) \supset (p_1 \wedge q_1 \equiv p_2 \wedge q_2)$
   3. $(p_1 \equiv p_2) \wedge (q_1 \equiv q_2) \supset (p_1 \vee q_1 \equiv p_2 \vee q_2)$
   4. $(p_1 \equiv p_2) \wedge (q_1 \equiv q_2) \supset (p_1 \supset q_1 \equiv p_2 \supset q_2)$
   5. $(p_1 \equiv p_2) \wedge (q_1 \equiv q_2) \supset ((p_1 \equiv q_1) \equiv (p_2 \equiv q_2))$!
2. Formulieren und Beweisen Sie das Ersetzbarkeitstheorem für die Bisubjunktion im *IAK*! Benutzen Sie die Ergebnisse von Übung 1!
3. Beweisen Sie, daß der Kalkül G, den man aus dem *IAK* des Abschnitts 3 erhält, indem man $p \vee \sim p$ als zusätzliches Axiom setzt, dem *KAK* deduktiv äquivalent ist!
   Hinweis zur Lösung: Beweisen Sie in G die Formel $\sim p \supset \sim q \supset (q \supset p)$ mit Hilfe von *DT*, *T5* und *T18*!
4. Zeigen Sie, daß die folgenden Formeln keine Theoreme des *IAK* sind:
   1. $p \supset q \supset p \supset p$
   2. $p \vee (p \supset q)$!

12.5 Einbettung des *KAK* im *IAK*

In diesem Abschnitt beweisen wir einige Metatheoreme über den *IAK*. Das wichtigste Ergebnis besteht darin, daß der *IAK* in einem bestimmten Sinne einen vollständigen *KAK* als Teilsystem enthält. Dieses Ergebnis scheint zunächst *MT3* des Abschnitts 4 zu widersprechen, kommt aber durch eine unterschiedliche Interpretation der logischen Operatoren zustande. Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden im wesentlichen von V. M. Glivenko und K. Gödel erzielt (Glivenko 1928, 1929; Gödel 1932, 1933b).

MT1. Es gibt im *IAK* nicht für jede Formel A eine solche Formel B, daß $A \equiv \sim B$ im *IAK* beweisbar ist.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe für die Formel p eine solche Formel B, daß $p \equiv \sim B$ im *IAK* beweisbar wäre. Mit Hilfe von *A9, A10, A11* und *T7* wäre dann auch die Formel $\sim\sim p \equiv \sim\sim\sim B$ im *IAK* beweisbar. Da nach *T8* die Formel $\sim\sim\sim B \equiv \sim B$ beweisbar ist, erhielten wir wegen der Transitivität von $\equiv$, daß $\sim\sim p \equiv p$, also auch $\sim\sim p \supset p$ im *IAK* beweisbar wäre. Dies widerspricht *MT2* des Abschnitts 4.

MT2. Wenn eine Formel A eine Tautologie der zweiwertigen Aussagenalgebra ist, so ist $\sim\sim A$ im *IAK* beweisbar.

Beweis: Wenn A eine Tautologie der zweiwertigen Aussagenalgebra ist, so ist A auf Grund der Vollständigkeit des Kalküls G aus der Übung 3 des Abschnitts 4 in G beweisbar. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n \geq 1)$ möge ein Beweis der Formel A in G sein $(B_n = A)$. Wir führen den Beweis von *MT2* induktiv über den Index von B.

Anfangsschritt: Wir unterscheiden zwei Fälle: 1) B_1 ist eines der Axiome *A1-A13* des *IAK*; 2) B_1 ist Axiom $p \vee \sim p$. Im ersten Fall ist B_1 auch im *IAK* beweisbar, und auf Grund von *T4* ist $\sim\sim B_1$ im *IAK* beweisbar. Im zweiten Fall ist $\sim\sim B_1$ auf Grund von *T12* im *IAK* beweisbar.

Induktionsschritt:

1. B_i wurde mit Hilfe der Einsetzungsregel aus B_j gewonnen. Dann erhält man mit Hilfe der gleichen Einsetzung $\sim\sim B_i$ aus $\sim\sim B_j$.
2. B_i wurde mit Hilfe der Abtrennungsregel aus B_j und B_k $(B_k = B_j \supset B_i)$ gewonnen. Dann sind auf Grund der Induktionsvoraussetzung $\sim\sim B_j$ und $\sim\sim B_k$, d. h. $\sim\sim(B_j \supset B_i)$, im *IAK* beweisbar, und mit Hilfe von *T24* erhält man: $\sim\sim B_i$ ist im *IAK* beweisbar.

MT3. Eine Formel $\sim A$ ist genau dann eine Tautologie der zweiwertigen Aussagenalgebra, wenn $\sim A$ im *IAK* beweisbar ist.

Beweis: Wenn $\sim A$ im *IAK* beweisbar ist, gilt, daß $\sim A$ eine Tautologie ist, da alle Theoreme des *IAK* Tautologien sind. Wenn $\sim A$ eine Tautologie der zweiwertigen Aussagenalgebra ist, so ist nach *MT2* $\sim\sim\sim A$ im *IAK* beweisbar, und nach *T8* ist auch $\sim A$ im *IAK* beweisbar.

MT4. Eine Formel A, die als Operatoren nur $\sim$ und $\wedge$ enthält, ist im *IAK* genau dann beweisbar, wenn sie eine Tautologie der zweiwertigen Aussagenalgebra ist.

Beweis: Wenn die Formel A im *IAK* beweisbar ist, ist sie eine Tautologie, da alle Theoreme des *IAK* Tautologien sind. Wenn A eine Tautologie der zweiwertigen Aussagenalgebra ist, so hat sie die Form $\sim B$ oder ist eine Konjunktion von Formeln der Form $\sim B_1, \ldots, \sim B_n$ $(n \geq 2)$, wobei $\sim B_1, \ldots, \sim B_n$ Tautologien sind. Da die Formeln $\sim B$, $\sim B_1$, …, $\sim B_n$ Tautologien sind, sind sie im *KAK* beweisbar. Auf Grund von *MT3* sind $\sim B$, $\sim B_1$, …, $\sim B_n$ dann auch im *IAK* beweisbar. Durch mehrmalige Anwendung von *T25* erhalten wir aus $\sim B_1$, …, $\sim B_n$ die Konjunktion dieser Formeln.

MT5. Der *IAK* enthält als Teilsystem einen vollständigen *KAK*.

Beweis: Auf Grund von *MT4* sind im *IAK* und im *KAK* die gleichen Formeln beweisbar, die als Operatoren nur die Negation $\sim$ und Konjunktion $\wedge$ enthalten. Wir wissen aber, daß im *KAK* der Komplex von Grundoperatoren $\sim$ und $\wedge$ funktional vollständig ist, d. h., alle anderen Operatoren des *KAK* sind mit deren Hilfe definierbar. Wir treffen im *IAK* die gleichen Definitionen dieser Operatoren wie im *KAK* und erhalten einen vollständigen *KAK* als Teilsystem des *IAK*.

Der Nachteil dieses Systems besteht darin, daß es jeweils zwei Adjunktionen, Subjunktionen etc. enthält, die sich inhaltlich schwierig deuten lassen. Einen wesentlichen Beitrag zu einer vernünftigen inhaltlichen Deutung der intuitionistischen Logik leistete K. Gödel, der einen Weg vorschlug, wie man die konstruktive Logik im Rahmen der klassischen Logik vernünftig deuten kann. Dieser Deutung wenden wir uns im nächsten Abschnitt zu.

12.6 Die konstruktive Logik als eine spezielle epistemische Logik. Gödels Beweisbarkeitskalkül *B*

K. Gödel schlug in seiner Arbeit „Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls“ (Gödel 1933a) einen Beweisbarkeitskalkül vor, den wir im folgenden in etwas modifizierter Form darstellen.

Als Basiskalkül für den Gödelschen Beweisbarkeitskalkül *B* wählen wir den axiomatischen Aufbau der klassischen Aussagenlogik *NS* mit den Grundoperatoren $\sim$ und $\supset$ sowie den definierten Operatoren $\vee$, $\wedge$, $\equiv$ etc. Die intuitionistischen Operatoren stellen wir in diesem Abschnitt entsprechend durch folgende Symbole dar: $\dot{\sim}$, $\cdot\supset$, $\dot{\wedge}$, $\dot{\vee}$ und $\dot{\equiv}$. Das Alphabet des Kalküls *NS* ergänzen wir durch den Operator b. Dieser Operator b kann gelesen werden als „ist beweisbar“, d. h., eine Formel bA ist aufzufassen als „A ist beweisbar“. Es handelt sich bei b also eigentlich um ein Prädikat, das aber im Kalkül *B* als logischer Operator angesehen wird.

Die Formeldefinition des Kalküls *NS* wird durch folgende Punkte ergänzt:

5. Wenn A eine aussagenlogische Formel ist, so ist A eine Formel des B-Kalküls.
6. Wenn A eine aussagenlogische Formel ist, so ist bA eine Formel des B-Kalküls.

Zu den Axiomen von *NS* werden folgende B-Axiome hinzugefügt:

A4. $bp \supset p$
A5. $bp \supset (b(p \supset q) \supset bq)$
A6. $bp \supset bbp$.

Außerdem wird folgende zusätzliche Schlußregel gesetzt:

R3. Aus A erhält man bA (b-Regel).

Inhaltlich sind die beiden ersten B-Axiome vollkommen akzeptabel. *A4* besagt: Wenn eine Aussage beweisbar ist, so gilt sie. *A5* besagt: Wenn eine Subjunktion und außerdem ihr Antezedent beweisbar sind, so ist auch ihr Konsequent beweisbar. *A6* könnte zweifelhaft erscheinen, da man den Iterationen von b keinen vernünftigen Sinn geben kann. Aber man kann *A6* gerade als technisches Hilfsmittel ansehen, um solche Iterationen auszuschließen. Mit *A4, A6* und der klassischen Aussagenlogik (Hinweise auf sie kürzen wir im weiteren mit *AL* ab) läßt sich folgendes Theorem beweisen:

T1. $b \ldots bp \equiv bp$

Der Beweisbegriff wird analog dem in *NS* definiert, nur daß wir im B-Kalkül mehr Axiome und Schlußregeln zur Verfügung haben. Da die Regel *R3* eine schwache logische Schlußregel ist, d. h. zwar von Theoremen stets zu Theoremen führt, aber nicht auf beliebige Annahmeformeln anwendbar ist, definieren wir den Begriff des Beweises aus Annahmen im B-Kalkül so, daß die Regel *R3* nur auf Axiome, Varianten von Axiomen und Theoreme anwendbar ist. Unter dieser Voraussetzung gilt auch im B-Kalkül das Deduktionstheorem:

MT1. Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, so $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$.

Zum Beweis der Widerspruchsfreiheit des B-Kalküls wählen wir folgende semantische Interpretation:

1) In den Formeln des B-Kalküls werden alle Vorkommen von b gestrichen;
2) die Operatoren werden als Operatoren der klassischen zweiwertigen Aussagenalgebra interpretiert.

Bei dieser Interpretation gilt:

MT2. Alle Theoreme des B-Kalküls sind Tautologien.
MT3. Die Formel $p \supset bp$ ist kein Theorem des B-Kalküls.

Beweis: Wir beweisen die Unabhängigkeit von $p \supset bp$ von den Axiomen *A4*—*A6* mit Hilfe folgender semantischer Interpretation:

1. Die Operatoren $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ und $\equiv$ werden als die Operatoren der zweiwertigen Aussagenalgebra interpretiert.
2. Wenn A eine Tautologie ist, so ist bA eine Tautologie.
3. Wenn A keine Tautologie ist, so hat bA den Wert f.

Bei dieser Interpretation sind *A4*-*A6* Tautologien, die Schlußregeln erhalten den tautologischen Charakter der Theoreme, und $p \supset bp$ ist keine Tautologie, wenn wir p den Wert v zuschreiben.

Wir definieren jetzt induktiv über den Aufbau einer Formel A eine Übersetzungsoperation $c(A)$, die jeder Formel der intuitionistischen Aussagenlogik A ihre Übersetzung $c(A)$ in der Sprache des B-Kalküls zuordnet:

1. Wenn die Formel A eine Aussagenvariable oder die Konstante f ist, so ist die Übersetzung $c(A)$ die Formel A selber.
2. $c(\dot{\sim}A) = \sim bc(A)$
3. $c(A\dot{\wedge}B) = b(bc(A) \wedge bc(B))$
4. $c(A\dot{\vee}B) = b(bc(A) \vee bc(B))$
5. $c(A\cdot \supset B) = b(bc(A) \supset bc(B))$
6. $c(A\dot{\equiv}B) = b(bc(A) \equiv bc(B))$.

Es ist offensichtlich, daß wir mit Hilfe der Übersetzungsoperation $c(A)$ jede Formel der intuitionistischen Aussagenlogik in die Sprache des B-Kalküls übersetzen können. Wenn A eine Formel der intuitionistischen Logik ist, so nennen wir die Formel $c(A)$ ihre *B-Übersetzung.* Als Beispiel eines IAK betrachten wir im weiteren das System aus Übung 4 des Abschnitts 3. Die Axiome dieses Systems sind:

A1. $p\cdot \supset (q\cdot \supset p)$
A2. $p\cdot \supset (q\cdot \supset r)\cdot \supset (p\cdot \supset q\cdot \supset (p\cdot \supset r))$
A3. $p\dot{\wedge}q\cdot \supset p$
A4. $p\dot{\wedge}q\cdot \supset q$
A5. $p\cdot \supset q\cdot \supset (p\cdot \supset r\cdot \supset (p\cdot \supset q\dot{\wedge}r))$
A6. $p\cdot \supset p\dot{\vee}q$
A7. $q\cdot \supset p\dot{\vee}q$
A8. $p\cdot \supset r\cdot \supset (q\cdot \supset r\cdot \supset (p\dot{\vee}q\cdot \supset r))$
A9. $f\cdot \supset p$

Schlußregeln sind die Einsetzungs- und Abtrennungsregel.

Als B-Übersetzungen der Axiome erhalten wir entsprechend:

c(A1). $b(bp \supset bb(bq \supset bp)$
c(A2). $b(bb(bp \supset bb(bq \supset br)) \supset bb(bb(bp \supset bq) \supset bb(bp \supset br)))$
c(A3). $b(bb(bp \wedge bq) \supset bp)$
c(A4). $b(bb(bp \wedge bq) \supset bq)$
c(A5). $b(bb(bp \supset bq) \supset bb(bb(bp \supset br) \supset bb(bp \supset bb(bq \wedge br))))$
c(A6). $b(bp \supset bb(bp \vee bq))$
c(A7). $b(bq \supset bb(bp \vee bq))$
c(A8). $b(bb(bp \supset br) \supset bb(bb(bq \supset br) \supset bb(bb(bp \vee bq) \supset br)))$
c(A9). $b(b\,f \supset bp)$.

Aus *A5* des B-Kalküls erhalten wir mit Hilfe des Gesetzes der Prämissenvertauschung unmittelbar:

T2. $b(p \supset q) \supset (bp \supset bq)$

Zum Beweis des Ersetzbarkeitstheorems für den B-Kalkül benötigen wir folgendes Metatheorem:

MT4. Wenn $\vdash A \equiv B$, so $\vdash bA \equiv bB$.

Beweis:

1.	$\vdash A \equiv B$	(Annahme)
2.	$\vdash A \supset B$	(1., AL)
3.	$\vdash B \supset A$	(1., AL)
4.	$\vdash b(A \supset B)$	(2., $R3$)

5. $\vdash b(B \supset A)$ (3., *R3*)
6. $\vdash bA \supset bB$ (4., *T2*, *AL*)
7. $\vdash bB \supset bA$ (5., *T2*, *AL*)
8. $\vdash bA \equiv bB$ (6., 7., *AL*)

Für den B-Kalkül gilt folgendes Ersetzbarkeitstheorem:

MT5. Wenn $\vdash A \equiv B$, so $\vdash C \equiv C[A/B]$.

Der Beweis von *MT5* wird analog wie in der klassischen Aussagenlogik geführt. Für den Fall, daß beim Induktionsschritt C die Form bD hat, erhalten wir die Behauptung des Metatheorems aus der Induktionsannahme $\vdash D \equiv D[A/B]$ mit Hilfe von *MT4*.

Zwischen dem *IAK* und dem B-Kalkül besteht folgende Beziehung:

MT6. Eine Formel A des *IAK* ist im *IAK* genau dann beweisbar, wenn ihre B-Übersetzung $c(A)$ im B-Kalkül beweisbar ist.

MT6 wurde zuerst von Gödel (Gödel 1933a) als Vermutung geäußert und später von A. Tarski (Tarski 1938) bewiesen (vgl. auch Novikov 1977). Wir wollen hier nur andeuten, wie der folgende Teil von *MT6* zu beweisen ist:

MT6a. Wenn eine Formel A des *IAK* im *IAK* beweisbar ist, so ist ihre B-Übersetzung $c(A)$ im B-Kalkül beweisbar.

Für den Beweis des zweiten Teils von *MT6* stehen uns hier nicht die nötigen Hilfsmittel zur Verfügung. Um *MT6a* zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß 1. das Metatheorem für alle Axiome eines *IAK* gilt, und 2. die Behauptung des Metatheorems bei einer Anwendung der Schlußregeln dieses *IAK* gültig bleibt. Wir wählen als *IAK* das System aus Übung 4 des Abschnitts 3 und müssen also zunächst zeigen, daß die Formeln $c(A1)$-$c(A9)$ im B-Kalkül beweisbar sind. Wegen *T1*, *MT5* und *R3* ist dazu ausreichend, die folgenden Formeln zu beweisen:

T3. $bp \supset b(bq \supset bp)$
T4. $b(bp \supset b(bq \supset br)) \supset b(b(bp \supset bq) \supset b(bp \supset br))$
T5. $b(bp \wedge bq) \supset bp$
T6. $b(bp \wedge bq) \supset bq$
T7. $b(bp \supset bq) \supset b(b(bp \supset br) \supset b(bp \supset b(bq \wedge br)))$
T8. $bp \supset b(bp \vee bq)$
T9. $bq \supset b(bp \vee bq)$
T10. $b(bp \supset br) \supset b(b(bq \supset br) \supset b(b(bp \vee bq) \supset br))$
T11. $bf \supset bp$.

Wir beweisen diese Formeln im B-Kalkül.

T3. $bp \supset b(bq \supset bp)$

1. $bp \supset (bq \supset bp)$ (*AL*)
2. $b(bp \supset (bq \supset bp))$ (1., *R3*)
3. $bbp \supset b(bq \supset bp)$ (2., *T2*, *AL*)
4. $bp \supset b(bq \supset bp)$ (3, *T1*, *MT5*)

T4. $b(bp \supset b(bq \supset br)) \supset b(b(bp \supset bq) \supset b(bp \supset br))$

1. $bp \supset (bq \supset br) \supset (bp \supset bq \supset (bp \supset br))$ (*AL*)
2. $b(bp \supset (bq \supset br)) \supset b(bp \supset bq \supset (bp \supset br))$ (1., *T2*, *R3*, *AL*)
3. $b(bp \supset bq \supset (bp \supset br)) \supset (b(bp \supset bq) \supset b(bp \supset br))$ (*T2*)

4. $b(bp \supset (bq \supset br)) \supset (b(bp \supset bq) \supset b(bp \supset br))$ (2., 3., *AL*)
5. $b(b(bp \supset (bq \supset br)) \supset (b(bp \supset bq) \supset b(bp \supset br)))$ (4., *R3*)
6. $bb(bp \supset (bq \supset br)) \supset b(b(bp \supset bq) \supset b(bp \supset br))$ (5., *T2*, *AL*)
7. $b(bp \supset (bq \supset br)) \supset b(b(bp \supset bq) \supset b(bp \supset br))$ (6, *T1*, *MT5*)

T5. $b(bp \wedge bq) \supset bp$

1. $bp \wedge bq \supset bp$ (*AL*)
2. $b(bp \wedge bq \supset bp)$ (1., *R3*)
3. $b(bp \wedge bq) \supset bbp$ (2., *T2*, *AL*)
4. $b(bp \wedge bq) \supset bp$ (3, *T1*, *MT5*)

T6. wird wie *T5* bewiesen.

T7. $b(bp \supset bq) \supset b(b(bp \supset br) \supset b(bp \supset b(bq \wedge br)))$

1. $bp \supset bq \supset (bp \supset br \supset (bp \supset bq \wedge br))$ (*AL*)
2. $b(bp \supset bq \supset (bp \supset br \supset (bp \supset bq \wedge br)))$ (1., *R3*)
3. $b(bp \supset bq) \supset b(bp \supset br \supset (bp \supset bq \wedge br))$ (2., *T2*, *AL*)
4. $b(bp \supset bq) \vdash b(bp \supset br \supset (bp \supset bq \wedge br))$ (3., *R2*)
5. $b(bp \supset bq) \vdash b(bp \supset br) \supset b(bp \supset bq \wedge br)$ (4., *T2*, *A2*)
6. $b(bp \supset bq), b(bp \supset br) \vdash b(bp \supset bq \wedge br)$ (5., *R2*)
7. $b(bp \supset bq), b(bp \supset br) \vdash bbp \supset b(bq \wedge br)$ (6., *T2*, *A2*)
8. $b(bp \supset bq) \supset (b(bp \supset br) \supset (bbp \supset b(bq \wedge br)))$ (7., *DT*)
9. $b(bp \supset bq) \supset (b(bp \supset br) \supset (bp \supset b(bq \wedge br)))$ (*T1*, 8., *MT5*)
10. $bb(bp \supset bq) \vdash b(b(bp \supset br) \supset (bp \supset b(bq \wedge br)))$ (9., *R3*, *T2*, *AL*, *R1*)
11. $bb(bp \supset bq) \vdash bb(bp \supset br) \supset b(bp \supset b(bq \wedge br))$ (10., *T2*, *AL*)
12. $bb(bp \supset bq) \supset (bb(bp \supset br) \supset b(bp \supset b(bq \wedge br)))$ (11., *DT*)
13. $b(bp \supset bq) \supset b(b(bp \supset br) \supset b(bp \supset b(bq \wedge br)))$ (12., *R3*, *T2*, *AL*, *T1*, *MT5*)

T8. $bp \supset b(bp \vee bq)$

1. $bp \supset bp \vee bq$ (*AL*)
2. $bbp \supset b(bp \vee bq)$ (1., *R3*, *T2*, *AL*)
3. $bp \supset b(bp \vee bq)$ (2., *T1*, *MT5*)

T9. wird wie *T8* bewiesen.

T10. $b(bp \supset br) \supset b(b(bq \supset br) \supset b(b(bp \vee bq) \supset br))$

1. $bp \supset br \supset (bq \supset br \supset (bp \vee bq \supset br))$ (*AL*)
2. $b(bp \supset br) \supset b(bq \supset br \supset (bp \vee bq \supset br))$ (*R3*, 1., *T2*, *AL*)
3. $b(bq \supset br \supset (bp \vee bq \supset br)) \supset (b(bq \supset br) \supset b(bp \vee bq \supset br))$ (*T2*)
4. $b(bp \supset br) \supset (b(bq \supset br) \supset b(bp \vee bq \supset br))$ (2., 3., *AL*)
5. $b(bp \supset br), b(bq \supset br) \vdash b(bp \vee bq \supset br)$ (4., *R2*)
6. $b(bp \supset br), b(bq \supset br) \vdash b(bp \vee bq) \supset bbr$ (5., *T2*, *AL*)
7. $b(bp \supset br) \supset (b(bq \supset br) \supset (b(bp \vee bq) \supset br))$ (6., *DT*, *T1*, *MT5*)
8. $bb(bp \supset br) \supset b(b(bq \supset br) \supset (b(bp \vee bq) \supset br))$ (7., *R3*, *T2*, *AL*)
9. $bb(bp \supset br) \supset (bb(bq \supset br) \supset b(b(bp \vee bq) \supset br))$ (8., *T2*, *AL*)
10. $b(bp \supset br) \supset b(b(bq \supset br) \supset b(b(bp \vee bq) \supset br))$ (9., *R3*, *T2*, *AL*, *T1*, *MT5*)

T11. $bf \supset bp$

1. $f \supset p$ (*AL*)
2. $bf \supset bp$ (1., *R3*, *T2*, *AL*)

Damit haben wir bewiesen, daß die B-Übersetzungen der Axiome des betrachteten IAK im B-Kalkül beweisbar sind. Es bleibt zu zeigen, daß die Behauptung von *MT6a* bei einer Anwendung der beiden Schlußregeln des IAK gültig bleibt, d. h., es ist zu zeigen, daß die beiden Regeln

R1^i. $\dfrac{\vdash c(A)}{\vdash c(A\{a/B\})}$ und

R2^i. $\dfrac{\vdash c(A) \quad \vdash c(A\cdot \supset B)}{\vdash c(B)}$

abgeleitete Schlußregeln des B-Kalküls sind. Wir zeigen zunächst, daß $R1^i$ eine abgeleitete Regel des B-Kalküls ist. Die Variablen in den Formeln A und $c(A)$ sind nach Punkt 1 der Definition der Übersetzungsoperation c die gleichen. Wir können also nach der Regel *R1* des B-Kalküls in der Formel $c(A)$ für die Variable a die Formel $c(B)$ einsetzen und erhalten $c(A)\{a/c(B)\}$. Durch Induktion über die Anzahl von logischen Operatoren in A läßt sich leicht zeigen, daß die Formel $c(A)\{a/c(B)\}$ mit der Formel $c(A\{a/B\})$ identisch ist. Als Voraussetzungen der Regel $R2^i$ haben wir:

1. $\vdash c(A)$,
2. $\vdash c(A\cdot \supset B)$, d. h. $\vdash b(bc(A) \supset bc(B))$.
   Aus 2 erhalten wir mit *T2*
3. $\vdash bbc(A) \supset bbc(B)$.
   Mit *T1* und *MT5* erhalten wir hieraus
4. $\vdash bc(A) \supset bc(B)$.
   Aus 1 erhalten wir nach *R3*
5. $\vdash bc(A)$.
   Aus 4 und 5 ergibt sich nach *R2*
6. $\vdash bc(B)$.
   Und schließlich mit *A4*
7. $\vdash c(B)$.

Damit ist *MT6a* bewiesen.

Wir haben hier den Gödelschen B-Kalkül nicht dargestellt, weil wir ihn für eine besonders gute Explikation des epistemischen Prädikates „ist beweisbar“ halten (Gödel hat ihn sicher auch nicht mit dieser Absicht aufgestellt), sondern nur, weil er in gewisser Weise die Ambitionen (und die logischen Fehler und Verwechslungen) der Intuitionisten verdeutlicht.

Der B-Kalkül veranschaulicht, wie man ohne Einschränkung der klassischen Logik das Anliegen der Intuitionisten durch eine Erweiterung der klassischen Logik realisieren kann. Der B-Kalkül ist natürlich ausdrucksstärker als die intuitionistische Logik, da nur ein Teil der Theoreme des B-Kalküls in die Sprache der intuitionistischen Logik adäquat übersetzt werden kann.

Übungen:

1. Beweisen Sie *T1*!
2. Beweisen Sie *MT1*!
3. Beweisen Sie *MT5*!
4. Übersetzen Sie die Axiome *A9-A13* des IAK aus Abschnitt 3 gemäß der Operation $c(A)$ in die Sprache des B-Kalküls! Beweisen Sie $c(A9)$-$c(A13)$!

12.7 Axiomatischer Aufbau der intuitionistischen Quantorenlogik

Die Unterschiede zwischen dem intuitionistischen Quantorenkalkül (IQK) und dem klassischen Quantorenkalkül (KQK) ergeben sich lediglich aus den Unterschieden zwischen dem intuitionistischen und dem klassischen Aussagenkalkül, d. h., wenn wir die folgenden quantorenlogischen Ergänzungen zu einem KAK hinzufügen, erhalten wir einen KQK, und wenn wir sie zu einem IAK hinzufügen, erhalten wir einen IQK. Zum Alphabet des IAK werden Symbole für Individuen- und Prädikatenvariablen sowie die Operatoren $\forall$ und $\exists$ hinzugefügt. Prädikatformeln und quantorenlogische Formeln werden wie im KQK definiert. Ebenso übernehmen wir die Definition von freien und gebundenen Vorkommen von Variablen aus dem KQK. Aus Gründen der Einfachheit geben wir eine Axiomatisierung der intuitionistischen Quantorenlogik mit Axiomenschemata an. Als IAK wählen wir das folgende System, das dem IAK aus Abschnitt 3 deduktiv äquivalent ist.

Aussagenlogische Axiomenschemata:

A1. $A \supset (B \supset A)$
A2. $A \supset (B \supset C) \supset (A \supset B \supset (A \supset C))$
A3. $A \wedge B \supset A$
A4. $A \wedge B \supset B$
A5. $A \supset B \supset (A \supset C \supset (A \supset B \wedge C))$
A6. $A \supset A \vee B$
A7. $A \supset B \vee A$
A8. $A \supset C \supset (B \supset C \supset (A \vee B \supset C))$
A9. $(A \equiv B) \supset (A \supset B)$
A10. $(A \equiv B) \supset (B \supset A)$
A11. $A \supset B \supset ((B \supset A) \supset (A \equiv B))$
A12. $\sim A \supset (A \supset B)$
A13. $(A \supset \sim A) \supset \sim A$

Quantorenlogische Axiomenschemata:

A14. $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall iB)$,
wobei i eine Individuenvariable ist, die nicht frei in A vorkommt.
A15. $\forall i(B \supset A) \supset (\exists iB \supset A)$,
wobei i eine Individuenvariable ist, die nicht frei in A vorkommt.
A16. $\forall iA \supset A\{i/j\}$,
wobei A keine Vorkommen der Form $\forall jC$ und $\exists jC$ mit freien Vorkommen von i enthält.
A17. $A\{i/j\} \supset \exists iA$
wobei A keine Vorkommen der Form $\forall jC$ und $\exists jC$ mit freien Vorkommen von i enthält.

Schlußregeln:

R1. Aus $A \supset B$ und A erhält man B (Abtrennungsregel).
R2. Aus A erhält man $\forall iA$ (Generalisierungsregel).

Obwohl die Ergänzungen von einem KAK zum KQK und von einem IAK zum IQK gleich sind, unterscheiden sich auf Grund der Unterschiede in der akzeptierten Aussagenlogik die Klassen der Theoreme eines KQK und eines IQK wesentlich.

12.8 Darstellung der intuitionistischen Logik als Sequenzenkalkül

Außer den semantischen und axiomatischen Aufbauten von Logiksystemen und außer den Annahmesystemen des natürlichen Schließens ist in der Logik eine Methode zum Aufbau und zur Darstellung von Logiksystemen weit verbreitet, die man *Sequenzenkalküle* oder *Systeme vom Gentzenschen Typ* nennt. Systeme dieser Art sowohl für die klassische als auch für die intuitionistische Logik wurden zuerst von G. Gentzen in seiner Arbeit „Untersuchungen über das logische Schließen" (Gentzen 1934-35) publiziert.

Beim Aufbau eines Sequenzenkalküls werden die Definitionen einer aussagenlogischen und quantorenlogischen Formel vorausgesetzt. Zum Alphabet werden Kommata und das Sequenzenzeichen $\longrightarrow$ hinzugefügt, wobei diese Zeichen Hilfszeichen und keine logischen Zeichen sind. Anschließend wird definiert, was eine Sequenz ist.

D1. Definition einer **Sequenz**: $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow B_1, \ldots, B_m$ (wobei $n \geq 0$, $m \geq 0$) ist eine Sequenz genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ Formeln sind.

D2. In *D1* bilden die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ das **Antezedent** und die Formeln $B_1, \ldots, B_m$ das **Sukzedent** der Sequenz.

Wenn $n = 0$, so hat eine Sequenz die Form $\longrightarrow B_1, \ldots, B_m$. Wenn $m = 0$, so hat eine Sequenz die Form $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow$; und wenn $n = 0$ und $m = 0$, so hat sie die Form $\longrightarrow$. Eine Sequenz $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow B_1, \ldots, B_m$ wird gewöhnlich inhaltlich als die Formel $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$ gedeutet. Sie läßt sich aber auch als $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \ldots \vee B_m$ deuten, wo $\vdash$ die Ableitbarkeitsbeziehung ist. Eine Sequenz der Form $\longrightarrow B_1, \ldots, B_m$ wird als die Formel $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ bzw. als $\vdash B_1 \vee \ldots \vee B_m$ gedeutet; eine Sequenz der Form $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow$ als die Formel $\sim(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ bzw. als $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset f$, wobei f eine konstante falsche Aussage darstellt, und die leere Sequenz $\longrightarrow$ wird als f gedeutet. Weiter werden die Sequenzenkalküle durch Angabe von Axiomen (Axiomenschemata) und Schlußregeln aufgebaut. Zur Abkürzung der Schreibweise der Schlußregeln verwendet man anstelle der Ausdrücke „Aus X erhält man Y" und „Aus X und Y erhält man Z" (wobei X, Y und Z Sequenzen sind) Schemata der Form:

$$\frac{X}{Y} \qquad\qquad \frac{X;Y}{Z}$$

Wir geben einen Sequenzenkalkül für die intuitionistische Quantorenlogik an, der in einem engen Zusammenhang mit dem folgenden dialogischen Aufbau der intuitionistischen Quantorenlogik steht. Mit einem Symbol der Form $F(A)$ stellen wir eine Folge von Formeln $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 1$) dar, von denen eine die Formel A ist, und mit einem Symbol F eine beliebige Folge von Formeln $A_1, \ldots, A_n$.

Axiome und Schlußregeln des intuitionistischen Sequenzenkalküls *G3*:

Axiomenschema A^0: $F(c) \longrightarrow c$, wobei c eine Aussagenvariable oder Prädikatformel ist.

Sequenzenregeln: (Die Abkürzungen für die entsprechenden Regeln werden bei der folgenden Behandlung des dialogischen Aufbaus der intuitionistischen Logik verständlich.)

1. *NP*: $\dfrac{F, A \longrightarrow}{F \longrightarrow \sim A}$

2. *NO*: $\dfrac{F(\sim A) \longrightarrow A}{F(\sim A) \longrightarrow C}$, wobei C (auch im weiteren) leer sein kann oder eine Formel ist.

3. *KP*: $\dfrac{F \longrightarrow A; F \longrightarrow B}{F \longrightarrow A \wedge B}$

4. KO: $\dfrac{F(A \wedge B), A \longrightarrow C}{F(A \wedge B) \longrightarrow C}$ $\qquad \dfrac{F(A \wedge B), B \longrightarrow C}{F(A \wedge B) \longrightarrow C}$

5. AP: $\dfrac{F \longrightarrow A}{F \longrightarrow A \vee B}$ $\qquad \dfrac{F \longrightarrow B}{F \longrightarrow A \vee B}$

6. AO: $\dfrac{F(A \vee B), A \longrightarrow C; F(A \vee B), B \longrightarrow C}{F(A \vee B) \longrightarrow C}$

7. SP: $\dfrac{F, A \longrightarrow B}{F \longrightarrow A \supset B}$

8. SO: $\dfrac{F(A \supset B) \longrightarrow A; F(A \supset B), B \longrightarrow C}{F(A \supset B) \longrightarrow C}$

In den folgenden quantorenlogischen Sequenzenregeln setzen wir voraus, daß in A die Individuenvariable i frei für eine Einsetzung der Individuenvariablen j ist, d. h., in A gibt es keine Vorkommen der Form $\forall jB$ und $\exists jB$, die i frei enthalten.

9. $\forall P$: $\dfrac{F \longrightarrow A\{i/j\}}{F \longrightarrow \forall iA}$, wobei die Individuenvariable j weder in F noch in $\forall iA$ vorkommt.

10. $\forall O$: $\dfrac{F(\forall iA), A\{i/j\} \longrightarrow C}{F(\forall iA) \longrightarrow C}$

11. $\exists P$: $\dfrac{F \longrightarrow A\{i/j\}}{F \longrightarrow \exists iA}$

12. $\exists O$: $\dfrac{F(\exists iA), A\{i/j\} \longrightarrow C}{F(\exists iA) \longrightarrow C}$, wobei die Individuenvariable j weder in F noch in C vorkommt.

D2. Einen **Beweis einer Sequenz** nennt man eine Folge von Sequenzen, von denen jede ein Axiom ist oder aus vorhergehenden Sequenzen nach den Sequenzenregeln 1 bis 12 gewonnen wurde.

D3. Ein **Theorem von *G3*** nennt man eine Sequenz $\longrightarrow A$, für die es einen Beweis gibt.

Wir führen die Beweise von einigen Theoremen von *G3* an.

T1. $p \supset p \wedge p$

Beweis:
$$\begin{array}{ll} \underline{p \longrightarrow p; p \longrightarrow p} & (A^0) \\ \underline{p \longrightarrow p \wedge p} & (KP) \\ \longrightarrow p \supset p \wedge p & (SP) \end{array}$$

T2. $p \wedge q \supset q \wedge p$

Beweis:
$$\begin{array}{lll} \underline{p \wedge q, q \longrightarrow q} & \underline{p \wedge q, p \longrightarrow p} & (A^0) \\ \underline{p \wedge q \longrightarrow q} & \underline{p \wedge q \longrightarrow p} & (KO) \\ \multicolumn{2}{c}{\underline{p \wedge q \longrightarrow q \wedge p}} & (KP) \\ \multicolumn{2}{c}{\longrightarrow p \wedge q \supset q \wedge p} & (SP) \end{array}$$

T3. $p \supset q \supset (p \wedge r \supset q \wedge r)$

Beweis:

$$\begin{array}{cl}
\underline{p \supset q, p \wedge r, p \longrightarrow p; p \supset q, p \wedge r, p, q \longrightarrow q} & (A^0) \\
\underline{p \supset q, p \wedge r, p \longrightarrow q\ (SO)} \quad \underline{p \supset q, p \wedge r, r \longrightarrow r} & (A^0) \\
\underline{p \supset q, p \wedge r \longrightarrow q\ (KO)} \quad \underline{p \supset q, p \wedge r \longrightarrow r} & (KO) \\
\underline{p \supset q, p \wedge r \longrightarrow q \wedge r} & (KP) \\
\underline{p \supset q \longrightarrow p \wedge r \supset q \wedge r} & (SP) \\
\longrightarrow p \supset q \supset (p \wedge r \supset q \wedge r) & (SP)
\end{array}$$

T4. $p \supset (q \supset p)$

Beweis:

$$\begin{array}{cl}
\underline{p, q \longrightarrow p} & (A^0) \\
\underline{p \longrightarrow q \supset p} & (SP) \\
\longrightarrow p \supset (q \supset p) & (SP)
\end{array}$$

T5. $p \wedge (p \supset q) \supset q$

Beweis:

$$\begin{array}{cl}
\underline{p \wedge (p \supset q), p, p \supset q \longrightarrow p; p \wedge (p \supset q), p, p \supset q, q \longrightarrow q} & (A^0) \\
\underline{p \wedge (p \supset q), p, p \supset q \longrightarrow q} & (SO) \\
\underline{p \wedge (p \supset q), p \longrightarrow q} & (KO) \\
\underline{p \wedge (p \supset q) \longrightarrow q} & (KO) \\
\longrightarrow p \wedge (p \supset q) \supset q & (SP)
\end{array}$$

T6. $p \supset p \vee q$

Beweis:

$$\begin{array}{cl}
\underline{p \longrightarrow p} & (A^0) \\
\underline{p \longrightarrow p \vee q} & (AP) \\
\longrightarrow p \supset p \vee q & (SP)
\end{array}$$

T7. $p \vee q \supset q \vee p$

Beweis:

$$\begin{array}{cl}
\underline{p \vee q, p \longrightarrow p} \quad \underline{p \vee q, q \longrightarrow q} & (A^0) \\
\underline{p \vee q, p \longrightarrow q \vee p; \quad p \vee q, q \longrightarrow q \vee p} & (AP) \\
\underline{p \vee q \longrightarrow q \vee p} & (AO) \\
\longrightarrow p \vee q \supset q \vee p & (SP)
\end{array}$$

T8. $\sim p \supset (p \supset q)$

Beweis:

$$\begin{array}{cl}
\underline{\sim p, p \longrightarrow p} & (A^0) \\
\underline{\sim p, p \longrightarrow q} & (NO) \\
\underline{\sim p \longrightarrow p \supset q} & (SP) \\
\longrightarrow \sim p \supset (p \supset q) & (SP)
\end{array}$$

Es besteht folgende Beziehung zwischen dem hier dargestellten Sequenzenkalkül und dem axiomatischen Aufbau der intuitionistischen Quantorenlogik:

MT1. Eine Formel A ist genau dann im *IQK* beweisbar, wenn die Sequenz $\longrightarrow A$ im Sequenzenkalkül *G3* beweisbar ist.

Übungen:

1. Beweisen Sie folgende Sequenzen in *G3*:
   a) $\longrightarrow (p \supset q) \wedge (q \supset r) \supset (p \supset r)$
   b) $\longrightarrow (p \supset r) \wedge (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)$
   c) $\longrightarrow (p \supset q) \wedge (p \supset \sim q) \supset \sim p$!
2. Beweisen Sie die Behauptung von *MT1* für den aussagenlogischen Teil von *G3* und den *IAK* von Heyting aus Übung 3 des Abschnitts 3! Benutzen Sie dabei die Ergebnisse von Übung 1 und verwenden Sie die im Text angegebene inhaltliche Deutung der Sequenzen!
3. Beweisen Sie die Behauptung von *MT1* für den *IQK*!

12.9 Dialogische Vollständigkeit des *IQK*

Der *IQK* ist in bezug auf die im folgenden angegebene dialogische Interpretation der Logik von P. Lorenzen vollständig. Es werden zwei Personen - *Proponent* (P) und *Opponent* (O) genannt - eingeführt, die einen Dialog um eine logische Formel führen. Der Dialog wird nach folgender *allgemeiner Spielregel* geführt:

1. Der Dialog beginnt mit dem Setzen einer Formel durch den Proponenten.
2. Der Proponent darf nur eine der vom Opponenten behaupteten zusammengesetzten Formeln angreifen oder sich gegen den letzten Angriffszug des Opponenten verteidigen.
3. Der Opponent darf nur die im vorhergehenden Zuge des Proponenten gesetzte Formel angreifen oder sich gegen den Angriff des Proponenten im vorhergehenden Zuge verteidigen.

Die Verwendung der logischen Operatoren im Dialog wird durch folgende *Operatorenregeln* festgelegt:

Behauptung	Angriff	Verteidigung
$\sim A$	$A?$	nicht möglich
$A \wedge B$	$?L$	A
$A \wedge B$	$?R$	B
$A \vee B$	$?$	A
$A \vee B$	$?$	B
$A \supset B$	$A?$	B
$\forall i A$	$?(j)$	$A\{i/j\}$
$\exists i A$	$?$	$A\{i/j\}$

In den letzten beiden Regeln (und auch in den später folgenden entsprechenden Sequenzenregeln) wird immer vorausgesetzt, daß in A die Individuenvariable i frei für eine Einsetzung der Individuenvariablen j ist, d. h., in A gibt es keine Vorkommen der Form $\forall j B$ oder $\exists j B$, die i frei enthalten.

In dieser Tabelle bedeutet ? das Angriffszeichen, $?L$ bedeutet einen Angriff auf die linke Teilformel, und $?R$ einen Angriff auf die rechte Teilformel, während $A?$ bedeutet, daß der entsprechende Angriff mit der Behauptung von A durch den Angreifenden verbunden ist.

Der Unterschied zwischen den Operatorenregeln für die Konjunktion und die Adjunktion besteht darin, daß bei einer Konjunktion der Angreifende die Teilformel bestimmen kann, die zu verteidigen ist, während bei einer Adjunktion der Verteidiger diese Teilformel auswählen kann. Analog kann bei der Allquantorenregel der Angreifende eine Individuenvariable j vorgeben, während bei der Einsquantorenregel der Verteidiger diese Variable auswählt.

Die Gewinnregel für die Dialoge lautet: Der Proponent hat gewonnen, wenn er eine Aussagenvariable oder Prädikatformel c zu verteidigen hat, die bereits vom Opponenten behauptet wurde.

D1. Eine Formel ist eine **dialogische Tautologie** genau dann, wenn der Proponent einen Dialog um sie gegen jede Strategie des Opponenten gewinnen kann.

Ein Dialog führt gemäß den Operatorenregeln immer von komplizierten zu einfacheren Formeln und schließlich zu Aussagenvariablen oder Prädikatformeln. Wir geben zunächst einige Beispiele von Dialogen um aussagenlogische Formeln an und schreiben hinter dem Angriffszeichen jeweils die Nummer der angegriffenen Zeile:

Opponent	Proponent
	1. $p \wedge q \supset q \wedge p$
2. $p \wedge q ?1$	3. $?2L$
4. p	5. $?2R$
6. q	7. $q \wedge p$
8. $?3L$	9. q
10. $?3R$	11. p

Den Dialog um diese Formel hat der Proponent gewonnen. Für den Opponent kommt als andere Strategie im achten Zug nur der Angriff $?3R$ in Frage, und auch diesen Dialog gewinnt der Proponent. Die Formel ist also eine dialogische Tautologie.

Wir betrachten einen anderen Dialog:

Opponent	Proponent
	1. $p \wedge q \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$
2. $p \wedge q ?1$	3. $\sim(\sim p \vee \sim q)$
4. $(\sim p \vee \sim q)$	5. $?2L$
6. p	7. $?2R$
8. q	9. $?4$
10a. $\sim p$ | 10b. $\sim q$	11a. $p?10a.$ | 11b. $q?10b.$

Auch diesen Dialog hat der Proponent gewonnen, da sich der Opponent auf die letzten Angriffe nicht verteidigen kann. Auf den Angriff von P im 9. Zug kann O auf unterschiedliche Weise reagieren, deshalb spaltet sich der Dialog in zwei Teildialoge auf.

Nicht alle logischen Tautologien lassen sich im Dialog verteidigen. Das folgende Beispiel mag das illustrieren:

Opponent	Proponent
	1. $p \vee \sim p$
2. $?1$	
4a. | 4b. $p?3b.$	3a. p | 3b. $\sim p$

Im zweiten Zug sind für P zwei Varianten möglich. Er kann entweder p setzen und verliert gleich, oder er setzt $\sim p$ und verliert einen Zug später. Ebenso läßt sich die Formel $\sim\sim p \supset p$ nicht erfolgreich im Dialog verteidigen.

Opponent	Proponent
	1. $\sim\sim p \supset p$
2. $\sim\sim p?1$	3. $\sim p?2$
4. $p?3$	

In diesem Dialog könnte der Proponent im dritten Zug auch p behaupten, hätte dann allerdings den Dialog schon verloren.

Wir betrachten jetzt einige Dialoge um quantorenlogische Formeln.

Opponent		Proponent	
		1. $\forall x P(x) \vee \exists x {\sim} P(x)$	
2. ?*1*		3a. $\forall x P(x)$	3b. $\exists x {\sim} P(x)$
4a. ?*3a*(y)	4b. ?*3b*	5a. $P(y)$	5b. ${\sim} P(y)$
	6b. $P(y)$?*5b.*		

Im dritten Zug hat der Proponent zwei Möglichkeiten, er verliert jedoch beide Varianten des Dialogs.

Opponent	Proponent
	1. $\forall x P(x) \supset {\sim}\exists x {\sim} P(x)$
2. $\forall x P(x)$?*1*	3. ${\sim}\exists x {\sim} P(x)$
4. $\exists x {\sim} P(x)$?*3*	5. ?*4*
6. ${\sim} P(y)$	7. ?*2y*
8. $P(y)$	9. $P(y)$?*6*

Diesen Dialog gewinnt der Proponent, während sich die umgekehrte Subjunktion nicht erfolgreich verteidigen läßt.

Opponent	Proponent
	1. ${\sim}\exists x {\sim} P(x) \supset \forall x P(x)$
2. ${\sim}\exists x {\sim} P(x)$	3. $\forall x P(x)$
4. ?*3y*	5. $\exists x {\sim} P(x)$?*2*
6. ?*5*	7.${\sim} P(x)$
8. $P(x)$?*7*	

Für den dialogischen Aufbau der Logik gilt folgendes Metatheorem:

MT1. Eine quantorenlogische Formel A ist genau dann eine dialogische Tautologie, wenn die Sequenz $\longrightarrow A$ im intuitionistischen Quantorenkalkül *G3* beweisbar ist.

Wir beweisen nur die eine Richtung von *MT1*: Wenn eine Formel A eine dialogische Tautologie ist, so ist $\longrightarrow A$ in *G3* beweisbar. Den Beweis der Umkehrung überlassen wir dem Leser.

Wenn eine Formel eine dialogische Tautologie ist, so gibt es nach der Gewinnregel einen Dialog, der mit einer Gewinnposition folgender Form endet (c ist eine Aussagenvariable oder Prädikatformel):

O	P
.	.
.	.
.	.
c	.
.	.
.	.
.	c

Wenn P durch passende Züge nach den Operatorenregeln in einem Dialog eine solche Gewinnposition erreichen kann, so sagen wir, daß er über eine *Gewinnstrategie* verfügt.

Es läßt sich nun ein Sequenzenkalkül aufbauen, der es gestattet, systematisch alle Gewinnstrategien abzuleiten, d. h., der ein Verfahren zur systematischen Herleitung aller dialogischen Tautologien liefert. Dazu braucht man die Dialoge nur ausgehend von einer Gewinnposition von unten nach oben aufzubauen, denn es ist offensichtlich: Wenn eine Dialogstellung nach Anwendung einer der Operatorenregeln zu einer Gewinnstellung führt, so führt auch die Dialogstellung vor dieser Anwendung zu einer Gewinnposition. Um den Zusammenhang mit dem im folgenden angegebenen Sequenzenkalkül zu verdeutlichen, schreiben wir die Operatorenregeln in einer etwas anderen schematischen Form und unterscheiden jeweils eine Operatorenregel für den Proponenten und den Opponenten:

1. *Negationsregel für den Proponenten* (NP):

$$\begin{array}{r|l} . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & \sim A \\ . & \\ . & \\ A & \end{array}$$

2. *Negationsregel für den Opponenten* (NO):

$$\begin{array}{r|l} . & . \\ . & . \\ . & . \\ \sim A & . \\ . & . \\ . & A \end{array}$$

3. *Konjunktionsregel für den Proponenten* (KP):

$$\begin{array}{r|l} & . \\ & . \\ & . \\ & A \wedge B \\ ?L \mid ?R & A \mid B \end{array}$$

4. *Konjunktionsregeln für den Opponenten* (KO):

$$\begin{array}{l|l} A \wedge B & \\ . & \\ . & ?L \\ . & \\ A & \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{l|l} A \wedge B & \\ . & \\ . & ?R \\ . & \\ B & \end{array}$$

5. *Adjunktionsregeln für den Proponenten* (AP):

$$\begin{array}{r|l} . & A \vee B \\ . & . \\ . & . \\ ? & A \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r|l} . & A \vee B \\ . & . \\ . & . \\ ? & B \end{array}$$

6. *Adjunktionsregel für den Opponenten* (AO):

$$\begin{array}{r|l} . & . \\ . & . \\ A \vee B & ? \\ A \mid B & \end{array}$$

7. *Subjunktionsregel für den Proponenten* (SP):

$$\begin{array}{r|l} . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & A \supset B \\ A & . \\ . & . \\ . & . \\ . & B \end{array}$$

8. *Subjunktionsregel für den Opponenten* (SO):

$$\begin{array}{l|l} . & . \\ . & . \\ . & . \\ A \supset B & . \\ . & . \\ . & A \\ . & . \\ B & \end{array}$$

9. *Allquantorenregel für den Proponenten* $(\forall P)$:

$$\begin{array}{r|l} & . \\ & . \\ & . \\ & \forall i A \\ & . \\ & . \\ & . \\ ?j & A\{i/j\} \end{array}$$

Da der Opponent die Individuenvariable j vorgeben kann, wird er die für ihn günstigste Variante wählen, d. h. ein solches j, das im bisherigen Dialog noch nicht vorkommt.

10. *Allquantorenregel für den Opponenten* $(\forall O)$:

$$\begin{array}{l|l} \forall i A & . \\ . & . \\ . & ?j \\ . & . \\ A\{i/j\} & . \\ & . \end{array}$$

11. *Partikularisatorregel für den Proponenten* ($\exists P$):

$$\begin{array}{c|l}
 & \exists iA \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
? & A\{i/j\} \\
. & \\
. & \\
. &
\end{array}$$

12. *Partikularisatorregel für den Opponenten* ($\exists O$):

$$\begin{array}{l|l}
\exists iA & . \\
. & . \\
. & . \\
. & ? \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
A\{i/j\} &
\end{array}$$

Für die Wahl der Individuenvariablen j durch den Opponenten gilt das bereits in der Regel 9 Gesagte. Bei einer bestimmten Dialogstellung sind nach der allgemeinen Spielregel für den weiteren Verlauf alle behaupteten Formeln des Opponenten und die letzte Formel des Proponenten relevant. Wir können deshalb eine Dialogstellung durch eine Sequenz folgender Form beschreiben: $A_1, A_2, \ldots, A_n \longrightarrow B$, wobei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alle Behauptungen des Opponenten sind, B die letzte behauptete Formel des Proponenten ist, $n \geq 0$, und B auch leer sein kann. Einer Gewinnposition entspricht dann eine Sequenz, die unter folgendes Axiomenschema fällt: A^0. $F(c) \longrightarrow c$, wobei c eine Aussagenvariable oder Prädikatformel und $F(c)$ eine Folge von Formeln ist, die c enthält. Den Operatorenregeln entsprechen (von „unten nach oben" gelesen) folgende Sequenzenregeln:

1. NP: $\dfrac{F, A \longrightarrow}{F \longrightarrow {\sim}A}$

2. NO: $\dfrac{F({\sim}A) \longrightarrow A}{F({\sim}A) \longrightarrow C}$, wobei C (auch im weiteren) leer sein kann oder eine Formel ist.

3. KP: $\dfrac{F \longrightarrow A; F \longrightarrow B}{F \longrightarrow A \wedge B}$

4. KO: $\dfrac{F(A \wedge B), A \longrightarrow C}{F(A \wedge B) \longrightarrow C}$ $\qquad$ $\dfrac{F(A \wedge B), B \longrightarrow C}{F(A \wedge B) \longrightarrow C}$

5. AP: $\dfrac{F \longrightarrow A}{F \longrightarrow A \vee B}$ $\qquad$ $\dfrac{F \longrightarrow B}{F \longrightarrow A \vee B}$

6. AO: $\dfrac{F(A \vee B), A \longrightarrow C; F(A \vee B), B \longrightarrow C}{F(A \vee B) \longrightarrow C}$

7. SP: $\dfrac{F, A \longrightarrow B}{F \longrightarrow A \supset B}$

8. SO: $\dfrac{F(A \supset B) \longrightarrow A; F(A \supset B), B \longrightarrow C}{F(A \supset B) \longrightarrow C}$

9. $\forall P$: $\dfrac{F \longrightarrow A\{i/j\}}{F \longrightarrow \forall iA}$, wobei die Individuenvariable j weder in F noch in $\forall iA$ vorkommt.

10. $\forall O$: $\dfrac{F(\forall iA), A\{i/j\} \longrightarrow C}{F(\forall iA) \longrightarrow C}$

11. $\exists P$: $\dfrac{F \longrightarrow A\{i/j\}}{F \longrightarrow \exists iA}$

12. $\exists O$: $\dfrac{F(\exists iA), A\{i/j\} \longrightarrow C}{F(\exists iA) \longrightarrow C}$, wobei die Individuenvariable j weder in F noch in C vorkommt.

Wie wir sehen, erhalten wir den im vorigen Abschnitt dargestellten intuitionistischen Sequenzenkalkül *G3*.

Übungen:

1. Beweisen Sie, daß folgende Formeln dialogische Tautologien sind:
   a) $p \supset (q \supset p)$
   b) $\sim p \supset (p \supset q)$
   c) $p \wedge \sim p \supset q$
   d) $p \supset \sim(p \wedge \sim p)$
   e) $p \supset \sim q \supset (q \supset \sim p)$
   f) $p \supset q \supset (\sim q \supset \sim p)$
   g) $\sim\sim\sim p \supset \sim p$
   h) $\sim\sim p \wedge \sim\sim q \supset \sim\sim(p \wedge q)$!
2. Zeigen Sie, daß folgende Formeln keine dialogischen Tautologien sind:
   a) $p \supset q \supset (\sim p \vee q)$
   b) $\sim(p \wedge \sim q) \supset (p \supset q)$
   c) $\sim(\sim p \wedge \sim q) \supset p \vee q$
   d) $(\sim p \supset q) \supset p \vee q$
   e) $\sim(\sim p \vee \sim q) \supset p \wedge q$
   f) $\sim p \supset \sim q \supset (q \supset p)$
   g) $p \supset q \supset p \supset p$
   h) $p \supset \sim q \vee q$
   i) $\sim(p \wedge q) \supset \sim p \vee \sim q$
   j) $(p \supset q) \vee (q \supset p)$
   k) $\sim\sim(p \vee q) \supset \sim\sim p \vee \sim\sim q$!

3. Beweisen Sie, daß folgende Formeln dialogische Tautologien sind:
   a) $\exists x P(x) \supset \sim\forall x \sim P(x)$
   b) $\forall x \sim P(x) \supset \sim\exists x P(x)$
   c) $\sim\exists x P(x) \supset \forall x \sim P(x)$
   d) $\exists x \sim P(x) \supset \sim\forall x P(x)$
   e) $\forall x \sim\sim P(x) \supset \sim\exists x \sim P(x)$
   f) $\sim\exists x \sim P(x) \supset \forall x \sim\sim P(x)$
   g) $\sim\sim\forall x \sim\sim P(x) \supset \sim\exists x \sim P(x)$
   h) $\sim\sim\forall x P(x) \supset \sim\exists x \sim P(x)$
   i) $\sim\sim\forall x P(x) \supset \forall x \sim\sim P(x)$
   j) $\sim\sim\exists x P(x) \supset \sim\forall x \sim P(x)$
   k) $\sim\forall x \sim P(x) \supset \sim\sim\exists x P(x)$
   l) $\exists x \sim\sim P(x) \supset \sim\forall x \sim P(x)$
   m) $\exists x \sim\sim P(x) \supset \sim\sim\exists x P(x)$!

4. Zeigen Sie, daß folgende Formeln keine Theoreme der intuitionistischen Quantorenlogik sind:
   a) $\sim\forall x \sim P(x) \supset \exists x P(x)$
   b) $\sim\forall x P(x) \supset \exists x \sim P(x)$
   c) $\forall x \sim\sim P(x) \supset \sim\sim\forall x P(x)$
   d) $\sim\sim\exists x P(x) \supset \exists x \sim\sim P(x)$
   e) $\forall x(P(x) \vee \sim P(x)) \supset (\sim\sim\exists x P(x) \supset \exists x P(x))$ (Markowsches Prinzip)
   f) $\forall x(P(x) \vee \sim P(x)) \supset (\sim\forall x \sim P(x) \supset \exists x P(x))$ (andere Formulierung des Markowschen Prinzips)
   g) $(\sim B \supset \exists x P(x)) \supset \exists x(\sim B \supset P(x))$, wobei B die Individuenvariable x nicht frei enthält.
   h) $\forall x(P(x) \vee \sim P(x)) \supset \forall x P(x) \vee \sim\forall x P(x)$!

12.10 Varianten der intuitionistischen Logik

Unter den Anhängern des Intuitionismus besteht keine Einigkeit darüber, welche Gesetze und Regeln der klassischen Logik verworfen werden müssen und welche nicht. Das ist kein Zufall, da man über keine exakten Kriterien verfügt, nach denen man ein logisches Gesetz akzeptieren oder verwerfen soll. Es gibt also nicht miteinander äquivalente intuitionistische Logiksysteme. Aber auch bei logisch äquivalenten Systemen (oder „fast“ äquivalenten) der intuitionistischen Logik sind die philosophischen Gründe für ein Akzeptieren dieser Systeme ganz unterschiedlich. So stehen L. E. J. Brouwer, A. Heyting und ihre Nachfolger (die eigentlichen Intuitionisten) philosophisch stark im Fahrwasser der Kantschen Philosophie, während sich A. A. Markow und seine Schule in Rußland (die sogenannten Konstruktivisten) philosophisch scharf von den Intuitionisten abgrenzen und sich philosophisch auf den dialektischen Materialismus berufen. Die letzteren verwerfen den Begriff der aktualen Unendlichkeit, weil er auf dem Begriff der absoluten Realisierbarkeit (alles was logisch widerspruchsfrei ist, ist realisierbar) basiere, und akzeptieren den Begriff der potentiellen Unendlichkeit, der ihrer Auffassung nach auf dem Begriff (sie sagen auf der Abstraktion) der potentiellen Realisierbarkeit beruht. Bei der „Abstraktion“ der potentiellen Realisierbarkeit wird nach Auffassung Markows und seiner Schule von der Beschränkung unserer konstruktiven Möglichkeiten in bezug auf Raum, Zeit und Material abstrahiert (abgesehen).

Nach ihrer Auffassung untersucht die konstruktive Mathematik reale Konstruktionsprozesse, nur tut man dabei so, als ob man unbeschränkt viel Kreide (Tinte), unbeschränkt große Tafeln (lange Bänder) und unbeschränkt viel Zeit hätte. Hier setzt nun die Kritik der sogenannten Ultraintuitionisten ein, die die erstaunlich tiefsinnige Feststellung machen, daß unser Kreidevorrat nur beschränkt, unsere Tafeln alle endlich und relativ klein und unsere Zeit natürlich bemessen ist. Sie lehnen deshalb die „Abstraktion“ der potentiellen Unendlichkeit ab und verwenden nur die Begriffe der faktischen Realisierbarkeit und der faktischen Unendlichkeit. Für sie ist beispielsweise die Zahl $10^{10^{10^{10}}}$ unendlich, weil wir sie nicht realisieren können.

Doch auf die „metaphysischen“ Unterschiede der einzelnen Vertreter des Intuitionismus wollen wir hier nicht näher eingehen. Wir führen nur noch einige wesentliche Unterschiede von Vertretern des Intuitionismus auf dem Gebiet der Logik an. So unterscheidet sich die Markowschule von den Standardintuitionisten in logischer Hinsicht nur dadurch, daß sie das sogenannte Markowsche Prinzip $\forall x(P(x) \vee \sim P(x)) \supset (\sim\sim\exists x P(x) \supset \exists x P(x))$ akzeptiert, das von den anderen Intuitionisten abgelehnt wird. Eine nennenswerte Richtung innerhalb des Intuitionismus sind die Vertreter der minimalen Logik. Der sogenannte Minimalkalkül wurde von I. Johansson aufgebaut (Johansson 1936). Er verwirft zusätzlich zu den von den Intuitionisten verworfenen Gesetzen das Prinzip, daß aus einem Widerspruch jede beliebige Aussage folgt $(\sim p \supset (p \supset q))$. Eine axiomatische Darstellung des Minimalkalküls erhalten wir beispielsweise, wenn wir in dem *IAK* des Abschnitts 3 die Axiome *A12.* $\sim p \supset (p \supset q)$ und *A13.* $(p \supset \sim p) \supset \sim p$ durch das folgende ersetzen: *A12*^{m}. $p \supset q \supset (p \supset \sim q \supset \sim p)$.

G. F. C. Griss wendet sich generell gegen eine Verwendung der Negation in der Mathematik. Mit den Grundgedanken von L. E. J. Brouwer stimmt er voll überein, nimmt aber an, daß jeder mathematische Begriff seinen Ursprung in einer aktual durchgeführten mathematischen Konstruktion haben muß. Wenn die mathematische Konstruktion unmöglich ist, so kann der betreffende Begriff nicht klar sein. Brouwer läßt beispielsweise solche Theoreme zu wie: Runde Quadrate existieren nicht. Nach Griss haben solche Sätze keinen Sinn, da sie niemals realisiert werden können. Von ihm wurde der Versuch unternommen, eine negationslose Logik aufzubauen (Griss 1955).

Eine neuere interessante Variante der intuitionistischen Logik wurde von I. D. Zaslawskij als symmetrische konstruktive Logik vorgeschlagen (Zaslawskij 1978). Die grundlegende Besonderheit der symmetrischen konstruktiven Logik gegenüber der traditionellen intuitionistischen Logik besteht in einer gleichberechtigten Betrachtung der konstruktiven Wahrheit und der konstruktiven Falschheit. In der traditionellen intuitionistischen Logik hat die konstruktive Falschheit negativen Charakter. Eine Aussage wird als falsch angesehen, wenn sie zum Widerspruch führt. In der symmetrischen konstruktiven Logik hat die Falschheit positiven Charakter und ist ebenso mit der Forderung der Konstruktivität verbunden wie die Wahrheit einer Aussage. Für den Beweis der Falschheit einer Allaussauge wird beispielsweise die Konstruktion eines konkreten Objektes mit einer solchen Eigenschaft gefordert, das als Gegenbeispiel für die betreffende Allaussage dienen kann. Die symmetrische konstruktive Logik unterscheidet sich wesentlich von der traditionellen konstruktiven Logik. So werden in der symmetrischen konstruktiven Logik nicht nur das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten $p \vee \sim p$, sondern auch das Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch $\sim(p \wedge \sim p)$ sowie die Regel des Ad-absurdum-Führens $(p \supset q) \supset (p \supset \sim q \supset \sim p)$ verworfen. Hingegen sind in der symmetrischen konstruktiven Logik $p \equiv \sim\sim p$ und alle de Morganschen Gesetze gültig.

Axiomatisch läßt sich die symmetrische konstruktive Logik folgendermaßen darstellen: In den folgenden Axiomenschemata sind A, B und C beliebige Formeln, x ist eine beliebige Gegenstandsvariable, t ist ein beliebiger Term. In den Schemata 15 und 18 wird vorausgesetzt, daß die Variable x nicht frei in A vorkommt, in den Schemata 14 und 17 wird vorausgesetzt, daß die Einsetzung $A(x/t)$ zulässig ist. $\tilde{\forall}$ ist die Bezeichnung eines beliebigen (auch leeren) Komplexes von Allquantoren bezüglich beliebiger Gegenstandsvariablen.

Axiomenschemata:

1. $\tilde{\forall}(A \supset (B \supset A))$
2. $\tilde{\forall}((A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)))$
3. $\tilde{\forall}((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$
4. $\tilde{\forall}((A \supset (A \supset B)) \supset ((\sim B \supset (\sim B \supset \sim A)) \supset (A \supset B)))$
5. $\tilde{\forall}((A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A))$
6. $\tilde{\forall}(A \supset \sim\sim A)$
7. $\tilde{\forall}(\sim\sim A \supset A)$
8. $\tilde{\forall}(A \wedge B \supset A)$
9. $\tilde{\forall}(A \wedge B \supset B)$
10. $\tilde{\forall}((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A \wedge B)))$
11. $\tilde{\forall}(A \supset A \vee B)$
12. $\tilde{\forall}(B \supset A \vee B)$
13. $\tilde{\forall}((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)))$
14. $\tilde{\forall}(\forall x A \supset A(x/t))$
15. $\tilde{\forall}(A \supset \forall x A)$
16. $\tilde{\forall}(\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B))$
17. $\tilde{\forall}(A(x/t) \supset \exists x A)$
18. $\tilde{\forall}(\exists x A \supset A)$
19. $\tilde{\forall}(\forall x(A \supset B) \supset (\exists x A \supset \exists x B))$
20. $\tilde{\forall}(\forall x(A \supset (A \supset B)) \supset (\exists x A \supset (\exists x A \supset \exists x B)))$.

Die einzige Schlußregel ist

R1. $$\frac{\begin{array}{c}A\\ A \supset B\end{array}}{B}$$

Wir haben in diesem Abschnitt nur einige der existierenden Varianten der intuitionistischen Logik erwähnt.

12.11 Kritik der intuitionistischen Logik

Der Hauptmangel der intuitionistischen Logikauffassung besteht darin, daß der universale Charakter der Logik bestritten wird. Während unserer Auffassung nach in der Logik Regeln aufgestellt werden, die in beliebigen Erkenntnisbereichen ohne Ausnahme verwendet werden können, sind die Intuitionisten der Meinung, daß es für verschiedene Erkenntnisbereiche auch verschiedene Logiken gibt, d. h., ihrer Ansicht nach gibt es logische Regeln, deren Anwendung in den einen Erkenntnisbereichen zu richtigen Resultaten und in anderen Erkenntnisbereichen zu falschen Resultaten führt. Insbesondere meinen sie, daß für endliche und für unendliche Bereiche unterschiedliche logische Regeln erforderlich seien. Die Universalität logischer Regeln wird nicht nur von den Intuitionisten bestritten. Neben den Intuitionisten sind es gegenwärtig vor allem die Vertreter der sogenannten Logik der Mikrophysik, nach deren Auffassung es besondere Logiken der Makro- und der Mikrophysik gibt. Auch einige Vertreter der dialektischen Logik bestreiten die Universalität logischer Regeln. Die Konzeption der Nichtuniversalität logischer Regeln hängt mit einer falschen Auffassung des Gegenstandes der Logik zusammen. Die Logik wird nicht als eine Wissenschaft angesehen, die Sprachregeln untersucht und aufstellt, sondern als eine Disziplin, die irgendeinen außersprachlichen Gegenstandsbereich erforscht.

Die Vertreter der Nichtuniversalität logischer Regeln stehen dabei vor folgendem Dilemma, das sich aus einem Akzeptieren von sogenannten bereichsspezifischen Logiken ergibt. Da uns der jeweils betrachtete Bereich nicht unmittelbar in der Anschauung gegeben ist, benötigt man eine (theoretische) Beschreibung dieses Bereiches. Diese Beschreibung macht jedoch eine Logik (eine Sprachform) erforderlich. Wenn aber die jeweilige Logik vom Charakter (der Beschreibung) des jeweiligen Bereiches abhängt, wie soll man dann die zur Beschreibung dieses Bereiches notwendige Logik auswählen? Es ergibt sich folgende ausweglose Situation: Zur Beschreibung muß man eine Logik haben, um aber zu wissen, welche Logik, muß man vorher eine Beschreibung des betreffenden Bereiches haben. Man kommt also weder zu einer Logik noch zu einer Beschreibung des betreffenden Bereiches. Schon die Einteilung aller Bereiche in endliche und unendliche setzt eine Logik voraus. Unseres Erachtens benutzen hier die Intuitionisten unkritisch die klassische Logik mit ihrer Gleichsetzung von innerer und äußerer Negation. Eigentlich müßte aber bereits hier die nichttraditionelle Prädikationstheorie herangezogen werden, denn es gibt sicher Bereiche, bei denen es unentscheidbar ist, ob sie endlich oder unendlich sind.

Betrachten wir die logischen Gründe für das Entstehen der intuitionistischen Logik anhand einiger Beispiele etwas genauer.

Erstes Beispiel: Bei der Berechnung der Zahl π erhält man die Zahl $3,14\ldots$, wobei die Menge der Zahlen nach dem Komma unendlich fortgesetzt werden kann. Es ergibt sich die Frage: Kann dabei irgendwann die Null $10^{10^{10}}$ mal nacheinander auftreten? Auf diese Frage sind logisch nicht nur zwei Antworten nach dem „Ja-Nein-Prinzip" möglich, sondern drei:

1. ja, eine solche Zahlenfolge kann auftreten (A);
2. eine solche Zahlenfolge kann nicht auftreten (B);
3. es ist unmöglich festzustellen, ob eine solche Zahlenfolge auftritt oder nicht (C).

Angenommen, jemand behauptet A, und ein anderer verneint das, dann sind zwei verschiedene Negationen von A möglich:

1. als Behauptung von B.
2. als Erklärung, daß A nicht richtig ist.

Im zweiten Fall ist die Verneinung von A nicht die Behauptung von B, sie kann auch eine andere Möglichkeit, nämlich C, bedeuten. Mit anderen Worten, im zweiten Fall bedeutet $\sim A$ die Adjunktion „B oder C". Die Negation des zweiten Typs von B ist offenbar nicht unbedingt ein Akzeptieren von A, da sie die Adjunktion „A oder C" bedeutet.

Zweites Beispiel: Angenommen, a, b, c und n seien positive ganze Zahlen, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $n \geq 3$. Betrachten wir die Aussage: „Alle Zahlenquadrupel a, b, c, n sind derart, daß $a^n + b^n \neq c^n$."

Diese Aussage läßt sich wiederum in zweifacher Weise verneinen:

1. man kann die Aussage B behaupten „Nicht alle Zahlenquadrupel a, b, c, n sind derart, daß $a^n + b^n \neq c^n$ (das ist gleichbedeutend mit der Aussage „Es gibt ein Zahlenquadrupel a, b, c, n derart, daß $a^n + b^n = c^n$");
2. man kann erklären, daß A nicht richtig ist, oder $\sim A$ behaupten.

Dabei ist die zweite Verneinung von A nicht unbedingt ein Akzeptieren von B, weil es eine dritte Möglichkeit C gibt, die besagt, daß es unmöglich ist, festzustellen, ob A oder B. $\sim A$

bedeutet also ein Akzeptieren der Adjunktion $B \vee C$, und $\sim B$ bedeutet nicht ein Akzeptieren von A, sondern nur ein Akzeptieren der Adjunktion $A \vee C$.

In beiden Beispielen ist die Behauptung $A \vee B$ nicht gültig, obwohl B eine Negation von A ist. Logisch gültig ist hingegen die Behauptung $A \vee B \vee C$, d. h. die Adjunktion der drei Möglichkeiten. In beiden Beispielen ergibt die Negation von B nicht A, obwohl B eine Negation von A ist.

Aus derartigen Situationen wurde die Auffassung abgeleitet, daß das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten und die Regel zur Beseitigung der doppelten Negation keinen universalen Charakter haben. Die Tatsache, daß es sich hier um zwei Typen der Negation oder um zwei verschiedene Positionen der Negation (eine vor der Aussage als Ganzem und die andere vor dem in der Aussage vorkommenden logischen Operator) handelt, wurde erkannt. Doch anstatt diese unterschiedlichen Positionen der Negation in den Bereichen der Logik zu berücksichtigen, in denen die Aufgliederung von (unter dem Gesichtspunkt der Aussagenlogik) elementaren Aussagen in Subjekte, Prädikate, Operatoren des Prädizierens und Quantoren behandelt wird, schlug man einen anderen Weg ein und beschränkte die klassische Aussagenlogik, in der gerade von einer solchen Aufgliederung der elementaren Aussagen abstrahiert wird. Als Ergebnis entstand nicht eine logische Theorie, die die logischen Operatoren $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\ldots$ unabhängig vom konkreten Inhalt der sie enthaltenden Aussagen definiert, sondern nur ein logisches Teilsystem, für das man dann noch eine passende Interpretation suchen mußte. Nicht zufällig wurde deshalb eine der Hauptentwicklungsrichtungen der intuitionistischen Logik die Suche nach einer Interpretation des *IAK*. Wenn man den *IAK* als eine logische Theorie betrachtet, die die logischen Operatoren $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\ldots$ definiert, so erhält man eine unvollständige Theorie (d. h. eine Theorie, die keine erschöpfende Beschreibung der Regeln für diese Operatoren und ihre Wechselbeziehungen liefert). Wir haben Beispiele von logischen Regeln angeführt, die vom Standpunkt des *IAK* nicht gelten. Es ist wiederum nicht zufällig, daß eine andere Hauptentwicklungsrichtung der intuitionistischen Logik die Suche nach Wegen wurde, wie man die verworfenen logischen Gesetze doch noch für die Logik retten kann. Insbesondere sind anstelle der verworfenen Gesetze $\sim p \vee p$ und $\sim\sim p \supset p$ im *IAK* die Theoreme $\sim\sim(\sim p \vee p)$ und $\sim\sim\sim p \supset \sim p$ beweisbar. Aus den betrachteten Beispielen wird deutlich, daß die Intuitionisten zwei verschiedene Formen der Negation verwechseln, einmal die aussagenlogische Negation (äußere Negation) und zum anderen die Negation beim Prädikationsoperator des Absprechens, die gar kein selbständiger Operator ist. Die von uns dargestellte nichttraditionelle Prädikationstheorie mit der Unterscheidung von äußerer und innerer Negation ermöglicht es, das Anliegen der Intuitionisten ohne Einschränkung der klassischen Logik auszudrücken und macht gleichzeitig einige logische Fehler der Intuitionisten verständlich. Die Intuitionisten akzeptieren, wie auch die meisten klassischen Logiker, die Bisubjunktion $\sim(s \leftarrow P) \equiv (s \not\leftarrow P)$. Wir haben nachgewiesen, daß diese Bisubjunktion kein logisches Gesetz ist. Die Unterschiede zwischen der klassischen und der intuitionistischen Logik bezüglich der Negation hängen im wesentlichen mit den Negationen zusammen, die unmittelbar vor den Aussagenvariablen stehen, denn auch intuitionistisch gilt ja $\sim\sim\sim p \equiv \sim p$.

Zur Verdeutlichung wollen wir im weiteren einige von den Intuitionisten verworfene und einige akzeptierte Formeln mit Negationen mit entsprechenden Formeln der nichttraditionellen Prädikationstheorie vergleichen, um damit Anliegen und Fehler der Intuitionisten zu verdeutlichen. Wir verwenden dabei zur Abkürzung der Schreibweise Symbole der Form $\neg p$, $?p$ usw., die eigentlich sinnlos sind. Mit $\neg p$ meinen wir dabei Aussagen der Form $(s \not\leftarrow P)$ und mit $?p$ Aussagen der Form $\sim(s \leftarrow P) \wedge \sim(s \not\leftarrow P)$. Betrachten wir als Beispiel die de Morganschen Gesetze.

In der klassischen Logik gelten folgende vier Theoreme:

1. $\sim p \vee \sim q \supset \sim(p \wedge q)$
2. $\sim p \wedge \sim q \supset \sim(p \vee q)$
3. $\sim(p \wedge q) \supset \sim p \vee \sim q$
4. $\sim(\sim p \vee \sim q) \supset p \wedge q$.

In der intuitionistischen Logik werden 1 und 2 akzeptiert, während 3 und 4 verworfen werden. Wenn wir wieder den logischen Fehler der Intuitionisten bezüglich der beiden Negationen $\sim$ und $\neg$ berücksichtigen, so wird ihre Haltung bezüglich dieser Gesetze der klassischen Logik verständlich. In der nichttraditionellen Prädikationstheorie gelten:

5. $\vdash \neg p \vee \neg q \supset \sim(p \wedge q)$,
6. $\vdash \neg p \wedge \neg q \supset \sim(p \vee q)$,
   während die beiden folgenden Formeln nicht beweisbar sind:
7. $\sim(p \wedge q) \supset \neg p \vee \neg q$,
8. $\sim(\neg p \vee \neg q) \supset p \wedge q$.

Es gelten neben den Formeln 1—4 nur die Formeln:

9. $\sim(p \wedge q) \supset \neg p \vee ?p \vee \neg q \vee ?q$,
10. $\sim(\neg p \vee \neg q) \supset (p \vee ?p) \wedge (q \vee ?q)$.

Die Intuitionisten verwerfen $p \vee \sim p$ und $\sim\sim p \supset p$, weil $p \vee \neg p$ und $\sim\neg p \supset p$ in der nichttraditionellen Prädikationstheorie nicht gelten, sondern nur $p \vee \neg p \vee ?p$ und $\sim\neg p \supset p \vee ?p$. Hingegen akzeptieren die Intuitionisten $\sim(p \wedge \sim p)$ und $p \supset \sim\sim p$, weil in der nichttraditionellen Prädikationstheorie $\sim(p \wedge \neg p)$ und $p \supset \sim\neg p$ gelten. Ausführlicher betrachten wir die Beziehungen zwischen der intuitionistischen und der inneren Negation der nichttraditionellen Prädikationstheorie im folgenden Abschnitt.

Wir haben bereits bei der Darstellung des B-Kalküls darauf hingewiesen, daß die intuitionistische Logik eine versteckte epistemische Logik ist. Anstelle einer Aussage p betrachten sie die Aussage „Die Aussage p ist beweisbar (feststellbar, konstruierbar, nachweisbar etc.)“. Entsprechendes gilt auch für die mit Hilfe von logischen Operatoren zusammengesetzten Aussagen. So meinen sie mit $p \vee \sim p$ die Aussage „Es ist beweisbar, daß p beweisbar oder daß $\sim p$ beweisbar ist“. Unseres Erachtens muß man aber zunächst über logische Basissysteme verfügen, die keine epistemischen Prädikate enthalten, um auf ihrer Basis epistemische Systeme als Erweiterungen aufbauen zu können. Auf keinen Fall dürfen solche epistemischen Prädikate mit den üblichen logischen Operatoren verwechselt werden.

Die in der Theorie der logischen Folgebeziehung betrachteten Paradoxien treten zum großen Teil auch in der intuitionistischen Logik auf. Deshalb lassen sich viele Einwände gegen die klassische Theorie der Folgebeziehung auch auf die intuitionistische Logik ausdehnen. Trotz dieser kritischen Einwände betrachten wir die Entstehung und Ausbildung des Intuitionismus und Konstruktivismus als einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung der Logik und Mathematik. In der Mathematik hat der Intuitionismus wesentlich zur Unterscheidung zwischen konstruktiven und nichtkonstruktiven Beweisen beigetragen. Betrachten wir als Beispiel ein einfaches Theorem aus der Mathematik, an dessen Beweisen sich die intuitionistischen Überlegungen gut veranschaulichen lassen (Dalen 1973).

Theorem: Es existieren zwei solche irrationalen Zahlen a und b, daß a^b rational ist.

Erster Beweis: Wir wählen die Zahl $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Wenn diese Zahl rational ist, so ist das Theorem bewiesen, denn wir brauchen nur $a = \sqrt{2}$ und $b = \sqrt{2}$ zu setzen. Wenn hingegen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

irrational ist, so lassen sich die erforderlichen a und b ebenfalls angeben. Es genügt, $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$ zu setzen. Dann gilt $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Es gilt also, daß unter beliebigen Umständen die gesuchten a und b existieren, und das Theorem ist bewiesen.

Zweiter Beweis: Auf Grund eines tieferliegenden Ergebnisses von A. O. Gelfond folgt aus der Irrationalität von $\sqrt{2}$, daß $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ transzendent und folglich irrational ist. Man kann also $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$ wählen, und das Theorem ist bewiesen.

Der erste Beweis ist viel einfacher als der zweite, besitzt aber folgende Besonderheit. Obwohl wir den Satz bewiesen haben, wissen wir nicht, welche Zahlen die gesuchten a und b sind, während wir beim zweiten Beweis die gesuchten a und b effektiv angeben können. Der erste Beweis wird von den Intuitionisten nicht akzeptiert, weil er nicht konstruktiv ist. Es ist offensichtlich, daß man kein Anhänger des Intuitionismus sein muß, um den zweiten - konstruktiven - Beweis dem ersten vorzuziehen.

In der Logik haben die Intuitionisten viele echte Probleme aufgeworfen, die zu einer Weiterentwicklung der Logik beigetragen haben, obwohl die Lösungsvorschläge der Intuitionisten selber nicht akzeptabel sind.

12.12 Intuitionistische und innere Negation

Eine inhaltliche logische Analyse der von den Intuitionisten angeführten scheinbaren Gegenbeispiele gegen bestimmte Gesetze der klassischen Logik ergibt, daß von ihnen fälschlicherweise $(s \not\leftarrow P)$ mit $\sim(s \leftarrow P)$ identifiziert wird. Da auch intuitionistisch $\sim p \equiv \sim\sim\sim p$ gilt, betreffen die Unterschiede zwischen der intuitionistischen und der klassischen Negation nur die Negationen, die unmittelbar vor Aussagenvariablen stehen. Das legt die Vermutung nahe, daß folgende Beziehung gilt: Eine in der klassischen Logik beweisbare Formel mit Negationen, in der man alle unmittelbar vor Aussagenvariablen stehenden äußeren Negationen $\sim$ durch innere Negationen $\neg$ ersetzt, ist in der nichttraditionellen Prädikationstheorie genau dann beweisbar, wenn die ursprüngliche Formel im IAK beweisbar ist. Diese Vermutung trifft allerdings nicht zu. Der folgende Vergleich der nichttraditionellen Prädikationstheorie mit dem IAK bezüglich der Negation ergibt, daß die intuitionistische Negation eine Vermischung von $\sim$ und $\neg$ ist.

D1. ***A*-Repräsentant** ($\boldsymbol{A}$-R) **einer Formel** $\boldsymbol{A}$ **des** $\boldsymbol{IAK}$ **im klassischen Aussagenkalkül (*KAK*)** nennen wir die Formel, die man aus $\boldsymbol{A}$ erhält, wenn man alle intuitionistischen Operatoren durch die entsprechenden Operatoren des KAK ersetzt.

D2. ***P*-Repräsentanten** ($\boldsymbol{P}$-R) **einer Formel** $\boldsymbol{A}$ **des** $\boldsymbol{IAK}$ **in der nichttraditionellen Prädikationstheorie (*PT*)** nennen wir die Formeln, die man auf folgende Weise erhält: 1) enthält die Formel $\boldsymbol{A}$ keine Negationen unmittelbar vor Variablen, so ist ihr $\boldsymbol{A}$-Repräsentant ihr $\boldsymbol{P}$-Repräsentant; 2) enthält die Formel $\boldsymbol{A}$ Negationen unmittelbar vor Variablen, so erhält man ihre $\boldsymbol{P}$-Repräsentanten, wenn man eine oder mehrere Negationen unmittelbar vor einer Variablen durch die innere Negation $\neg$ ersetzt und alle übrigen Operatoren durch die entsprechenden des KAK.

Es gelten folgende Metatheoreme:

MT1. Es gibt eine Gruppe von im IAK nicht beweisbaren Formeln, für die gilt: ihr A-Repräsentant ist im KAK beweisbar und alle ihre P-Repräsentanten sind in PT nicht beweisbar.

Zu diesen Formeln gehören:

$\sim p \vee p$, $\sim\sim p \supset p$, $p \supset q \supset \sim p \vee q$, $\sim(p \wedge \sim q) \supset (p \supset q)$, $\sim(\sim p \wedge \sim q) \supset p \vee q$, $\sim p \supset q \supset p \vee q$, $\sim(\sim p \vee \sim q) \supset p \wedge q$, $\sim(p \supset \sim q) \supset p \wedge q$, $\sim(p \wedge q) \supset \sim p \vee \sim q$.

MT1 macht verständlich, warum die Intuitionisten, nachdem sie $s \nleftarrow P$ mit $\sim(s \leftarrow P)$ identifizierten, die betreffenden Gesetze der klassischen Logik verwerfen.

MT2. Es gibt eine Gruppe von im *IAK* nicht beweisbaren Formeln, für die gilt: ihr *A*-Repräsentant ist im *KAK* beweisbar und einige ihrer *P*-Repräsentanten sind in *PT* beweisbar, andere nicht.

Zu diesen Formeln gehören:

$\sim p \supset \sim q \supset (q \supset p)$, $\sim p \supset q \supset (\sim q \supset p)$, $(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim q \supset p)$.

Die entsprechenden beweisbaren *P*-Repräsentanten sind:

$\sim p \supset \neg q \supset (q \supset p)$, $\sim p \supset q \supset (\neg q \supset p)$ und $(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \neg q \supset p)$.

Nicht beweisbar in *PT* sind die folgenden Formeln:

$\neg p \supset \neg q \supset (q \supset p)$, $\neg p \supset \sim q \supset (q \supset p)$, $\neg p \supset q \supset (\neg q \supset p)$, $\neg p \supset q \supset (\sim q \supset p)$, $(\neg p \supset q) \supset (\neg p \supset \neg q \supset p)$, $\neg p \supset q \supset (\neg p \supset \sim q \supset p)$, $\neg p \supset q \supset (\sim p \supset \sim q \supset p)$, $\neg p \supset q \supset (\sim p \supset \sim q \supset p)$, $\sim p \supset q \supset (\neg p \supset \sim q \supset p)$, $\sim p \supset q \supset (\neg p \supset \neg q \supset p)$.

Interessant ist, daß die *P*-Repräsentanten, bei denen alle Negationen $\sim$ vor Variablen durch $\neg$ ersetzt sind, in *PT* nicht gelten. Insofern „erklärt“ auch *MT2* die intuitionistische Einschränkung der klassischen Logik.

MT3. Es gibt eine Gruppe von im *IAK* nicht beweisbaren Formeln, für die gilt: ihr *A*-Repräsentant ist im *KAK* beweisbar und alle ihre *P*-Repräsentanten sind in *PT* beweisbar.

Zu diesen Formeln gehören:

$p \supset \sim q \supset p \supset p$, $p \vee (p \supset \sim q)$.

MT4. Es gibt eine Gruppe von im *IAK* beweisbaren Formeln, für die gilt: alle ihre *P*-Repräsentanten sind in *PT* beweisbar.

Zu diesen Formeln gehören:

$\sim p \supset (p \supset q)$, $p \supset (\sim p \supset q)$, $p \supset \sim\sim p$, $\sim(p \wedge \sim p)$, $\sim p \wedge p \supset q$, $\sim p \vee q \supset (p \supset q)$, $p \supset q \supset \sim(p \wedge \sim q)$, $p \vee q \supset (\sim p \supset q)$, $p \vee q \supset \sim(\sim p \wedge \sim q)$, $p \wedge q \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$, $p \wedge q \supset \sim(p \supset \sim q)$, $\sim p \vee \sim q \supset \sim(p \wedge q)$, $\sim p \wedge \sim q \supset \sim(p \vee q)$.

MT3 zeigt, daß die aufgezählten Formeln selbst dann gültig sind, wenn man $\sim$ vor Variablen durch $\neg$ ersetzt.

MT5. Es gibt eine Gruppe von im *IAK* beweisbaren Formeln, für die gilt: einige ihrer *P*-Repräsentanten sind in *PT* beweisbar und andere nicht.

Zu diesen Formeln gehören:

$p \supset \sim p \supset \sim p$, $p \supset \sim q \supset (q \supset \sim p)$, $p \supset q \supset (p \supset \sim q \supset \sim p)$, $p \supset q \supset (\sim q \supset \sim p)$, $\sim\sim\sim p \supset p$, $\sim\sim(p \supset q) \supset (\sim\sim p \supset \sim\sim q)$.

In *PT* beweisbar sind die Formeln

$p \supset \neg p \supset \sim p$, $p \supset \neg q \supset (q \supset \sim p)$, $p \supset q \supset (p \supset \neg q \supset \sim p)$, $p \supset q \supset (\neg q \supset \sim p)$, $\sim\sim\neg p \supset \sim p$, $\sim\sim\neg p \supset \neg p$, $\sim\sim(p \supset q) \supset (\sim\sim p \supset \sim\neg q)$.

Hingegen sind die folgenden Formeln nicht in PT beweisbar:

$p \supset {\sim}p \supset \neg p$, $p \supset \neg p \supset \neg p$, $p \supset \neg q \supset (q \supset \neg p)$, $p \supset {\sim}q \supset (q \supset \neg p)$, $p \supset q \supset (p \supset {\sim}q \supset \neg p)$, $p \supset q \supset (p \supset \neg q \supset \neg p)$, $p \supset q \supset (\neg q \supset \neg p)$, $p \supset q \supset ({\sim}q \supset \neg p)$, ${\sim}{\sim}{\sim}p \supset \neg p$, ${\sim}{\sim}(p \supset q) \supset ({\sim}\neg p \supset {\sim}\neg q)$, ${\sim}{\sim}(p \supset q) \supset ({\sim}\neg p \supset {\sim}{\sim}q)$.

MT6. Es gibt eine Gruppe von im IAK beweisbaren Formeln, für die gilt: alle ihre P-Repräsentanten sind in PT nicht beweisbar.

Zu diesen Formeln gehören:

${\sim}(p \vee q) \supset {\sim}p \wedge {\sim}q$, ${\sim}{\sim}(p \vee {\sim}p)$, $(p \equiv q) \supset ({\sim}p \equiv {\sim}q)$, ${\sim}{\sim}p \wedge {\sim}{\sim}q \supset {\sim}{\sim}(p \wedge q)$.

MT5 und *MT6* zeigen, daß die Intuitionisten nicht konsequent sind. Wenn sie $s \not\leftarrow P$ und ${\sim}(s \leftarrow P)$ identifizieren, müßten sie noch mehr Formeln der klassischen Logik verwerfen. Zumindest ergibt sich hieraus die Möglichkeit zu neuen Varianten der intuitionistischen Logik.

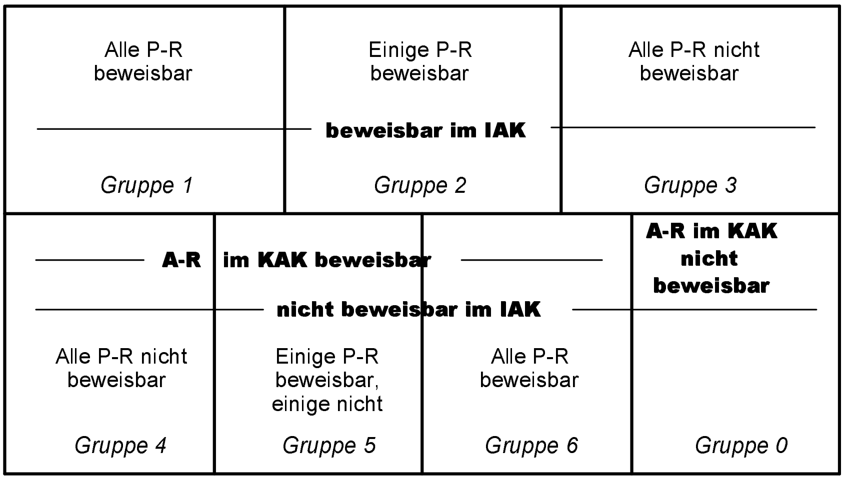
Im Rahmen der nichttraditionellen Prädikationstheorie läßt sich das Anliegen der Intuitionisten allerdings ohne jede Einschränkung der klassischen Aussagenlogik realisieren, und sie ermöglicht eine differenziertere Analyse der von den Intuitionisten aufgeworfenen logischen Problematik.

Übungen:

1. Zeigen Sie, daß die folgende Tautologie der klassischen Aussagenlogik („Gethmanscher Doppelschluß", „Gethman rule") in der intuitionistischen Logik nicht gültig ist:
   $(p \supset q) \supset (({\sim}p \supset q \vee p) \supset q \vee r)$!
   Zeigen Sie, daß die folgende Formel keine Tautologie der nichttraditionellen Prädikationstheorie ist:
   $(p \supset q) \supset ((\neg p \supset q \vee p) \supset q \vee r)$!
   Prüfen Sie, ob die folgenden Formeln in der klassischen, strengen und strikten Theorie der Folgebeziehung beweisbar sind oder nicht:
   a) $(p \supset q) \vdash (({\sim}p \supset q \vee p) \supset q \vee r)$
   b) $(p \supset q) \vdash ((\neg p \supset q \vee p) \supset q \vee r)$
   c) $(p \supset q) \wedge ({\sim}p \supset q \vee p) \vdash q \vee r$
   d) $(p \supset q) \wedge (\neg p \supset q \vee p) \vdash q \vee r$!
2. Seine Argumentation gegen die Gültigkeit des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten führt Brouwer wie folgt: „Wir erläutern zunächst die Ungültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Unendlichkeitsmathematik an einem Beispiel: Nennen wir eine reelle Zahl g *rational*, wenn zwei solche ganze Zahlen p und q bestimmt werden können, daß $g = \frac{p}{q}$, und *irrational*, wenn die Annahme der Rationalität von g ad absurdum geführt werden kann, so müßte nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten jede reelle Zahl entweder rational oder irrational sein." (Brouwer 1975) Anschließend definiert Brouwer eine Zahl r, für die gilt: r ist weder rational, noch irrational. Die Einzelheiten der Definition von r sind in unserem Zusammenhang uninteressant, wichtig ist nur, daß sich die Zahl r nicht effektiv angeben läßt, weil in ihrer Definition davon Gebrauch gemacht wird, ob und an welchen Stellen in der Dezimalentwicklung von π die Ziffernfolge 0123456789 vorkommt oder nicht. In der Fußnote zu diesem Text gibt Brouwer gleich noch ein analoges Beispiel, das seiner Ansicht nach das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten widerlegt. Er nennt eine Zahl g *mit* 0 *vergleichbar*, wenn entweder $g > 0$ oder $g \leq 0$ gilt, und *mit* 0 *unvergleichbar*, wenn die Annahme, daß g mit 0 vergleichbar wäre, ad absurdum geführt werden kann. Für

die von Brouwer definierte Zahl r gilt dann wieder, daß sie weder mit 0 vergleichbar, noch mit 0 unvergleichbar ist, da man weder angeben kann, daß $r > 0$ oder $r \leq 0$ gilt, noch diese Annahme ad absurdum führen kann.
Zeigen Sie, daß diese Beispiele Brouwers nicht das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten $p \vee \sim p$ widerlegen, sondern nur zeigen, daß die Formel $(s \leftarrow P) \vee (s \not\leftarrow P)$ nicht gültig ist! Zeigen Sie, daß das Beispiel von Heyting auf S. 238 im Lehrbuch die gleiche logische Struktur besitzt!

3. Zeigen Sie, daß aus der folgenden Trichotomie, die die Intuitionisten der klassischen Dichotomie entgegensetzen, weder die Ungültigkeit des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten noch die Ungültigkeit der Beseitigungsregel der doppelten Negation folgt: 1) In der Dezimalentwicklung von π kommt die Ziffernfolge 0123456789 vor. 2) In der Dezimalentwicklung von π kommt die Ziffernfolge 0123456789 nicht vor. 3) Es gilt weder, daß in der Dezimalentwicklung von π die Ziffernfolge 0123456789 vorkommt, noch in der Dezimalentwicklung von π kommt die Ziffernfolge 0123456789 nicht vor. Die Ungültigkeit welcher Formeln der nichttraditionellen Prädikationstheorie wird durch dieses Beispiel nachgewiesen?
4. Die Metatheoreme *MT1-MT6* aus Abschnitt 12 ermöglichen folgende Klassifikation der Formeln des IAK:



1. Welche der Formelgruppen 0-6 müßten leer sein, wenn die folgende Vermutung (1) gilt: Eine Formel A des IAK, in der Negationen vorkommen, ist im IAK genau dann beweisbar, wenn die Formel, die man aus A erhält, indem man in A alle unmittelbar vor Aussagenvariablen stehenden Negationen durch die innere Negation und alle übrigen Operatoren durch die entsprechenden klassischen ersetzt, in PT beweisbar ist?
2. Welche der Formelgruppen 0-6 müßten leer sein, wenn die folgende Vermutung (2) gilt: Eine Formel A des IAK, in der Negationen vorkommen, ist im IAK genau dann beweisbar, wenn alle ihre P-Repräsentanten in PT beweisbar sind?
3. Zeigen Sie, daß die Vermutungen (1) und (2) aus den vorhergehenden Aufgaben falsch sind!
4. Geben Sie Beispiele für Formeln des IAK für jede der Gruppen 0-6 an!
5. Prüfen Sie, zu welchen Gruppen die folgenden Formeln des IAK gehören:
   a) $\sim p \vee p$,
   b) $\sim\sim p \supset p$,

c) $p \wedge \sim p$,
d) $\sim p \supset \sim q \supset (q \supset p)$,
e) $p \supset \sim q \supset p \supset p$,
f) $\sim p \supset (p \supset q)$,
g) $p \supset q \supset \sim(p \wedge \sim q)$,
h) $p \supset \sim q \supset (q \supset \sim p)$,
i) $\sim\sim\sim p \supset \sim p$,
j) $p \equiv q \supset (\sim p \equiv \sim q)$!

6. Geben Sie für folgende Formeln des *IAK* einen in *PT* beweisbaren und einen in *PT* nicht beweisbaren *P*-Repräsentanten an:
a) $\sim p \supset q \supset (\sim q \supset p)$,
b) $(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim q \supset p)$!

7. Geben Sie für folgende Formeln des *IAK* einen in *PT* beweisbaren und einen in *PT* nicht beweisbaren *P*-Repräsentanten an:
a) $p \supset \sim p \supset \sim p$,
b) $p \supset \sim q \supset (q \supset \sim p)$,
c) $p \supset q \supset (p \supset \sim q \supset \sim p)$,
d) $p \supset q \supset (\sim q \supset \sim p)$,
e) $\sim\sim(p \supset q) \supset (\sim\sim p \supset \sim\sim q)$!
Zu welcher Gruppe gehören diese Formeln?

8. Zu welchen Gruppen gehören folgende Formeln:
a) $\sim(p \vee q) \supset \sim p \wedge \sim q$,
b) $\sim\sim(p \vee \sim p)$,
c) $\sim\sim p \wedge \sim\sim q \supset \sim\sim(p \wedge q)$?

13. Kapitel
Konditionallogik

13.1 Konditionalaussagen

Konditionalaussagen sind Aussagen der Form „wenn A, so B" und Aussagen, die sich in diese Form bringen lassen. In dieser Formulierung ist der Konditionaloperator „wenn - so" der Hauptoperator der Konditionalaussage, und die Explikation seiner logischen Eigenschaften ist der Gegenstand der Konditionallogik. Wir verwenden als Konditionaloperator das Symbol $\rightarrow$. Neben diesen Aussagen werden häufig auch solche Aussagen als Konditionalaussagen angesehen, die ebenfalls Bedingungen formulieren und bei denen man versucht, ihren Hauptoperator mit Hilfe des Konditionaloperators zu definieren. Solche Aussagen sind etwa: „da A, so B", „wenn A wäre, so wäre B", „selbst wenn A, so B". Konditionalaussagen werden in der Sprachpraxis sehr oft verwendet. Überall dort, wo Bedingungen formuliert oder gestellt werden, spielen sie eine große Rolle. So werden Gesetze in der Naturwissenschaft, Theoreme in der Mathematik und Regularitäten in den Sozialwissenschaften überwiegend als Konditionalaussagen formuliert: „Wenn durch eine Spule elektrischer Strom fließt, so bildet sich um sie herum ein Magnetfeld", „Wenn zwei Dreiecke zu einem dritten kongruent sind, so sind sie zueinander kongruent" oder „Wenn Kulturvölker von Barbaren besiegt wurden, nahmen meist die Sieger die Sitten der Besiegten an". Auch Erklärungen wie „Der Stab dehnt sich aus, weil er erwärmt wird" lassen sich genau wie Entschuldigungen „Auf Grund seiner Krankheit konnte er nicht an der Prüfung teilnehmen" als Konditionalaussagen formulieren.

Konditionalaussagen erlauben es, Aussagen über fiktive Ereignisse treffen zu können: „Wenn ich den Strom einschalten würde, würde sich um diese Spule herum ein Magnetfeld bilden", „Selbst wenn du fünf Minuten früher gekommen wärst, hättest du den Zug nicht geschafft", „Wenn Frankreich einen König hätte, wäre es ein Mann". Zu dieser Gruppe gehören auch Aussagen über zukünftige Ereignisse: „Wenn ich den Strom einschalte, wird sich um diese Spule herum ein Magnetfeld bilden", „Wenn du die Rechnung richtig abgeschlossen haben wirst, wirst du die Zahl 13 herausbekommen haben".

Ein großer Teil der technischen Vorschriften und juristischen bzw. ethischen Normen sind als Konditionalaussagen formuliert: „Wenn die rote Markierung erscheint, schalten Sie das Gerät sofort aus", „Wenn jemand vorsätzlich diese oder jene Tat begeht, so ist er so oder so zu bestrafen" oder „Wenn jemand in Not ist, so nutze diese Notlage nicht für dich aus". Werden diese bedingten Imperativsätze in Aussagen über die gesollten Handlungen umformuliert, werden die Handlungsanweisungen zu Konditionalaussagen, die diese Handlungen beschreiben („Wenn die rote Markierung erscheint, so soll das Gerät sofort ausgeschaltet werden"). Genau wie diese werden hier auch Aussagen nicht speziell betrachtet werden, mit deren Hilfe Versprechen und Verpflichtungen formuliert werden, wie etwa „Wenn du mir das Geld leihst, bringe ich es dir morgen zurück" oder „Wenn das Gerät nicht funktioniert, ersetzen wir es kostenlos durch ein neues". Definitionen, die keine Aussagen sind, werden häufig mit dem Operator „genau dann, wenn" als Konditionalaussagen formuliert. Tatsächlich werden mit Aussagen wie „Eine Relation heißt genau dann *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist" ja auch die Bedingungen angegeben, unter denen bestimmte Eigenschaften (hier: *Äquivalenzrelation* zu heißen) zugesprochen werden.

Die Vielzahl der Funktionen, die Konditionalaussagen in der Sprache erfüllen können, erklärt das außerordentliche Interesse an diesen Aussagen. Als aussagenbildender Operator der natürlichen Sprache wird das „wenn - so" genau so problemlos und oft benutzt wie „und", „oder" oder „nicht". Im Unterschied zu diesen, für die die Konjunktion, Adjunktion und die Negationen der klassischen Aussagenlogik und der nichtklassischen Prädikationstheorie - von einigen Ausnahmen abgesehen - im wesentlichen gut begründete und intuitiv akzeptable logische Explikationen sind, ist der dem „wenn - so" entsprechende Operator der klassischen Logik, die Subjunktion, keine zufriedenstellende Explikation. Mit Ausnahme der Mathematik, in deren Sprachgebrauch die Verwendung der Subjunktion anstelle des „wenn - so" zumindest außerhalb der Schulmathematik durchgesetzt wurde, gibt es kein Gebiet, in dem der Konditionaloperator wie eine Subjunktion verstanden wird. Da sich die Logik lange Zeit vorrangig an den Bedürfnissen der Mathematik orientiert hat, ist dies oft entweder gar nicht erkannt oder als unwichtig abgetan worden. Versuche, dennoch einen intuitiv akzeptablen Konditionaloperator zu definieren, scheiterten zumeist an der großen Zahl der sprachlichen Mittel, mit denen Konditionalaussagen in den natürlichen Sprachen ausgedrückt werden können. Jeder vorgeschlagene Operator, der „der Konditionaloperator" sein soll, kann mit Beispielen konfrontiert werden, die konditionale Strukturen haben und nicht durch den Operator expliziert werden können. Jeder Vorschlag für einen speziellen Konditionaloperator, etwa für „da - dann" oder „wenn wäre - so wäre", verlangt aber eine Begründung, warum gerade dieser modelliert werden soll, und eine Systematisierung der Konditionalaussagen überhaupt. Es ist also notwendig, sich über den Anspruch, der mit einer Konditionallogik erfüllt werden soll, zu einigen.

Welche Aussagen der natürlichen Sprache in die Form „wenn A, so B" gebracht werden können, ist ein außerlogisches Problem. Für viele Aussagen fällt diese Entscheidung leicht, manchmal wird es verschiedene Möglichkeiten der Explikation geben. In jedem Falle aber soll gelten: Wenn eine Aussage der natürlichen Sprache als Konditionalaussage aufgefaßt wird, so werden die Eigenschaften des Konditionaloperators durch die noch zu beschreibende Konditionallogik geregelt. Eine bestimmte Verwendung des „wenn - so" wird also durch die Konditionallogik vorgeschrieben, andere werden damit ausgeschlossen. In anderen als dem hier beschriebenen System der Konditionallogik werden andere Normen zur Verwendung des Konditionaloperators gesetzt, so daß zu jeder Konditionallogik mit dem Anspruch auf Anwendbarkeit in den natürlichen Sprachen eine Begründung für die gesetzten Regeln gehört. Diese Begründung schließt nicht aus, daß andere Regelsysteme ebenfalls begründet werden können; in ihr werden die intuitiven Rahmenbedingungen formuliert, innerhalb derer die entsprechende Konditionallogik sinnvoll anwendbar ist. Wenn solche Überlegungen ausreichend deutlich formuliert sind, erlauben sie es, die Qualität der Explikation des „wenn - so" im formalen System zu beurteilen.

Obwohl das Festlegen der Regeln für den Konditionaloperator ein normativer Akt ist und also abhängig von den Absichten und Vorhaben des Logikers, besitzt die Konditionallogik einen beschreibenden Aspekt. Jeder Nutzer einer natürlichen Sprache, in der ein „wenn - so" vorkommt, hat intuitive Vorstellungen darüber, nach welchen Regeln dieser Operator in einfachen Fällen gebraucht wird. Ein formaler Konditionaloperator wird intuitiv um so akzeptabler sein, je mehr der Nutzer diese Regeln auch wiederfindet. Ein konditionallogisches System beschreibt also im Idealfall auch einen möglichst großen konsistenten Teil der Regeln für „wenn - so" aus der Umgangssprache, außerdem bietet es natürlich Regeln für kompliziertere Fälle, die in der Umgangssprache nicht geregelt sind.

Übung:

Formulieren Sie folgende Aussagen als Konditionalaussagen:

a) Wasser hat die größte Dichte bei 4°C.
b) Ständiges Üben führt zum Erfolg.

c) Keine Frage blieb unbeantwortet.
d) Sobald der Strom eingeschaltet ist, schlägt der Zeiger am Meßgerät aus.
e) Der Student hätte bei fleißigerer Vorbereitung ein besseres Prüfungsergebnis ereicht.

13.2 Wahrheitswerte von Konditionalaussagen

Konditionalaussagen sind nicht wahrheitsfunktional. Im Gegensatz zu den Operatoren der klassischen Aussagenlogik genügt es für die Feststellung der Wahrheit einer Aussage $A \to B$ nicht, die Wahrheitswerte der Aussagen A und B zu kennen. Auch zur Festellung der Falschheit von $A \to B$ genügt das Wissen um die Wahrheitswerte von A und B nur in einem einzigen Fall: Wenn A wahr ist und B falsch, dann ist die Aussage $A \to B$ falsch. Konditionalaussagen können also bei einer beliebigen Kombination der Wahrheitswerte der sie konstituierenden Teilaussagen falsch sein:

1) Wenn ein Elektron negativ geladen ist, so sind die geraden Zahlen ohne Rest durch 2 teilbar.
2) Wenn 6 durch 2 teilbar ist, ist 6 nicht durch 3 teilbar.
3) Wenn ein Elektron positiv geladen ist, so ist seine Masse geringer als die eines Wasserstoffatomkerns.
4) Wenn ein Elektron positiv geladen ist, so ist 6 nicht durch 3 teilbar.

Die erste Aussage ist falsch, obwohl sowohl Antezedent als auch Konsequent wahr sind. Diese Aussage würde, mit der Subjunktion expliziert, aus diesem Grund wahr sein. Eine solche Explikation ist für die erste Aussage aber offensichtlich deshalb ungünstig, weil zwischen der negativen Ladung eines Elektrons und Teilbarkeitsregeln keine Zusammenhänge bestehen. Jemand, der mit den semantischen Regeln für die Subjunktion nicht vertraut ist, könnte einwenden: „Aber wenn Elektronen nicht negativ geladen sind, sind die geraden Zahlen doch auch durch 2 teilbar."

Die zweite Aussage, mit wahrem Antezedent und falschem Konsequent, ist auch deswegen falsch, weil zwischen der Teilbarkeit durch 2 und der durch 3 kein solcher Zusammenhang besteht. Sie bleibt auch falsch, wenn die Aussage mit einer Subjunktion als Hauptoperator expliziert wird: die Subjunktion ist (nur dann) falsch, wenn das Vorderglied wahr und das Hinterglied falsch ist. Solche Aussagen mit dem Konditionaloperator sind immer falsch, weil sonst die Abtrennungsregel für den Konditionaloperator $(A \to B) \land A \vdash B$ nicht gelten würde. Diese beschreibt aber den zentralen Punkt der Bedingtheit überhaupt und ist deshalb für alle Konzeptionen von Implikationen unverzichtbar.

Die dritte Aussage ist nicht deshalb falsch, weil das Antezedent falsch und das Konsequent wahr ist, sondern weil der Zusammenhang zwischen der Ladung und der Masse des Elektrons nicht stimmt. Ein Einwand gegen diese Aussage würde sicher etwa so formuliert werden: „Aber ein Elektron ist doch negativ geladen, und außerdem gibt es doch positiv geladene Teilchen, die schwerer sind als ein Wasserstoffatomkern".

Zweifellos ist die vierte Aussage, in der Antezedent und Konsequent falsch sind, nicht wahr. Allerdings kann der Einwand gegen diese Aussage auch in der Form: „Das ist ja sinnlos" erfolgen; bei diesem Zugang ist die Aussage weder wahr noch falsch (sie hat entweder keinen oder einen dritten Wert). Hier werden solche Aussagen als falsch betrachtet, vor allem, weil das Kriterium für das „weder falsch noch wahr" unklar ist. Warum werden die zweite und die dritte Aussage nicht als sinnlos betrachtet, aber manchmal die erste und die vierte? Es ist durchaus vorstellbar, daß für den einen ein angenommener Zusammenhang zwischen der Teilbarkeit durch 2 und der durch 3 genauso schockierend und unsinnig ist, wie für den anderen der zwischen der Ladung eines Teilchens einerseits und Teilbarkeitsregeln auf der anderen Seite.

Es lassen sich leicht Beispiele analog zu den Aussagen 1, 3 und 4 finden, in denen die Konditionalaussage wahr ist.

Bei der Diskussion der vier Beispielaussagen wurde mehrfach auf den fehlenden Zusammenhang hingewiesen. Allein an den Beispielen für die Funktionen, die Konditionalaussagen in der Sprache erfüllen können, läßt sich bereits erkennen, daß solche Zusammenhänge sehr unterschiedlich sein können. Im Kapitel zur Folgerungstheorie ist eine Art des Zusammenhangs bereits ausführlich besprochen worden: der zwischen Voraussetzung und Folgerung in einer Aussage der logischen Folgebeziehung. Es wird sich zeigen, daß auch solche Zusammenhänge mit Konditionalaussagen formuliert werden können. Die dort diskutierten Systeme von nichtwahrheitsfunktionalen Implikationen sind alle auch Versuche, nichtklassische Modelle für das „wenn - so" zu schaffen. Allerdings gilt auch: was Paradoxie der materialen oder strikten Implikation in bezug auf die logische Folgebeziehung ist, ist auch eine solche in bezug auf einen intuitiv akzeptablen Konditionaloperator, eine strenge Implikation wäre nur dann eine Lösung für die Konditionallogik, wenn allgemeine Kriterien angegeben würden, wann Formeln paradox sind usw. Diese Kalküle werden daher im weiteren nicht mehr betrachtet.

Wie schon erläutert, sind die formulierten Zusammenhänge und die sprachlichen Mittel zur Formulierung sehr zahlreich und unterschiedlich. Dies und die unumgängliche Normierung der Verwendung von „wenn - so" legen es nahe, Konditionalaussagen zunächst zu klassifizieren. Im Gegensatz zu den meisten Logikern, die sich mit Konditionallogik beschäftigen und zumeist nach den sprachlichen Mitteln oder den Funktionen klassifizieren, wird hier eine Klassifikation nach der Art und Weise, wie Konditionalaussagen gebildet werden, vorgeschlagen.

Übungen:

1. Bilden Sie Beispiele für wahre Konditionalaussagen:
   a) deren Antezedent und Konsequent wahr sind;
   b) deren Antezedent und Konsequent falsch sind;
   c) deren Antezedent falsch und deren Konsequent wahr ist!
2. Überlegen Sie sich Beispiele dafür, welche Arten von Zusammenhängen durch Konditionalaussagen formuliert werden können!
3. Schauen Sie sich noch einmal das Kapitel zur Folgerungstheorie an, und formulieren Sie anschließend Ihre Meinung zur Subjunktion, zur strikten Implikation und zur Implikation des Systems E als logische Modelle des „wenn - so", und begründen Sie diese!
4. Welche der folgenden Konditionalaussagen sehen Sie als sinnvoll an und welche nicht?
   a) Wenn es regnet oder nicht regnet, so ist $2 \cdot 2 = 4$.
   b) Wenn eine Primzahl durch 9 teilbar ist, so ist sie durch 3 teilbar.
   c) Wenn ein Körper sich an einem Ort und gleichzeitig nicht an diesem Ort befindet, so bewegt er sich.
   d) Wenn ein Körper erhitzt wird, so dehnt er sich aus.
   e) Wenn $2 \cdot 2 = 5$, so ist der Schnee weiß.

13.3 Arten von Konditionalaussagen

Konditionalaussagen werden gewonnen:

1) aus empirischen Untersuchungen;
2) aus Aussagen über die logische Folgebeziehung;
3) aus terminologischen Festlegungen;
4) durch Setzen von Axiomen und Postulaten;
5) aus anderen Aussagen (auch Konditionalaussagen) nach logischen Regeln.

Empirische Untersuchungen sind kein rein logisches Verfahren, und sie sind auch nicht auf die Ebene der Sprache begrenzt. Diese Art und Weise, Konditionalaussagen zu gewinnen, unterscheidet sich darin wesentlich von den unter 2 bis 5 genannten. Ein Beispiel für eine Konditionalaussage, die aus empirischen Untersuchungen gewonnen werden kann, ist die Aussage „Immer wenn durch diese Leitung Strom fließt, bildet sich um sie herum ein Magnetfeld“. Solche allquantifizierten konditionalen Aussagen über Relationen zwischen Ereignissen (dem Stromdurchfluß und dem Magnetfeldaufbau) sind deshalb besonders interessant, weil sie gemeinhin als empirische Gesetzesaussagen verstanden werden. Das empirische Gesetz, welches von der Beispielaussage behauptet wird, ist das vom regelmäßigen Zusammenhang zwischen dem Stromfluß im Leiter und dem Magnetfeldaufbau um ihn herum. Konditionalaussagen, die aus empirischen Untersuchungen gewonnen worden sind, werden in Abhängigkeit von der Qualität der empirischen Untersuchungen als wahr oder falsch bewertet.

Aus einer Aussage der logischen Folgebeziehung kann eine Konditionalaussage nach folgender Regel gewonnen werden:

> In einer Aussage $A \vdash B$ werden das Zeichen der logischen Folgebeziehung durch den Konditionaloperator und die Namen der Aussagen A und B durch die Aussagen selbst ersetzt.

Ein Beispiel für eine solche Konditionalaussage ist die Aussage $A \wedge B \rightarrow A$, die aus Axiom *A3* des Systems der strikten logischen Folgebeziehung gewonnen werden kann. Aussagen, die aus Aussagen der logischen Folgebeziehung gewonnen wurden, werden als wahr oder falsch in Abhängigkeit davon anerkannt, ob die zugrunde liegende Aussage der logischen Folgebeziehung Theorem im verwendeten System der Folgebeziehung ist oder nicht. Je nachdem, welche Form der logischen Folgebeziehung verwendet wird, kommt man zu unterschiedlichen gültigen Konditionalaussagen.

Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels werden Verfahren vorgestellt, nach denen man axiomatisierte Systeme solcher Konditionalaussagen erhält.

Terminologische Festlegungen sind Postulate über den Gebrauch von Termini. Die bekannteste Art terminologischer Festlegungen sind Definitionen, mit deren Hilfe ein Terminus unter Verwendung anderer Termini neu in eine Sprache eingeführt wird. Im strengen Sinne sind also Definitionen keine Aussagen, die wahr oder falsch sind, sondern sprachliche Handlungen, die wie andere Handlungen zweckmäßig oder unzweckmäßig, gelungen oder mißlungen sind. Deshalb ist die in wissenschaftlichen Texten häufig anzutreffende Formulierung, daß aus einer Definition diese oder jene Folgerungen gezogen werden, im strengen Sinne unkorrekt: die Relation der Folgebeziehung ist nur für Aussagen definiert. Allerdings lassen sich die Regeln angeben, nach denen man aus Definitionen Aussagen bilden kann. Es sind diese Aussagen, oder Folgerungen aus diesen Aussagen, die gemeinhin als „Folgerungen aus Definitionen“ bezeichnet werden.

Bevor zwei solche Regeln und Beispiele für sie betrachtet werden, wird ein Operator als Entsprechung des „genau dann, wenn“ definiert, der in solchen Fällen verwendet wird:

D1. $A \leftrightarrow B \equiv_{Def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
Dieser Operator wird *Bikonditionaloperator* genannt.

Da die Definitionstheorie hier noch nicht Gegenstand der Untersuchung ist, sollen nur zwei ganz allgemeine Definitionsschemata verwendet werden:

$a \rightleftharpoons_{Def} b$, wobei a und b Termini sind, - der Terminus a ist definitionsgleich dem Terminus b; und
$A \equiv_{Def} B$, wobei A und B Aussagen sind, - die Aussage A ist definitionsgleich der Aussage B.

Ein Beispiel für das erste Schema ist die Definition: „Eine logisch indeterminierte Formel ist nach Definition eine Formel, die weder Tautologie noch Kontradiktion ist." In ihr wird der Terminus „logisch indeterminierte Formel" mit Hilfe der (vorher irgendwie anders definierten) Termini „Tautologie" und „Kontradiktion" definiert. Als Regel zur Bildung von Aussagen kann verwendet werden:

Wenn $a \rightleftharpoons_{Def} b$, so ist $A \leftrightarrow B$, wobei B aus A durch Ersetzen von Vorkommen von a in A durch b entstand, eine wahre Aussage.

Nach dieser Regel läßt sich aus der Beispieldefinition die Aussage: „Die kürzeste aussagenlogische Formel ist eine logisch indeterminierte Formel genau dann, wenn sie weder Tautologie noch Kontradiktion ist" gewinnen.

Ein Beispiel für das zweite Schema ist die Definition: „Ein deduktives logisches System ist semantisch widerspruchsfrei heißt nach Definition, daß in diesem System keine Formel A so vorkommt, daß sowohl A als auch $\sim A$ Theorem sind". Auch die Definitition *D1* genügt diesem Schema. Mit diesem Verfahren werden häufig Prädikate definiert: eine Aussage über das System wird definitionsgleich einer anderen über dieses System gesetzt. Als Regel zur Bildung von Aussagen kann offensichtlich verwendet werden:

Wenn $A \equiv_{Def} B$, so ist $A \leftrightarrow B$ eine wahre Aussage.

Nach dieser Regel läßt sich aus der Beispieldefinition die Aussage „Ein deduktives logisches System ist semantisch widerspruchsfrei genau dann, wenn in diesem System keine Formel A so vorkommt, daß sowohl A als auch $\sim A$ Theorem sind" gewinnen.

Die beiden Bildungsregeln für Konditionalaussagen aus Definitionen sind nur Beispiele für Verfahren, Konditionalaussagen aus terminologischen Festlegungen zu bilden. Mit Hilfe der im Kapitel „Terminitheorie" beschriebenen Mittel können weitere solche Regeln formuliert werden.

Aussagen der Form „Wenn A, so B" können als Axiome oder Postulate gesetzt werden, um dann nach logischen Regeln Schlüsse aus ihnen ziehen zu können. Ein Beispiel dafür aus der Wissenschaftsgeschichte ist eines der Axiome der Newtonschen Mechanik: „Ein Körper befindet sich solange im Zustand relativer Ruhe oder geradlinig gleichförmiger Bewegung, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte gleich Null ist". Dieses Axiom läßt sich als Bikonditionalaussage ausdrücken.

An dieser Stelle sei bereits darauf hingewiesen, daß irreale Konditionalaussagen häufig als Postulate gesetzt werden. Irreale Konditionalaussagen sind Konditionalaussagen, deren Antezedent falsch ist. Als Postulate werden sie in Abhandlungen über Geschichte oder über vergangene Handlungen einzelner Menschen verwendet: „Wenn Rom im dritten punischen Krieg verloren hätte, läge der Vatikanstaat in Nordafrika" oder „Wenn Peter sich ein wenig mehr Mühe gegeben hätte, hätte er noch ein Tor geschossen". In solchen Texten sind diese Aussagen oft unüberprüfbar und werden deshalb als Ausdruck der Überzeugungen des Autors postuliert.

Die Schlußregeln, nach denen Konditionalaussagen aus anderen Aussagen gewonnen werden können, sind der zentrale Teil der Konditionallogik. Im weiteren Sinne sind das nicht nur Regeln zum Gewinnen von Aussagen, deren Hauptoperator der Konditionaloperator ist, sondern auch zum Schließen aus Konditionalaussagen und zum Schließen aus und auf Negationen, Konjunktionen und Adjunktionen von Konditionalaussagen. Ein Beispiel für eine unumstrittene Regel ist: „Aus A und $\sim B$ folgt $\sim(A \rightarrow B)$“, eine Regel, über die im Zusammenhang mit den Wahrheitswerten für Konditionalaussagen bereits gesprochen wurde. Eine vieldiskutierte und umstrittene Regel ist die Transitivitätsregel für Konditionalaussagen:

„Aus $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$ folgt $A \rightarrow C$“.

Auf die Beispielaussagen aus dem Abschnitt über Definitionen lassen sich die Beseitigungsregeln für Bikonditionale anwenden: „Wenn $A \leftrightarrow B$, so $A \rightarrow B$“ und „Wenn $A \leftrightarrow B$, so $B \rightarrow A$“. Danach kann man aus diesen Aussagen beispielsweise auf „Wenn die kürzeste logische Formel weder Tautologie noch Kontradiktion ist, so ist sie eine logisch indeterminierte Formel“ schließen.

Bevor ein Kalkül für die Konditionallogik angegeben wird, begründen wir die wichtigsten Regeln.

Übungen:

1. Bestimmen Sie, auf welche Art die folgenden Konditionalaussagen gewonnen wurden:
   a) Wenn Waldi ein Dackel ist, ist Waldi ein Hund.
   b) Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Zahl selber durch 3 teilbar.
   c) Wenn ein Körper erhitzt wird, so dehnt er sich aus.
   d) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, ist es auch gleichwinklig.
   e) Wenn eine Formel Theorem im System des natürlichen Schließens ist, so gibt es für diese Formel einen Beweis.
   f) Wenn Caesar kommandierender General der amerikanischen Truppen in Vietnam gewesen wäre, so hätte er den Einsatz von Atomwaffen befohlen.
2. Finden Sie Beispiele für Konditionalaussagen, die auf mehr als eine Art und Weise erhalten werden können!
3. Überlegen Sie sich, wie falsche Konditionalaussagen entstehen können! Finden Sie Beispiele!
4. Lesen Sie noch einmal die Definition für absolute und semantische Widerspruchsfreiheit logischer Systeme nach! Zeigen Sie Schritt für Schritt, wie der Satz „Wenn ein deduktives logisches System semantisch widerspruchsfrei ist, so ist es auch absolut widerspruchsfrei“ als Folgerung (im erläuterten Sinn) aus den Definitionen zu erhalten ist!
5. Bilden Sie die *D1* entsprechende Bikonditionalaussage, und schließen Sie auf zwei Folgerungen! Warum kann in den entstandenen Formeln das Zeichen $\rightarrow$ mehrfach auftreten, während das mehrfache Auftreten von $\vdash$ mit gutem Grund syntaktisch unterbunden wurde?
6. Nach welchen Verfahren können folgende Konditionalaussagen gewonnen sein?
   a) Wenn $A \vdash B$ eine Formel der Folgebeziehung ist, so tritt in A und in B das Zeichen der Folgebeziehung nicht auf.
   b) Wenn das Essen versalzen ist, ist die Köchin verliebt.
   c) Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder bleibt, wie es ist.
   d) Wenn die Summe der auf einen Körper einwirkenden Kräfte gleich Null ist, so befindet er sich in relativer Ruhe oder geradlinig gleichförmiger Bewegung.

e) Wenn eine Zahl gerade ist, so ist sie durch 2 teilbar.
f) Wenn ein Viereck vier rechte Winkel besitzt, so halbieren sich die Diagonalen des Vierecks.
g) Wenn ich nicht ins Theater und auch zeitig ins Bett gehe, gehe ich nicht ins Theater oder nicht zeitig ins Bett.
h) Wenn man alle Gesetze studieren sollte, so hätte man gar keine Zeit, sie zu übertreten. (Goethe)

7. Erklären Sie, wovon die Wahrheitswerte der in Aufgabe 6 genannten Konditionalaussagen abhängig sind!

13.4 Konditionaloperator und logische Folgebeziehung

Im Rahmen der klassischen mathematischen Logik wurden Konditionalaussagen oft mit Aussagen über die logische Folgebeziehung gleichgesetzt. Zumeist äußerte sich das so, daß Aussagen mit der Subjunktion $A \supset B$ (die für Konditionalaussagen standen) als „Aus A folgt B“ gelesen wurden. Ein Beispiel für das lange Zeit übliche Durcheinanderwerfen von Subjunktion, Konditionaloperator und Folgebeziehungsprädikat läßt sich bei dem Logiker und Mathematiker Novikov finden. Er schreibt die Subjunktion einführend: „$A \rightarrow B$; diese Aussage ist dann und nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. A heißt Voraussetzung bzw. Prämisse, B Behauptung bzw. Conclusio und die Aussage $A \rightarrow B$ Implikation. Dieser Operation entspricht in der Umgangssprache die Verknüpfung ‚wenn ... so‘, also hier ‚wenn A, so B‘.“ (Novikov 1973, S. 20) Im Anschluß an den geäußerten Gedanken, daß sich in der Mathematik die Subjunktion als Explikation für das „wenn - so“ durchgesetzt hat, könnte man auf den Gedanken kommen, daß zumindest innerhalb der Mathematik eine gewisse Gleichsetzung von Folgebeziehung, Subjunktion und Konditionaloperator unschädlich oder sogar berechtigt ist. Aber selbst auf diesem Gebiet gilt: Die Unterschiede zwischen $A \vdash B$ und $A \rightarrow B$ sind wesentlich, auch wenn logische Beziehungen zwischen ihnen bestehen.

Der erste Unterschied besteht im semantischen Niveau, auf dem sich diese Aussagen befinden. In der Aussage $A \vdash B$ wird eine Aussage über die beiden Aussagen A und B getroffen. Das Zeichen $\vdash$ steht für ein logisches Prädikat, welches Subjekten zugesprochen wird (oder abgesprochen werden kann). Syntaktisch haben solche Aussagen die Form $((tA, tB) \leftarrow \vdash)$, wobei $\leftarrow$ der Prädikationsoperator des Zusprechens und t der terminibildende Operator „die Aussage ...“ ist. In der Aussage $A \rightarrow B$ dagegen wird darüber gesprochen, worüber auch in A und B gesprochen wird, und nicht über die Aussagen A und B. Dieser grundlegende Unterschied zwischen Aussagen über die logische Folgebeziehung und Konditionalaussagen ermöglichte nicht nur den Aufbau von paradoxienfreien Systemen der logischen Folgebeziehung, sondern ermöglicht auch, den Zusammenhang zwischen Folgebeziehungstheorien und Konditionallogik zu formulieren.

Der zweite wesentliche Grund, eine Gleichsetzung von „Aus der Aussage A folgt logisch die Aussage B“ mit „Wenn A, so B“ abzulehnen, liegt darin, daß die Klasse der Konditionalaussagen umfassender ist als die der Aussagen über die logische Folgebeziehung. Im Abschnitt zur Klassifikation der Konditionalaussagen wurde erläutert, daß Konditionalaussagen aus Aussagen über die logische Folgebeziehung gewonnen werden können, aber auch auf andere Weise. Eine Konditionalaussage, die auf Grund empirischer Untersuchungen gilt, ist sicher selten Entsprechung eines Theorems einer logischen Folgerungstheorie.

Andere Logiker unterscheiden aus anderen Gründen Konditionalaussagen von Aussagen über die logische Folgebeziehung. So gibt es beispielsweise die Meinung, daß die Klassen entsprechender Aussagen schon deshalb unterschieden werden müssen, weil es hypothetische Gegenbeispiele gegen Aussagen über die logische Folgebeziehung gibt, die keine hypothetischen Gegenbeispiele gegen die entsprechenden Konditionalaussagen sind (Nute 1980, S. 6).

Nach der im Abschnitt 3 angegebenen Bildungsregel kann in jedem System der logischen Folgebeziehung für jede Aussage über die logische Folgebeziehung eine Konditionalaussage gebildet werden. Dazu werden das Folgebeziehungsprädikat durch den Konditionaloperator und die Namen der Aussagen A und B durch die Aussagen A und B selbst ersetzt. Grundsätzlich muß eine solche Bildungsregel für diese Konditionalaussagen für beliebige Theorien der Folgebeziehung gelten; wenn einmal eine Theorie der Folgebeziehung mit den Theoremen $A_i \vdash B_j$ ausgewählt wurde, so sind nach der Regel alle Konditionalformeln $A_i \rightarrow B_j$ gültig. Diese Aussagen sind dann aus rein logischen Gründen wahr. Wenn weiter in diesem Abschnitt als Basis für die Bildung von Konditionalaussagen das System der strikten Folgebeziehung F^K verwendet wird, so hat das zwei Gründe. Erstens halten wir es im gegebenen Zusammenhang für das am besten begründete System, und zweitens soll die Konditionaltheorie im Rahmen dieser Konzeption von Folgebeziehung entwickelt werden.

Systeme von Konditionalaussagen lassen sich auf unterschiedlichen Wegen aufbauen. Zunächst ist es offensichtlich möglich, zum System F^S der logischen Folgebeziehung eine Regel hinzuzufügen, die es gestattet, von Theoremen der Form $A \vdash B$ zu Theoremen der Form $A \rightarrow B$ überzugehen und so ein System der Konditionallogik F^K zu gewinnen. Weiter erreicht man dieselbe Klasse von Konditionalaussagen, wenn in der Formulierung von F^K entsprechend verfahren wird: In den Axiomen wird das Zeichen $\vdash$ durch das Zeichen $\rightarrow$ ersetzt und in den Formulierungen der Regeln ebenfalls. Ein dritter Weg soll hier näher vorgestellt werden:

Die Sprache des Systems F^S wird um den Konditionaloperator $\rightarrow$ und die folgende Definition erweitert:

Wenn A und B Satzformeln sind, ist auch $(A \rightarrow B)$ eine Satzformel.

Satzformeln der eben eingeführten Art heißen *Konditionale*.

Zu den Axiomen und Regeln von F^S werden zusätzlich hinzugefügt:

A10. $\vdash A \rightarrow A$;

R4. Wenn $A \vdash B$ und $\vdash B \rightarrow C$, so $\vdash A \rightarrow C$.

Im so formulierten System F^{SK} sind alle Theoreme entweder Aussagen über die logische Folgebeziehung oder Konditionale. Offensichtlich gelten folgende Metatheoreme:

MT1. Wenn $\vdash A$ in F^{SK}, so ist A ein Konditional.
MT2. $A \vdash B$ ist Theorem in F^S genau dann, wenn $A \vdash B$ Theorem in F^{SK} ist.
MT3. $A \vdash B$ ist Theorem in F^S genau dann, wenn $\vdash A \rightarrow B$ Theorem in F^{SK} ist.
MT4. Wenn $\vdash A \rightarrow C$ und $\vdash B \rightarrow C$, so $\vdash (A \vee B) \rightarrow C$.
(Wenn $A \vdash C$ und $B \vdash C$ Theoreme von F^S sind, so ist auch $A \vee B \vdash C$ Theorem dieses Systems.)
MT5. Wenn $\vdash (A \wedge C) \rightarrow B$ und in C sind keine Variablen, die in A oder in B vorkommen, so $\vdash A \rightarrow B$.

Beweis: Wegen *MT3* reicht es aus, folgenden Satz zu beweisen:
Wenn $A \wedge C \vdash B$ Theorem ist und in C sind keine Variablen, die in A oder in B vorkommen, so ist $A \vdash B$ Theorem.

Da $A \wedge C \vdash B$ Theorem ist, ist A keine Kontradiktion und B keine Tautologie. Außerdem kommen aus diesem Grund und wegen der Bedingung auf C in B nur Variablen vor, die auch in A vorkommen. Es sei W eine Belegung, bei der A den Wert wahr und B den Wert falsch annimmt, dann läßt sich W stets so zu W' für die in C vorkommenden Variablen erweitern, daß der Wert von $A \wedge C$ ebenfalls wahr ist. Damit ist gezeigt, daß unter den Bedingungen des Metatheorems $A \supset B$ klassische Tautologie ist, A keine Kontradiktion und B keine Tautologie ist und alle Variablen aus B in A vorkommen. Nach der semantischen Vollständigkeit von F^S ist $A \vdash B$ beweisbar in F^S (und also auch in F^{SK}).

MT6. (Eingeschränkte Monotonie) Wenn $\vdash A \rightarrow B$, so $\vdash (A \wedge C) \rightarrow B$, wobei $A \wedge C$ keine Kontradiktion ist.

Beweis: Der Beweis wird über Axiom *A3* ($A \wedge C \vdash A$) und Regel 1 geführt.

Das System F^{SK} ist vor allem dadurch interessant, daß es zwei auch einzeln veränderliche implikative Strukturen enthält: die Folgebeziehung und den Konditionaloperator. Mit Hilfe zusätzlicher Regeln für die Konditionalaussagen, die aus der Klasse der auf der Basis von F^S gebildeten herausführen, lassen sich Unterschiede zwischen diesen Strukturen erstellen. Das ist insbesondere dann günstig, wenn die strengen Bedingungen *E1* und *E2* auf der strikten logischen Folgebeziehung für bestimmte Fälle ganz oder teilweise aufgehoben werden sollen, aber die Folgebeziehung weiter zur Verfügung stehen soll. Die Konditionalaussagen, die aus Aussagen über die logische Folgebeziehung entstanden sind, werden also zielgerichtet „verdorben“. An einigen Beispielen zeigen wir, wie man zu solchen Systemen kommt:

Zum System F^{SK} wird folgende Regel hinzugefügt:

R5. Wenn $\vdash A \rightarrow B$, so $\vdash {\sim}B \rightarrow {\sim}A$.

Es ist leicht zu sehen, daß mit dieser Regel die Bedingung *E1*, die den Sinnzusammenhang garantierende Variablenbedingung auf der strikten Folgebeziehung, für Konditionale nicht mehr gilt. Damit ist die Klasse der beweisbaren Formeln größer geworden, es ist beispielsweise die Formel ${\sim}A \rightarrow {\sim}(A \wedge B)$ beweisbar. Da aber die Transitivitätsregel für Konditionale nicht uneingeschränkt gilt, ist die (klassisch äquivalente) Einführung der Adjunktion $A \rightarrow (A \vee B)$ nicht beweisbar.

Es kann durchaus sinnvoll sein, zwischen beiden Formeln zu unterscheiden: Während mit der Einführung der Adjunktion viele der Beispiele verbunden sind, in denen ganz klar der Sinnzusammenhang verletzt wird („Wenn $2 \cdot 2 = 4$ ist, ist $2 \cdot 2 = 4$, oder mein Onkel ist in Kiew“), behauptet die beweisbare Formel nur: wenn etwas bereits nicht gilt, hebt etwas Hinzukommendes die Ungültigkeit nicht auf. Die entsprechende Aussage über die logische Folgebeziehung ${\sim}A \vdash {\sim}(A \wedge B)$ ist kein Theorem von F^{SK} + *R5*.

Nützlich wäre ein solches System dann, wenn auf der Basis von F^S zwar dem Sinnzusammenhang widersprechende Folgerungen positiven Wissens ausgeschlossen werden sollen, das Schließen auf negatives Wissen (das Wissen darum, daß etwas nicht ist) aber ohne das strenge Sinnzusammenhangskriterium zugelassen sein soll.

Zum System F^{SK} wird die uneingeschränkte Monotonieregel hinzugefügt:

R6. Wenn $\vdash A \rightarrow B$, so $\vdash (A \wedge C) \rightarrow B$.

Auch diese Regel erweitert die Klasse der beweisbaren Konditionale: die Bedingung *E2*, die kontradiktorische Voraussetzungen und tautologische Folgerungen ausschließt, wird für die Konditionale teilweise außer Kraft gesetzt. Jetzt sind beweisbare Konditionalformeln mit kontradiktorischen Antezedenten möglich, allerdings keine mit tautologischen Konsequenten wegen der fehlenden Kontrapositionsregel *R5*. Außerdem bleibt die Variablenbedingung *E1* erhalten.

Ein solcher monotoner Konditionaloperator ist dann nötig, wenn hinzukommendes Wissen über Prämissen die Gültigkeit früherer Schlüsse nicht beeinflussen soll. Ein Konditionaloperator, der zwar kontradiktorische Antezedente zuläßt, aber keine tautologischen Konsequente, kann günstig sein, wenn aus widersprüchlichem Wissen, aber nicht auf logische Wahrheiten geschlossen werden soll.

Systeme für Konditionalaussagen, die aus Aussagen über die logische Folgebeziehung entstanden sind, lassen sich also durch die Auswahl des Basissystems der logischen Folgebeziehung und durch verschiedene zusätzliche Regeln für den Konditionaloperator variieren. Die in diesen Systemen geltenden Konditionalaussagen gelten in jedem Falle allein aus logischen Gründen, und die Auswahl der Basissysteme und der zusätzlichen Regeln ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und der philosophischen Intuition.

Übungen:

1. Finden Sie Beispiele für Konditionalaussagen, die - entsprechend umformuliert - keine Aussagen über die logische Folgebeziehung sind!
2. Sehen Sie sich das System S^S der strengen logischen Folgebeziehung noch einmal an!
   a) Formulieren Sie ein System S^{SK} analog dem System F^{SK}!
   b) Überprüfen Sie, ob die Metatheoreme *MT1* - *MT5* auch für S^{SK} gelten!
   c) Zeigen Sie, daß S^{SK} weder zu F^{SK}, noch zu F^{SK} + *R5*, noch zu F^{SK} + *R6* deduktiv äquivalent ist!
   d) Überprüfen Sie, ob sich S^{SK} durch die Regeln *R5* oder *R6* erweitern läßt!
3. Überprüfen Sie, was geschieht, wenn Sie F^{SK} erweitern:
   a) durch die Regeln *R5* und *R6* gemeinsam;
   b) durch die Regel: Wenn $\vdash A \rightarrow B$, so $\vdash C \rightarrow D$, wobei $C \rightarrow D$ das Resultat der Einsetzung von nichtkonditionalen Satzformeln für Aussagenvariablen in $A \rightarrow B$ ist;
   c) durch die Regel: Wenn $\vdash A \rightarrow B$, so $\vdash A \rightarrow (B \vee C)$!
4. Es sei F^{SR} das System F^{SK}, welches durch alle in Aufgabe 3 erwähnten Regeln erweitert wurde. Zeigen Sie:
   a) Der Konditionaloperator in F^{SR} ist nicht die Subjunktion.
   (Hinweis: In F^{SR} gilt: Wenn $\vdash A \rightarrow B$, so haben A und B mindestens eine gemeinsame Variable)
   b) Durch Hinzufügen der Transitivitätsregel wird der Konditionaloperator aus F^{SR} zur Subjunktion.

13.5 Physische Folgebeziehung

Konditionalaussagen können, wie schon erläutert wurde, auf Grund empirischer Untersuchungen gewonnen werden. Da dieser Prozeß kein rein logischer Prozeß ist, gibt es auch kein logisches Wahrheitskriterium für solche Aussagen. Außerdem sind die entstehenden Konditionalaussagen sehr vielfältig: empirische Gesetzesaussagen, Kausalaussagen, Aussagen über funktionale Zusammenhänge und Regelmäßigkeiten und andere. Eine geschlossene logische Theorie über solche Konditionalaussagen gibt es nicht, und sie ist aus den angegebenen Gründen auch nicht zu erwarten. Da diese Konditionalaussagen aber in der Sprache wichtige Funktionen wahrnehmen, ist es erforderlich, sich auch mit dem logischen Hintergrund für Gruppen solcher Aussagen zu beschäftigen.

Den Gegenstand des vorliegenden Abschnitts bilden Konditionalaussagen, die auf Grund ihrer Bildung eine bestimmte Struktur haben. Es sind quantifizierte Konditionalaussagen über Relationen von Ereignissen, Aussagen der Form „Immer wenn A, so steht das A-Ereignis in einer bestimmten Relation zu einem B-Ereignis“, „Überall wo A, steht das A-Ereignis in einer bestimmten Relation zu einem B-Ereignis“ oder „Mancherorts wo A, steht das A-Ereignis in einer bestimmten Relation zu einem B-Ereignis“. Es geht also um Sätze, für die es wichtig ist, wann und wo sie gelten.

Im Bereich der Aussagesätze kann man zwei Sorten sprachlicher Gebilde unterscheiden. Sätze wie „Dackel sind Hunde“, „$10 \cdot 10 = 100$“ oder „Am 1. Januar 1991 schien in Berlin den ganzen Tag die Sonne“ gelten unabhängig von Ort und Zeit der Äußerung. Solche Äußerungen sind beispielsweise terminologische Festlegungen, Aussagen über die logische Folgebeziehung oder Aussagen, in denen auf ganz konkrete Raum-Zeit-Gebiete verwiesen wird, und sie werden *universale Aussagen* genannt. Demgegenüber werden auch Sätze wie „Es regnet“, „Peter kommt 5 Uhr“ oder „Die Straße ist vereist“ gebraucht. Solche *lokalen Aussagen* sind wahr oder falsch in Abhängigkeit davon, auf welches Raum-Zeit-Gebiet sie sich beziehen: Wo und wann es regnet oder nicht, wohin Peter an welchem Tag kommt, welche Straße wann vereist ist. So ist auch „Es regnet, und es regnet nicht“ solange kein logischer Widerspruch, solange die beiden (lokalen) Teilaussagen nicht auf dasselbe Raum-Zeit-Gebiet bezogen werden.

Bisher haben wir lokale Aussagen nicht von universalen unterschieden. Ein wesentlicher Grund dafür ist die Anlehnung der klassischen Logik an die Bedürfnisse der Mathematik, und die mathematischen Aussagen gehören zweifellos zu den universalen Aussagen. Aber auch Aussagen wie „Es regnet“ werden ja in der natürlichen Sprache so behandelt, als ob sie an sich wahr oder falsch sind. Im Normalfall weiß man, wenn man einen solchen Satz hört, auf welchen Ort und auf welche Zeit er sich bezieht (meistens auf „hier“ und „jetzt“), oder man fragt bei seinem Gesprächspartner nach und bekommt den Bezug explizit geliefert. Lokale Aussagen können also durch die Angabe der Raum-Zeit-Gebiete „universalisiert“ werden. Die Raum-Zeit-Gebiete sind nicht nur Punkte (wie „hier“ und „jetzt“) oder kleinere Intervalle (wie „am 1. Januar 1991 in Berlin“), sondern auch eventuell das ganze vorstellbare Raum-Zeit-Universum („immer und überall“). Ein Satz wie „Es regnet“ kann ganz unterschiedlich universalisiert werden:

„Es regnet immer und überall“

„Es regnet am 1. Januar 1991 in Berlin“

„Es regnet am Morgen des 1. Januar 1991 auf dem Alexanderplatz in Berlin“.

Verschiedene Universalisierungen des gleichen lokalen Aussagesatzes ergeben verschiedene universale Aussagen, die formal dann auch unterschieden werden müssen (etwa indem unterschiedliche Aussagenvariablen für sie gewählt werden). Nicht jedes Zuschreiben eines Raum-Zeit-Gebietes zu einer lokalen Aussage führt zu einer universalen, da das Gebiet so groß sein kann und Mehrdeutigkeiten zuläßt: Regnet es den ganzen Tag lang in Berlin am 1. Januar, oder nur manchmal am Tage? Aus dem Kontext wird klar, wie konkret das Raum-Zeit-Gebiet angegeben sein muß, damit eine Aussage universal ist.

Ein universaler Satz „Es regnet niemals in der Sahara“ kann als Universalisierung sowohl des Satzes „Es regnet“ (mit „es gibt keinen Moment in der Sahara“) als auch des Satzes „Es regnet nicht“ (mit „immer in der Sahara“) aufgefaßt werden.

In den Konditionalaussagen, die den Gegenstand dieses Abschnittes bilden, spielen Quantifizierungen über solche Raum-Zeit-Gebiete eine große Rolle. Es werden daher syntaktische Mittel eingeführt, um über diese Gebiete sprechen zu können:

k, k', k'', k^1, … seien räumliche oder zeitliche Koordinaten,

l, l', l'', l^1, … Variablen für solche Koordinaten,

$\forall$, $\exists$ seien All- und Einsquantor für diese Variablen.

Aussagen der Form $A(k)$ sind wahr, wenn A im Raum-Zeit-Gebiet k gilt, Aussagen der Form $\forall l A(l)$ oder $\exists l A(l)$ sind wahr, wenn A in allen Raum-Zeit-Gebieten gilt bzw. wenn es ein Gebiet gibt, in welchem A gilt. Koordinaten können nun explizit angegeben werden.

Die uns interessierenden Konditionalaussagen sind Aussagen über Relationen zwischen Ereignissen. Für Relationen führen wir die Konstanten R, $R^{'}$, $R^{''}$, R^1, … ein, und um über Ereignisse sprechen zu können, verwenden wir einen terminibildenden Operator:

> Wenn A eine (lokale oder universale) empirische Aussage ist, ist sA der Ereignisterminus „das Ereignis, daß A“.

Für die Bildung von Ereignistermini gelten bestimmte Einschränkungen und Regeln genau so, wie für die Beziehungen von Ereignistermini untereinander. Diese können und sollen hier nicht aufgeführt und analysiert werden. Es soll jedoch gelten:

> $sA(k)$ ist derselbe Terminus wie $s(A(k))$,
> so daß die Koordinaten der Aussagen auch auf die Termini bezogen werden können.

Nun sind alle Mittel beisammen, um die Bildung einer bestimmten Form von Konditionalaussagen als Ergebnis empirischer Untersuchungen beschreiben zu können:

Auf Grund empirischer Untersuchungen wird behauptet, daß ein Ereignis stattfand und in einer bestimmten Relation R zu ihm ein anderes Ereignis steht: $A \wedge R(sA, sB)$. Beispiele für solche Behauptungen sind Aussagen wie „Es regnet, und dann (danach) ist die Straße naß“, „Der Block bewegt sich nicht, und links von ihm befindet sich ein Magnet“ oder „Das Getreide ist reif, und davor begannen die Blätter von den Bäumen zu fallen“. Solche Aussagen werden im Ergebnis einmaliger Beobachtungen getroffen, dadurch sind natürlich auch „seltsame“ Aussagen nicht ausgeschlossen, wie etwa „Herr Müller trinkt Kaffee und kann dabei nicht fliegen“. Werden mehrere Beobachtungen oder Experimente durchgeführt, bezieht man bereits vorhandenes Wissen mit ein oder rät man ganz einfach, so kann man zu der Meinung kommen, daß einige der Relationen stabile Beziehungen zwischen Ereignissen bestimmter Art sind. Es gibt Methoden - beispielsweise die induktiven Methoden, Analogieschlüsse, wissenschaftsheuristische Verfahren -, die hier nicht dargestellt werden können, mit denen diese Vermutungen gestützt bzw. falsifiziert werden können. Ergebnis sind Aussagen der gesuchten Art: konditionale allquantifizierte Aussagen über Relationen zwischen Ereignissen $\forall l \exists l^{'}(A(l) \rightarrow R(sA(l), sB(l^{'})))$. Diese Aussagen werden gelesen als: „Immer wenn A, so steht in Relation R zum A-Ereignis ein B-Ereignis“. Beispiele für sie sind: „Immer wenn durch eine Spule ein Strom fließt, erfolgt gleichzeitig zum Stromfluß und um die Spule herum ein Magnetfeldaufbau“ und „Immer wenn es bei Frost regnet, gibt es nach dem Regen Eisglätte“.

Wir werden Aussagen der beschriebenen Form sowie Aussagen der Form $\exists l \exists l^{'}(A(l) \rightarrow$ $\rightarrow R(sA(l), sB(l^{'})))$ Aussagen über eine *physische Folgebeziehung* nennen. Die Gewinnung und Verifikation solcher Aussagen ist, wie schon betont, kein logischer Prozeß, und so sind sie - im Gegensatz beispielsweise zu Konditionalaussagen, die aus Aussagen über die logische Folgebeziehung stammen, - nicht als Theoreme eines logischen Systems zu erhalten. Wenn Aussagen über physische Folgebeziehungen jedoch in einer Sprache vorhanden sind, so kann man Regeln angeben, nach denen aus und auf solche quantifizierten Konditionalaussagen geschlossen werden kann.

Die Quantoren gehorchen den Regeln der klassischen Quantorenlogik, da ein nichtleerer Individuenbereich (die Raum-Zeit-Gebiete) vorausgesetzt werden kann. Einige ausgewählte Regeln für das Zusammenspiel von Konditionaloperator und Koordinatenquantoren sollen als Beispiel dafür vorgestellt werden, wie Regeln der logischen Folgebeziehung für Aussagen über physische Folgebeziehungen aussehen.

1. Die Abtrennungsregel:
 $\forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R(sA(l), sB(l'))) \wedge A(k) \vdash \exists l' R(sA(k), sB(l'))$
 $\forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R(sA(l), sB(l'))) \wedge A(k) \vdash \exists l' B(l')$

Beide Regeln sollen gelten, in einer Relationslogik ist die zweite aus der ersten ableitbar. Für welche Koordinaten die Aussage B gilt (welches konkrete B-Ereignis in der Relation R zum A-Ereignis in k steht), hängt von der Relation R ab. Manchmal lassen sich die Koordinaten ganz genau ermitteln, so etwa, wenn die Relation R die Relation „genau fünf Minuten später am gleichen Ort" ist. Läßt sich R als eine solche Funktion f von den Koordinaten des A-Ereignisses darstellen, so ist eine noch einfachere Abtrennungsregel formulierbar:

$$\forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R(sA(l), sB(l'))) \wedge A(k) \vdash B(f(k)).$$

2. Die Transitivitätsregel:
 $\forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R^1(sA(l), sB(l'))) \wedge \forall l\exists l'(B(l) \rightarrow R^2(sB(l), sC(l'))) \wedge \forall l\forall l'\forall l''(R^1(sA(l), sB(l')) \wedge R^2(sB(l'), sC(l')) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l''))) \vdash \forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l')))$

Die Relationen R^1, R^2 und R^3 werden unterschieden, weil in verschiedenen Aussagen über die physische Folgebeziehung nicht unbedingt gleiche Relationen vorkommen müssen. Wenn jedoch eine solche „Superposition" R^3 für die in den Voraussetzungen vorkommenden Relationen gefunden werden kann, die der Bedingung $\forall l\forall l'\forall l''(R^1(sA(l), sB(l')) \wedge R^2(sB(l'), sC(l')) \rightarrow$ $\rightarrow R^3(sA(l), sC(l'')))$ genügt, so kann wie in der Regel beschrieben geschlossen werden. Ein Beispiel für einen solchen Schluß ist: Aus „Immer wenn im Kino jemand mit Bonbonpapier knistert, sitzt jemand dahinter, der laut schimpft" und „Immer wenn jemand im Kino laut schimpft, sitzt jemand daneben, der sich erschrickt" folgt, daß „Immer wenn jemand im Kino mit Bonbonpapier knistert, sitzt jemand schräg dahinter, der sich erschrickt".

Häufig werden Aussagen verwendet, in denen nur eine, und zwar eine transitive Relation anstelle der drei Relationen vorkommt. Dadurch vereinfacht sich die Regel entsprechend. Welche Eigenschaften die verwendeten Relationen haben und in welchem Verhältnis sie zueinander stehen, muß durch außerlogische Axiome festgelegt werden.

An dieser Stelle soll auf einen Fakt hingewiesen werden, auf den bei der Diskussion der Schlußregeln für die Konditionallogik zurückgekommen wird. Die Transitivitätsregel ist nur in der beschriebenen Form mit allquantifizierten Voraussetzungen gültig, nicht aber in der Form

$$\exists l\exists l'(A(l) \rightarrow R^1(sA(l), sB(l'))) \wedge \forall l\exists l'(B(l) \rightarrow R^2(sB(l), sC(l'))) \wedge \forall l\forall l'\forall l''(R^1(sA(l), sB(l')) \wedge R^2(sB(l'), sC(l'')) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l''))) \vdash \forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l')))$$

oder

$$\forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R^1(sA(l), sB(l'))) \wedge \exists l\exists l'(B(l) \rightarrow R^2(sB(l), sC(l'))) \wedge \forall l\forall l'\forall l''(R^1(sA(l), sB(l')) \wedge R^2(sB(l'), sC(l'')) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l''))) \vdash \forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l'))).$$

Der Grund dafür, daß diese Regeln nicht gelten, ist offensichtlich eher ein quantorenlogischer als ein konditionallogischer.

3. Die Kontrapositionsregel:
 $\forall l\exists l'(A(l) \rightarrow R^1(sA(l), sB(l'))) \wedge \forall l\forall l'(R^1(sA(l), sB(l')) \rightarrow R^2(sB(l'), sA(l))) \vdash$ $\vdash \forall l\exists l'(\sim B(l) \rightarrow R^2(s{\sim}B(l), s{\sim}A(l')))$

Werden reflexive Relationen verwendet (wie „genau dort" oder „gleichzeitig damit"), so können die beiden Relationen zusammenfallen, und die Regel wird einfacher. Viele Relationen bilden allerdings Paare, die der Bedingung $\forall l\forall l'(R^1(sA(l), sB(l')) \rightarrow R^2(sB(l'), sA(l)))$ genügen: davor und danach, darüber und darunter, 2m tiefer und 2m höher und viele andere.

Eine besondere Rolle in der Wissenschaft spielen Aussagen über physische Folgebeziehungen, in denen die Relation zwischen den Ereignissen eine Kausalrelation ist. Solche Aussagen werden als *kausale Gesetze* (aber nicht als *Kausalgesetz*) bezeichnet und behaupten, daß wenn A in einem Raum-Zeit-Gebiet gilt, das A-Ereignis immer die Ursache eines B-Ereignisses ist. Es kann hier nicht auf die Probleme eingegangen werden, die mit der logischen Explikation von Kausalrelationen verbunden sind. Wenn jedoch einmal Eigenschaften einer Kausalrelation axiomatisch fixiert sind, so erlauben die Regeln für Aussagen über physische Folgebeziehungen problemlos das Schließen mit kausalen Gesetzen.

Übungen:

1. Welche der folgenden Aussagen sind lokal und welche universal? Begründen Sie Ihre Entscheidung!
   a) Peter steht morgens zeitig auf.
   b) Peter steht immer morgens zeitig auf.
   c) Peter steht immer am Sonntag morgens zeitig auf.
   d) Peter steht in der Wohnung seiner Freundin morgens zeitig auf.
   e) Peter steht 5.30 Uhr auf.
2. Finden Sie Beispiele für Konditionalaussagen, die lokale Aussagen, und Beispiele für Konditionalaussagen, die universale Aussagen sind! Gibt es Arten von Konditionalaussagen - nach der vorgeschlagenen Klassifikation -, die grundsätzlich universale oder grundsätzlich lokale Aussagen sind?
3. Genau wie sich universale Aussagen aus lokalen durch Angeben von Raum-Zeit-Gebieten gewinnen lassen, lassen sich lokale aus universalen Aussagen durch - auch teilweises - Streichen solcher Gebiete gewinnen.
   Welche unterschiedlichen lokalen Aussagen lassen sich aus den folgenden Aussagen gewinnen?
   a) Niemals ist es dienstags am Nachmittag in den Kaufhäusern der Spandauer Altstadt kalt.
   b) Stets gilt in Paulas Wohnung, daß wenn Peter und Paul kommen, auch Peter kommt.
4. Schreiben Sie die Beispielaussagen der Übungen 1 - 3 in der logischen Notation auf, die Ihnen das Angeben der Raum-Zeit-Gebiete ermöglicht!
5. Nehmen Sie an, R ist eine transitive Relation, die als Funktion der Koordinaten dargestellt werden kann! Sie haben folgende Voraussetzungen:
   $A(k)$
   $\forall l \exists l'(A(l) \rightarrow R(sA(l), sB(l')))$
   $\forall l \exists l'(B(l) \rightarrow R(sB(l), sC(l')))$.
   Mit Hilfe der klassischen Quantorenlogik können Sie auf einige Aussagen schließen. Finden Sie Beispiele!
6. Überprüfen Sie anhand Ihrer Sprachintuition, welche der folgenden Regeln gilt:
   a) $\exists l \exists l'(A(l) \rightarrow R^1(sA(l), sB(l'))) \wedge \forall l \exists l'(B(l) \rightarrow R^2(sB(l), sC(l'))) \wedge \forall l \forall l' \forall l''(R^1(sA(l), sB(l')) \wedge R^2(sB(l'), sC(l'')) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l''))) \vdash \exists l \exists l'(A(l) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l')))$
   b) $\forall l \exists l'(A(l) \rightarrow R^1(sA(l), sB(l'))) \wedge \exists l \exists l'(B(l) \rightarrow R^2(sB(l), sC(l'))) \wedge \forall l \forall l' \forall l''(R^1(sA(l), sB(l')) \wedge R^2(sB(l'), sC(l'')) \rightarrow R^3(sA(l), sC(l''))) \vdash \exists l \exists l'(A(l) \rightarrow R(sA(l), sC(l')))$!
7. Finden Sie Beispiele für oder gegen die Gültigkeit aller fünf Regeln, die im Zusammenhang mit der Transitivität genannt wurden!

13.6 Erwünschte und unerwünschte Formeln

Das hier vorgestellte Verständnis von Konditionalaussagen und Konditionallogik ist, wie erwähnt, nicht das einzig mögliche. Viele Diskussionen innerhalb der Konditionallogik beziehen sich auf die Gültigkeit einzelner Formeln, für einige dieser Formeln soll nun entweder begründet werden, warum sie im Rahmen des vorliegenden Zugangs akzeptiert oder verworfen werden, oder warum Kritik oder Apologie dieser Formeln nicht akzeptiert werden.

Da die meisten Konditionallogiken nicht als Systeme der logischen Folgebeziehung aufgebaut sind, werden wir nicht nur über Formeln der logischen Folgebeziehung $A \vdash B$ diskutieren, in denen Konditionaloperatoren vorkommen, sondern auch über die Gültigkeit von Konditionalaussagen $A \rightarrow B$ (in denen weitere Konditionaloperatoren vorkommen können) und über Regeln des Schließens mit Konditionalaussagen. Prinzipiell ist es aber unser Ziel, erwünschte Konditionalaussagen semantisch als Tautologien auszuzeichnen und die entsprechenden Aussagen über die logische Folgebeziehung als Theoreme im axiomatisch aufgebauten System zu haben.

1. Die Transitivitätsregel
   $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$

Gegen die Gültigkeit dieser Regel, beziehungsweise der Konditionalformel mit Konditionaloperator anstelle des Folgebeziehungsprädikats, werden Einwände in Form von vielen Gegenbeispielen erhoben. Es ist kaum möglich, alle diese Beispiele zu sammeln und zu widerlegen; glücklicherweise sind sie jedoch vielleicht alle, zumindest viele, mit einem gemeinsamen Fehler behaftet.
Es soll folgendes Beispiel betrachtet werden:

> Wenn Klaus seine Arbeit verlieren würde, so würde er weniger arbeiten.
> Wenn Klaus weniger arbeiten würde, so würde er weniger nervös sein.
> Also:
> Wenn Klaus seine Arbeit verlieren würde, so würde er weniger nervös sein.

Dieser Schluß ist, so wird behauptet, ein Schluß nach der formulierten Transitivitätsregel, führt aber zu einer falschen Folgerung (falls Klaus arbeitslos wird, wird er viel nervöser) bei wahren Voraussaetzungen. Wird jemand in einer normalen Kommunikationssituation mit diesem Beispiel konfrontiert, wird er sicherlich einwenden: „Nun ja, gerade diese Art, weniger zu arbeiten, habe ich nicht gemeint, als ich den ersten Satz behauptete“. Dieser Einwand ist auch bereits der Ansatz für die Kritik am Beispiel:

Es ist nicht so, daß immer, wenn Klaus weniger arbeiten würde, er auch weniger nervös sein würde, sondern nur manchmal. Dieser lokale Konditionalsatz muß, um richtig verstanden zu werden, universalisiert werden. Dies kann, dem Sinn nach, nicht mit Hilfe einer Allquantifizierung geschehen, sondern nur in der Form $\exists l \exists l' (A(l) \rightarrow R(sA(l), sB(l')))$. Der zweite Voraussetzungssatz läßt sich als konditionale Allaussage verstehen, aber es gibt keine Transitivitätsregel, die aus diesen Voraussetzungen den Schluß auf $\forall l \exists l' (A(l) \rightarrow R(sA(l), sC(l')))$ erlauben würde - und so soll die Folgerung im Beispiel ja wohl verstanden werden.

Es kann also festgestellt werden: Wenn die Transitivitätsregel angewendet werden soll, muß die erste Voraussetzung eine Allaussage sein. Dann ist sie falsch, und es ist nicht verwunderlich, daß die Folgerung ebenfalls falsch ist. Wenn die erste Voraussetzung aber wahr sein soll, dann ist sie eine Partikuläraussage und die Transitivitätsregel ist nicht anwendbar.

Es sind also quantorenlogische, nicht konditionallogische Probleme, die die Basis des Beispiels bilden. Eine Ablehnung der Transitivitätsregel kann jedenfalls durch solche Beispiele nicht begründet werden.

2. Die Kontrapositionsregel
   $A \to B \vdash {\sim}B \to {\sim}A$

Auch diese Regel wird mit Hilfe von Gegenbeispielen angegriffen, ist aber gültig im noch zu formulierenden System. Ein Beispiel gegen die Kontrapositionsregel ist der Schluß

Selbst wenn es morgen regnet, gibt es keinen schrecklichen Wolkenbruch.
Also:
Selbst wenn es morgen einen schrecklichen Wolkenbruch gibt, so regnet es nicht.

Das unsinnige Ergebnis der Anwendung der Kontrapositionsregel auf die Aussage in der Voraussetzung liegt auf der Hand: Wolkenbrüche gibt es nur, wenn es auch regnet.

Wie noch im Abschnitt zu irrealen Konditionalaussagen zu zeigen ist, sind „Selbst wenn - dann“ -Aussagen logisch von „Wenn - dann“ - und „Wenn wäre - dann wäre“ -Aussagen verschieden. Im Gegensatz zu diesen behaupten sie nicht das Vorhandensein, sondern das Fehlen, Nichtbestehen einer konditionalen Verbindung von Antezedent und Konsequent. So besagt die Aussage in der Voraussetzung ja gerade, daß es, ganz egal, ob es regnet oder nicht, also unabhängig vom Regen, keinen Wolkenbruch geben wird. Das Stattfinden eines Wolkenbruchs ist allerdings abhängig vom Regen, und so kommt es zu der unsinnigen Folgerung. „Selbst wenn - dann“ ist ein spezieller konditionaler Operator, der tatsächlich nicht kontraponierbar ist, in Beispielen für „Wenn - dann“ aber auch nicht verwendet werden darf.

3. Die Monotonieregel
   $A \to B \vdash (A \wedge C) \to B$

Konditionalaussagen werden häufig als Mittel verstanden, um mit Hilfe der Abtrennungsregel vom Antezedent auf das Konsequent schließen zu können. In diesem Fall besagt die Monotonieregel, daß hinzukommendes Wissen die Gültigkeit solcher Schlüsse nicht berührt. Das ist natürlich in der Sprachpraxis nicht so, neue Erkenntnisse führen doch oft dazu, daß frühere Ergebnisse revidiert werden. Aus diesem Grund sind Implikationen, die nichtmonoton sind, Untersuchungsgegenstand in den Forschungen zur Künstlichen Intelligenz und in Simulationsversuchen für praktische Wissensverarbeitung. Problemlos lassen sich Beispiele finden, die zeigen, daß die Monotonieregel nicht uneingeschränkt in der natürlichen Sprache gilt:

Wenn Peter in den Wintersport fährt, läuft er täglich stundenlang Ski.
Also:
Wenn Peter in den Wintersport fährt und sich bei der Ankunft auf dem Parkplatz ein Bein bricht, läuft er täglich stundenlang Ski.

Diese Beispiele beruhen darauf, daß bei Wahrheit des (neuen) Antezedent das Konsequent nicht mehr wahr werden kann. Obwohl es in manchen Fällen günstig sein kann, auch uneingeschränkt monotone Konditionale zur Verfügung zu haben, sollte die Monotonieregel für die Bedürfnisse der natürlichen Sprache und beispielsweise für die Sprache der Philosophie verworfen werden. Es bieten sich einige schwächere Monotonieregeln an, die nicht durch die Beispiele gegen die uneingeschränkte Monotonie berührt werden:

$(A \to B) \wedge (C \to B) \vdash (A \wedge C) \to B$
$(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash (A \wedge C) \to B$
und andere.

Die Kompatibilität mit dem noch zu formulierenden System soll an dieser Stelle kein entscheidendes Argument sein, dennoch ist anzumerken, daß die uneingeschränkte Monotonieregel das Sinnzusammenhangskriterium verletzt, die beiden schwächeren Regeln jedoch nicht.

4. Die Beseitigungsregel für konjunktive Antezedente
   $((A \wedge C) \rightarrow B) \wedge A \vdash C \rightarrow B$

Ein Beispiel, welches gegen diese Regel angeführt wird, ist:

> Wenn Wasser auf 100° C erhitzt ist und die Baumwollpreise steigen, so geht Wasser in Dampf über. Wasser ist auf 100° C erhitzt.
> Also:
> Wenn die Baumwollpreise steigen, geht Wasser in Dampf über.

Die Folgerung ist tatsächlich nicht akzeptabel, die erste Voraussetzung kann Ergebnis empirischer Untersuchungen sein oder als Postulat gesetzt worden sein - dann weiß der Sprecher unter Umständen nicht, daß er einen überflüssigen Umstand mitberücksichtigt. Dann hat die Folgerung aber Sinn für den Sprecher, er weiß auch nicht, daß sie nicht akzeptabel ist. Wenn die Voraussetzung allerdings aus anderen Aussagen gewonnen wurde, so unter Verwendung der uneingeschränkten Monotonieregel - und die wurde verworfen. Das Beispiel kann also in dem Fall gar nicht entstehen. Deshalb ist die Regel unter eingeschränkter Monotonieregel harmlos und kann verwendet werden.

5. Das konditionale ausgeschlossene Dritte
   $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow \sim B)$

Die Gültigkeit dieser Formel, die nicht als Formel der logischen Folgebeziehung dargestellt werden kann, wird mit der Gültigkeit zweier angeblich harmloser Formeln begründet. Die erwähnte Formel ist herleitbar aus $A \rightarrow (B \vee \sim B)$ und $(A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$, und so wird die Annahme des Gesetzes vom konditionalen ausgeschlossenen Dritten angeblich mit der Distributivität erzwungen.

Die Formel $(A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$ ist tatsächlich unverdächtig, die Formel $A \rightarrow (B \vee \sim B)$ jedoch ganz und gar nicht. Die meisten Konditionalsätze dieser Form werden einfach als sinnlos empfunden. Da solche Formeln verworfen werden, ist auch kein formaler Zwang zur Annahme des Gesetzes vom konditionalen ausgeschlossenen Dritten mehr gegeben, und die Formel kann verworfen werden. Genügend Beispiele sprechen für ein Verwerfen:

> Wenn Peter Paul besucht, ist $2 \cdot 2 = 4$; oder wenn Peter Paul besucht, ist nicht $2 \cdot 2 = 4$.

Während $A \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$ also angenommen werden kann, soll das konditionale ausgeschlossene Dritte verworfen werden, genau wie die uneingeschränkte Konditionalisierung von Tautologien.

6. Der Zusammenhang von Konditionalen und Konjunktionen
   Wenn $A \vdash B \rightarrow C$, so $A \wedge B \vdash C$.
   Wenn $A \wedge B \vdash C$, so $A \vdash B \rightarrow C$.

Die erste dieser beiden Regeln besagt nicht mehr, als daß man die Abtrennungsregel benutzen kann - und die steht außer jeder Diskussion. Allein diese konditionale Regel gemeinsam mit aussagenlogischen Prinzipien garantiert die Gültigkeit von „Wenn $A \vdash B \rightarrow C$, so $A \wedge B \vdash C$".

Die zweite Regel ist ein Analogon zum Deduktionstheorem. Diese Regel erlaubt aber das Entstehen von Formeln der logischen Folgebeziehung, mit denen aus Formeln, die keinen Konditionaloperator enthalten, auf Konditionalformeln geschlossen werden kann. Das ist nicht immer günstig, und so ist tatsächlich mit der angegebenen Regel und den Regeln der Aussagenlogik beweisbar:

$A \wedge B \vdash A \rightarrow B$.

Wie das folgende Beispiel zeigt, ist diese Formel keinesfalls zu akzeptieren:

Potsdam hat über 100 000 Einwohner, und Potsdam ist Landeshauptstadt.
Also:
Wenn Potsdam über 100 000 Einwohner hat, dann ist Potsdam Landeshauptstadt.

Während also die erste Regel zugelassen wird, muß die zweite begründet verworfen werden.

7. Eine Einführung von Konditionalen
   Wenn $A \vdash B$, so $C \to A \vdash C \to B$.

Diese Regel ist mit der folgenden Überlegung begründet: wenn die Voraussetzung in einer Schlußfolgerung konditional bedingt ist, impliziert dieselbe Bedingung dann auch die Folgerung. Es ist also eine Art gemischter Transitivitätsregel bezüglich Konditionaloperator und Folgebeziehungsprädikat, die behauptet wird:
Es gilt:

Peter kommt, und Paul kommt.
Also:
Peter kommt.

Dann gilt auch:

Wenn der Zug pünktlich ist, kommt Peter, und auch Paul kommt.
Also:
Wenn der Zug pünktlich ist, kommt Peter.

8. Konditionaloperator und Subjunktion
   $A \to B \vdash A \supset B$

Die Gültigkeit dieser Formel wird zwar nicht bestritten, sie soll aber dennoch hier erwähnt werden. Sie besagt, daß die Subjunktion aus der Konditionalaussage folgt, und dies gehört zum Grundverständnis von Implikation überhaupt.

In den nächsten beiden Abschnitten wird ein System angegeben, in dem Formeln mit Konditionaloperatoren bewiesen werden können, und eine Semantik angegeben, mit der Formeln als Tautologien ausgezeichnet werden können. Die bisher diskutierten Gedanken bilden die intuitive Grundlage für die in der Semantik fixierten Vorstellungen über die Wahrheitsbedingungen für Konditionalaussagen und sind der Rahmen, in dem das System bewertet werden kann.

Übungen:

1. Erklären Sie, warum die folgenden beiden Beispiele keine Beispiele gegen die Transitivitätsregel sind:
   a) Wenn Tante Mary ein Baby bekommen würde, wäre sie eine ledige Mutter.
      Wenn Tante Mary heiraten würde, würde sie ein Baby bekommen.
      Also:
      Wenn Tante Mary heiraten würde, wäre sie eine ledige Mutter.
   b) Stellen Sie sich eine Schiene vor, auf der zwei Blöcke bewegt werden können, die im Moment unmittelbar nebeneinander sitzen.
      Wenn der linke Block nach rechts bewegt wird, bewegt sich der rechte Block (auch) nach rechts.
      Wenn sich der rechte Block nach rechts bewegt, bewegt sich der linke Block nicht nach rechts.

Also:
Wenn der linke Block nach rechts bewegt wird, so bewegt er sich nicht nach rechts.

2. Bilden Sie Beispiele für Schlüsse mit den eingeschränkten Monotonieregeln!
3. Zeigen Sie an den Beispielen aus Übung 2, daß die Beseitigungsregel für konjunktive Antezedente nicht zu unakzeptablen Folgerungen führt!
4. Bilden Sie Beispiele, die gegen die Gültigkeit der Formel $A \to (B \vee {\sim}B)$ sprechen! Erläutern Sie, warum Sie die Beispielaussagen verwerfen würden!
5. Fügen Sie die Abtrennungsregel $A \wedge (A \to B) \vdash B$ als Axiom zum System F^{SK} hinzu! Zeigen Sie, daß „Wenn $A \vdash B \to C$, so $A \wedge B \vdash C$" ableitbar ist!
6. Fügen Sie „Wenn $A \wedge B \vdash C$, so $A \vdash B \to C$" zum System F^{SK} hinzu! Zeigen Sie, daß $A \wedge B \vdash A \to B$ beweisbar ist!

13.7 Das konditionallogische System F^K der logischen Folgebeziehung

Das konditionallogische System F^K ist eine Erweiterung des Systems F^S der logischen Folgebeziehung. Zur Sprache wird der Konditionaloperator hinzugefügt, zum System kommen spezielle konditionallogische Axiomenschemata und Schlußregeln für Aussagen der logischen Folgebeziehung mit Konditionalen hinzu:

Das Alphabet von F^K besteht aus:

1. abzählbar unendlich vielen Aussagenvariablen p, q, r, p_1, …;
2. den wahrheitsfunktionalen Operatoren $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Adjunktion), $\sim$ Negation;
3. dem nicht-wahrheitsfunktionalen Operator $\to$ (Konditionaloperator);
4. dem Folgebeziehungsprädikat $\vdash$;
5. Klammern.

D1. Eine Formel heißt **wahrheitsfunktional**, wenn sie nach den üblichen Formelbildungsregeln mit Hilfe ausschließlich wahrheitsfunktionaler Operatoren und Aussagenvariablen gebildet wurde.

D2. Eine Formel heißt **Satzformel** nur unter folgenden Bedingungen:

1. Wahrheitsfunktionale Formeln sind Satzformeln.
2. Wenn A und B Satzformeln sind, sind ${\sim}A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \to B)$ Satzformeln.

D3. Eine Formel heißt **Konditionalaussage**, wenn sie die Form $(A \to B)$ hat. In einer Konditionalaussage $(A \to B)$ heißt A **Antezedent** und B **Konsequent** der Konditionalaussage.

D4. Eine Formel heißt **Formel der logischen Folgebeziehung aus F^K**, wenn sie die Form $A \vdash B$ hat und A und B Satzformeln sind.

Axiome von F^K sind alle Axiome von F^S sowie alle Formeln, die die Form eines der nachfolgenden Axiomenschemata haben und den Einschränkungen *E1* und *E2* aus F^S genügen:

K1. $A \to B \vdash {\sim}B \to {\sim}A$
K2. $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$
K3. $A \to B \vdash {\sim}A \vee B$

Regeln von F^K sind alle Regeln von F^S sowie die folgenden:

RK1. Wenn $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B$, so $(C_1 \to A_1) \wedge \ldots \wedge (C_n \to A_n) \vdash C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \to B$; wobei $(C_1 \to A_1) \wedge \ldots \wedge (C_n \to A_n)$ keine Kontradiktion und $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \to B$ keine Tautologie ist.

RK2. Wenn $A_1 \vee \ldots \vee A_n \vdash B$, so $(C_1 \rightarrow A_1) \vee \ldots \vee (C_n \rightarrow A_n) \vdash C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \rightarrow B$; wobei $(C_1 \rightarrow A_1) \vee \ldots \vee (C_n \rightarrow A_n)$ keine Kontradiktion und $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \rightarrow B$ keine Tautologie ist.

RK3. Wenn $A \vdash B_1 \rightarrow (... \rightarrow (B_i \rightarrow (... \rightarrow (B_n \rightarrow C)\ ...)$, so $D \rightarrow A \vdash (D \rightarrow B_i) \rightarrow$ $\rightarrow ((D \rightarrow B_1) \rightarrow (... \rightarrow ((D \rightarrow B_n) \rightarrow (D \rightarrow C)\ ...)$, wobei $D \rightarrow A$ keine Kontradiktion und $(D \rightarrow B_i) \rightarrow ((D \rightarrow B_1) \rightarrow (... \rightarrow ((D \rightarrow B_n) \rightarrow (D \rightarrow C)\ ...)$ keine Tautologie ist und D leer sein kann.

RK4. Wenn $A \vdash B$, und in B kommen genau die Aussagenvariablen vor, die in A vorkommen, so $\sim B \vdash \sim A$.

Das System F^K ist wegen der semantischen Bedingung auf den Axiomenschemata und auf dreien der vier neuen Regeln solange kein logisches System, solange die Begriffe „Tautologie“ und „Kontradiktion“ nicht definiert sind. Da in den Satzformeln Konditionaloperatoren vorkommen können, die keine Bewertung in der klassischen Logik erfahren, können die entsprechenden Begriffe aus der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik nicht verwendet werden. Im nächsten Abschnitt werden die Begriffe „Konditionaltautologie“ und „Konditionalkontradiktion“ definiert werden, die dann eine Anwendung von F^K erlauben. Davor sollen allerdings noch einige in F^K gültige Formeln bewiesen werden (die Anwendung von Axiomen und Regeln des Systems F^S wird stets durch (AL) gekennzeichnet):

T1. $(A \rightarrow B) \wedge A \vdash B$

1. $(A \rightarrow B) \wedge A \vdash A \rightarrow B$ (AL)
2. $(A \rightarrow B) \wedge A \vdash A$ (AL)
3. $A \rightarrow B \vdash \sim A \vee B$ $(K3)$
4. $(A \rightarrow B) \wedge A \vdash B$ $(AL$, 1., 2., 3.$)$

T2. $A \rightarrow (B \wedge C) \vdash A \rightarrow B$

1. $B \wedge C \vdash B$ (AL)
2. $A \rightarrow (B \wedge C) \vdash A \rightarrow B$ $(RK1)$

T3. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$

1. $B \wedge D \vdash B \wedge D$ (AL)
2. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$ $(RK1)$

T4. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

1. $B \rightarrow C \vdash B \rightarrow C$ (AL)
2. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $(RK3)$

T5. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$

1. $B \wedge C \vdash C$ (AL)
2. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$ $(RK1)$
3. $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ $(K2)$
4. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $(T4)$
5. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $(AL$, 2., 3., 4.$)$
6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B)$ (AL)
7. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$ $(AL$ 6., 7., $T1)$

T6. $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge A \vdash B \rightarrow C$

1. $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge A \vdash A$ (AL)
2. $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge A \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$ (AL)

3. $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$ (*K2*)
4. $((A \wedge B) \to C) \wedge A \vdash A \wedge (A \to (B \to C))$ (*AL*, 1., 2., 3.)
5. $((A \wedge B) \to C) \wedge A \vdash B \to C$ (*T1*, *AL*)

T7. $A \wedge B \vdash \sim(A \to \sim B)$

1. $A \to \sim B \vdash \sim A \vee \sim B$ (*K3*)
2. $A \wedge B \vdash \sim(A \to \sim B)$ (*RK4*, *AL*)

Übungen:

1. Beweisen Sie in F^K folgende Formeln der logischen Folgebeziehung:
   T8. $(A \to B) \vee (C \to D) \vdash (A \wedge C) \to (B \vee D)$
   T9. $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$
   T10. $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$
   T11. $(A \to B) \wedge \sim B \vdash \sim A$
   T12. $\sim((A \wedge C) \to (B \vee D)) \vdash \sim((A \to B) \vee (C \to D))$!
2. Beweisen Sie folgende Regel:
   Wenn $A \vdash B$, so $C \to A \vdash C \to B$!
3. Sehen Sie sich noch einmal die Formulierung und den Beweis des Metatheorems über den Sinnzusammenhang in F^S an! Formulieren und beweisen Sie ein analoges Metatheorem für F^K!
4. Erläutern Sie, warum $A \to B \vdash (A \wedge C) \to B$ nicht im System F^K beweisbar ist! Beweisen Sie die eingeschränkte Monotonieregel $(A \to B) \wedge (C \to B) \vdash (A \wedge C) \to B$!
5. Erläutern Sie den Unterschied zwischen der zu verwerfenden Regel „Wenn $A \wedge B \vdash C$, so $A \vdash B \to C$" und dem Axiom *K2*!

13.8 Eine Semantik für das System F^K

Wie bereits im letzten Abschnitt betont wurde, ist zur Anwendung des vorgeschlagenen Konditionalkalküls eine Semantik notwendig. Diese Semantik soll zwei miteinander verbundene Aufgaben erfüllen: Die Begriffe „Konditionaltautologie" und „Konditionalkontradiktion" sollen definiert werden, und die Formeln zur logischen Folgebeziehung sollen eine semantische Bewertung erfahren. Dem dienen die folgenden semantischen Regeln und Definitionen:

SR0. Die semantischen Regeln für Konjunktion, Adjunktion und Negation von wahrheitsfunktionalen Formeln bleiben dieselben wie in der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik.

SR1. Wenn die Formel $A \to B$ den Wert „wahr" hat und A den Wert „wahr" hat, so wird B der Wert „wahr" zugeschrieben.

SR2. Wenn die Formel $A \to B$ den Wert „wahr" hat und B den Wert „falsch" hat, so wird A der Wert „falsch" zugeschrieben.

SR3. Wenn die Formel $A \to B$ den Wert „falsch" hat und A den Wert „wahr" hat, so ist der Wert von B nicht vom Wert von A abhängig.

SR4. Wenn die Formel $A \to B$ den Wert „falsch" hat und B den Wert „falsch" hat, so ist der Wert von A nicht vom Wert von B abhängig.

SR5. Wenn aus dem Wert „wahr" für die Formel A unter der Bewertung W der Wert „wahr" für die Formel B nach semantischen Regeln folgt, so bekommt $A \to B$ unter der Bewertung W den Wert „wahr" zugeschrieben.

SR6. Wenn aus dem Wert „falsch" für die Formel B unter der Bewertung W der Wert „falsch" für die Formel A nach semantischen Regeln folgt, so bekommt $A \to B$ unter der Bewertung W den Wert „wahr" zugeschrieben.

SR7. Wenn aus dem Wert „wahr" für die Formel A unter der Bewertung W nicht der Wert „wahr" für die Formel B nach semantischen Regeln folgt, so ist der Wert von $A \to B$ unter der Bewertung W nicht vom Wert von A abhängig.

SR8. Wenn aus dem Wert „falsch" für die Formel B unter der Bewertung W nicht der Wert „falsch" für die Formel A nach semantischen Regeln folgt, so ist der Wert von $A \to B$ unter der Bewertung W nicht vom Wert von B abhängig.

SR9. Wenn der Wert der Formel A „falsch" ist, so ist der Wert von $A \to B$ nicht vom Wert von A abhängig.

SR10. Wenn der Wert der Formel B „wahr" ist, so ist der Wert von $A \to B$ nicht vom Wert von B abhängig.

SR11. Wenn es Bewertungen W_1 und W_2 so gibt, daß aus dem Wert „wahr" unter W_1 für A nach semantischen Regeln der Wert „wahr" für B folgt und aus dem Wert „falsch" unter W_2 für B nach semantischen Regeln der Wert „falsch" für A folgt, und es keine Bewertung W_3 derart gibt, daß aus dem Wert „wahr" unter W_3 für A nach semantischen Regeln der Wert „falsch" für B folgt oder aus dem Wert „falsch" unter W_3 für B nach semantischen Regeln der Wert „wahr" für A folgt, so wird der Formel $A \to B$ der Wert „wahr" zugeschrieben.

Nach diesen semantischen Regeln muß beispielsweise der Konditionalaussage $p \wedge q \to p$ der Wert „wahr" zugeschrieben werden: Es gibt eine Bewertung W_1 für $p \wedge q$, bei der das Antezedent „wahr" ist und das Konsequent nach den semantischen Regeln „wahr" sein muß; es gibt eine Bewertung W_2 für p, bei der das Konsequent „falsch" ist und das Antezedent „falsch" sein muß (nach den semantischen Regeln für die Konjunktion), und es gibt keine Bewertung, die der in *SR11* formulierten Bedingung für W_3 genügt. Konditionalformeln lassen sich also bewerten.

Die folgenden Definitionen erfüllen die oben gestellten Aufgaben:

DS1. Wenn A eine wahrheitsfunktionale Formel ist, ist A eine **Konditionaltautologie** genau dann, wenn A Tautologie der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik ist.
Wenn A eine wahrheitsfunktionale Formel ist, ist A eine **Konditionalkontradiktion** genau dann, wenn A Kontradiktion der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik ist.

DS2. Eine Satzformel $A \to B$ ist eine **Konditionaltautologie** genau dann, wenn gilt: wenn A den Wert „wahr" hat, so muß B nach den semantischen Regeln für die logischen Operatoren der Wert „wahr" zugeschrieben werden.
Eine Satzformel $A \to B$ ist eine **Konditionalkontradiktion** genau dann, wenn gilt: wenn A den Wert „wahr" hat, so muß B nach den semantischen Regeln für die logischen Operatoren der Wert „falsch" zugeschrieben werden.

DS3. Ist $A \to B$ Konditionaltautologie, bekommt $A \to B$ für alle Belegungen der vorkommenden Variablen den Wert „wahr" zugeschrieben.
Ist $A \to B$ Konditionalkontradiktion, bekommt $A \to B$ für alle Belegungen der vorkommenden Variablen den Wert „falsch" zugeschrieben.

DS4. Ist $A \to B$ weder Konditionaltautologie noch Konditionalkontradiktion, bekommt $A \to B$ für keine Belegung der vorkommenden Variablen einen Wert zugeschrieben. $A \to B$ heißt **Formel ohne Werteverlauf**.

DS5. Die Konjunktion einer Satzformel mit einer Formel ohne Werteverlauf ist eine Formel ohne Werteverlauf, außer wenn die Satzformel Konditionalkontradiktion ist. In diesem Fall ist die Konjunktion eine Konditionalkontradiktion und bekommt für alle Belegungen der vorkommenden Variablen den Wert „falsch" zugeschrieben.

DS6. Die Adjunktion einer Satzformel mit einer Formel ohne Werteverlauf ist eine Formel ohne Werteverlauf, außer wenn die Satzformel Konditionaltautologie ist. In diesem Fall ist die Adjunktion eine Konditionaltautologie und bekommt für alle Belegungen der vorkommenden Variablen den Wert „wahr" zugeschrieben.

DS7. Die Negation einer Formel ohne Werteverlauf ist eine Formel ohne Werteverlauf und bekommt keine Werte zugeschrieben.

DS8. Konjunktive und adjunktive Verknüpfungen sowie Negationen von Satzformeln mit Werteverlauf erhalten einen Werteverlauf entsprechend den semantischen Regeln für die entsprechenden Operatoren der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik.

DS9. Die Formel der logischen Folgebeziehung $A \vdash B$ ist **konditionalgültig** genau dann, wenn $A \rightarrow B$ eine Konditionaltautologie ist, A keine Konditionalkontradiktion und B keine Konditionaltautologie ist und in B nur solche Variablen vorkommen, die auch in A vorkommen.

DS10. Die Formel der logischen Folgebeziehung $A \vdash B$ ist **konditionalungültig** genau dann, wenn $A \rightarrow B$ Konditionalkontradiktion ist, die Formel A keine Konditionalkontradiktion und B keine Konditionaltautologie ist und in B nur solche Variablen vorkommen, die auch in A vorkommen.

Mit diesen zehn Definitionen ist die Semantik für F^K formuliert.

Bevor einige Metatheoreme bezüglich F^K und seiner Semantik formuliert werden, soll an ausgewählten Beispielen gezeigt werden, wie Formeln der logischen Folgebeziehung bewertet werden können. Dazu wird vereinbart:

> Anstelle „die Formel A hat den Wert ‚wahr' (‚falsch')" oder „die Formel A bekommt den Wert ‚wahr' (‚falsch') zugeschrieben" wird verwendet: $[A] = v$ $([A] = f)$.
>
> Anstelle „aus dem Wert ‚wahr' (‚falsch') unter der Bewertung W für die Formel A folgt nach semantischen Regeln der Wert ‚wahr' (‚falsch') für die Formel B" wird verwendet: $W[A] = v$ $(W[A] = f) \Longrightarrow W[B] = v$ $(W[B] = f)$.

$A \wedge B \vdash A$

1. $W_1[A \wedge B] = v \Longrightarrow W_1[A] = v$
2. $W_2[A] = f \Longrightarrow W_2[A \wedge B] = f$

Es sei
3.1. $W_3[A \wedge B] = v$
3.2. $W_3[A] = f$
4. $W_3[A] = v$ (*SR0/DS8*, 3.1.)
(Widerspruch zu 3.2.)

Damit ist gezeigt, daß $(A \wedge B) \rightarrow A$ eine Konditionaltautologie ist. Da die semantische und Variablenbedingung für die Formel der logischen Folgebeziehung gelten, ist sie konditionalgültig. Bei den folgenden Beispielen wird nur noch die Nichtexistenz einer Bewertung W_3 gemäß der semantischen Regel *SR11* gezeigt. Die entsprechenden Bewertungen W_1 und W_2 sind leicht zu finden.

$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$

Es sei
1.1. $W_3[(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)] = v$
1.2. $W_3[(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)] = f$

2. $W_3[A \to B] = v$ (*DS8*, 1.1.)
3. $W_3[C \to D] = v$ (*DS8*, 1.1.)
4. Es gilt nicht, daß
   $W_3[A \wedge C] = v \Longrightarrow W_3[B \wedge D] = v$ (*SR5*, 1.2.)
5. $W_3[A \wedge C] = v \Longrightarrow W_3[A] = W_3[C] = v$ (*SR0/DS8*)
6. $W_3[A \wedge C] = v \Longrightarrow W_3[B \wedge D] = v$ (*SR0*, *SR1*, 5., 2., 3.)
   (Widerspruch zu 4.)

$\sim((A \to B) \to (A \to C)) \vdash \sim(A \to (B \to C))$

Es sei

1.1. $W_3[\sim((A \to B) \to (A \to C))] = v$

1.2. $W_3[\sim(A \to (B \to C))] = f$

2. $W_3[(A \to B) \to (A \to C)] = f$ (*DS8*, 1.1.)
3. $W_3[A \to (B \to C)] = v$ (*DS8*, 1.2.)
4. Es gilt nicht, daß
   $W_3[A \to B] = v \Longrightarrow W_3[A \to C] = v$ (*SR5*, 2.)
5. Dann gilt auch nicht, daß
   $W_3[A \to B] = v, W_3[A] = v \Longrightarrow W_3[C] = v$ (*SR1*, 4.)
6. $W_3[A \to B] = v, W_3[A] = v \Longrightarrow W_3[B] = v$ (*SR1*)
7. $W_3[A] = W_3[B] = W_3[A \to (B \to C)] = v \Longrightarrow W_3[C] = v$ (*SR1*)
8. $W_3[A \to B] = v, W_3[A] = v \Longrightarrow W_3[C] = v$ (*SR1*, 6., 7.)
   (Widerspruch zu 5.)

MT1. Wenn die Satzformel A Konditionaltautologie (Konditionalkontradiktion) ist, hat A für alle Belegungen der vorkommenden Variablen den Wert „wahr“ („falsch“).

Das Metatheorem folgt offensichtlich aus *DS1*, *DS3*, *DS5*, *DS6* und *DS8*.

MT2. Wenn die Konditionalaussage $A \to B$ Konditionaltautologie ist, sind $A \to \sim B$ und $\sim(A \to B)$ Konditionalkontradiktionen, und $\sim(A \to \sim B)$ ist Konditionaltautologie.

Wenn $A \to B$ Konditionaltautologie ist, nimmt die Formel für alle Bewertungen den Wert „wahr“ an (*MT1*). Dann gilt nach *DS2*, *SR0* und *SR1*: wenn $[A] = v$, so $[\sim B] = f$; und $A \to \sim B$ ist Konditionalkontradiktion. Die anderen Behauptungen folgen nach *DS8*.

MT3. Wenn die Formel der logischen Folgebeziehung $A \vdash B$ konditionalgültig ist, so ist $A \vdash \sim B$ konditionalungültig.

MT4. Die Formeln $(A \to B) \to \sim(A \to \sim B)$, $\sim(A \to \sim B) \to (A \to B)$, $(A \to \sim B) \to$ $\to \sim(A \to B)$ und $\sim(A \to B) \to (A \to \sim B)$ sind keine Konditionaltautologien.

MT5. Alle Theoreme von F^K sind konditional gültig.

Das Metatheorem wird bewiesen, indem für die Axiome gezeigt wird, daß sie konditionalgültig sind. Dann wird nachgewiesen, daß die Regeln die Eigenschaft erhalten.

MT6. (Widerspruchsfreiheitstheorem) Es gibt keine Formel der logischen Folgebeziehung $A \vdash B$ derart, daß sowohl $A \vdash B$ als auch $A \vdash \sim B$ Theoreme in F^K sind.

Der Beweis folgt unmittelbar aus *MT2* und *MT5*.

MT7. Es gibt Formeln der Folgebeziehung $A \vdash B$ derart, daß sowohl $A \vdash B$ als auch $A \vdash \sim B$ weder konditionalgültig noch konditionalungültig sind, und für die gilt: Sowohl das Hinzufügen von $A \vdash B$ als auch das von $A \vdash \sim B$ als Axiom zum System F^K lassen das System widersprüchlich im Sinne von *MT6* werden.

Eine solche Formel ist $A \to B \vdash B$.

MT8. Es gilt nicht für alle Formeln der logischen Folgebeziehung:
$A \vdash B$ ist Theorem in F^K genau dann, wenn $A \vdash {\sim}B$ nicht Theorem im System ist.

Der Beweis folgt unmittelbar aus *MT7*.

Übungen:

1. Beweisen Sie die Metatheoreme *MT3* und *MT4*!
2. Beweisen Sie das Metatheorem *MT7*:
   a) Zeigen Sie, daß weder $A \to B \vdash B$ noch $A \to B \vdash {\sim}B$ konditionalgültig oder konditionalungültig sind!
   b) Zeigen Sie, daß mit $A \to B \vdash B$ die Formeln $(A \to B) \wedge {\sim}B \vdash B$ und $(A \to B) \wedge {\sim}B \vdash$ $\vdash {\sim}B$ ableitbar sind!
   c) Zeigen Sie, daß mit $A \to B \vdash {\sim}B$ die Formeln $(A \to B) \wedge A \vdash B$ und $(A \to B) \wedge A \vdash$ $\vdash {\sim}B$ ableitbar sind!
3. Zeigen Sie, daß das Gesetz vom konditionalen ausgeschlossenen Dritten keine Konditionaltautologie ist!
4. Im fünften Kapitel sollten Sie zeigen, daß die den folgenden Aufgaben entsprechenden Schlüsse mit der Subjunktion gültig sind. Zeigen Sie nun (semantisch oder im System der Folgebeziehung für Konditionalaussagen), daß diese Schlüsse mit einem Konditionaloperator für das „wenn ..., so ...“ ungültig sind!
   a) Wenn Meyer sich im Oktober einen Volvo kauft, muß er ihn auf der Straße parken, wenn er sich nicht auch eine Garage besorgt. Es stimmt nicht, daß er sich eine Garage besorgt, wenn er alle gesetzlichen Bestimmungen einhält. Wenn Meyer aber alle gesetzlichen Bestimmungen einhält, so kauft er sich im Oktober einen Volvo. Also kauft er sich im Oktober tatsächlich einen Volvo und muß ihn auf der Straße parken.
   b) Wenn John in Paris ist, so ist er in Frankreich. Wenn John in Istanbul ist, so ist er in der Türkei. Also: Wenn John in Paris ist, so ist er in der Türkei oder wenn John in Istanbul ist, so ist er in Frankreich. (W. Cooper 1968, S. 297)
   c) Angenommen, Roy Dyckhoff erklärt, daß John Slaney an einem bestimmten Tag in Edinburgh war, und daß Crispin Wright das verneint. Dann ist die folgende Aussage wahr:

      (1) Wenn John in Edinburgh war, hatte Roy recht.

      Hingegen sind die beiden folgenden Aussagen falsch:

      (2) Wenn Crispin recht hatte, so auch Roy.
      (3) Wenn John in Edinburgh war, so hatte Crispin recht.

      Die Negation der Aussage 2 ist demzufolge wahr:

      (2′) Es gilt nicht: Wenn Crispin recht hatte, so auch Roy.

13.9 Irreale Konditionalaussagen

Irreale Konditionalaussagen sind Konditionalaussagen, deren Antezedent falsch ist. Meist werden sie im Konjunktiv formuliert: „Wenn A wäre, wäre B“. Viele Versuche, irreale Konditionalaussagen logisch zu explizieren, gehen davon aus, daß der Operator in solchen Aussagen ein

Grundoperator ist; das führt zum Aufbau logischer Kalküle mit Semantiken für diese Aussagen. Der Anspruch, allgemeine Konditionaltheorie zu sein, wird in der Regel nicht erfüllt. Ein wesentliches Problem besteht darin, daß die irrealen Konditionalaussagen, wie andere Konditionalaussagen auch, auf verschiedenene Weise und mit unterschiedlichen Absichten verwendet werden, daß verschiedene Arten solcher Aussagen unterschieden werden können.

Die Analyse irrealer Konditionalaussagen soll als ein Anwendungsproblem der Konditionallogik aufgefaßt werden: ausgehend von der vorgeschlagenen Klassifikation für Konditionalaussagen werden exemplarisch einige Bildungsregeln für irreale Konditionale aufgezeigt, und es werden einige mit solchen Aussagen verbundene Probleme im Rahmen dieser Konzeption gelöst. Folgende Beispielaussagen sollen dazu analysiert werden:

(1) Wenn Peter nicht gekommen wäre, wären nicht Paul und Peter gekommen.
(2) Wenn jetzt durch diese Spule ein Strom fließen würde, wäre um sie herum ein Magnetfeld vorhanden.
(3) Selbst wenn der Schamane den Regentanz tanzen würde, würde es nicht regnen.
(4) Wenn Oswald Kennedy nicht erschossen hat, hat es ein anderer getan.
(5) Wenn Oswald Kennedy nicht erschossen hätte, hätte ihn ein anderer erschossen.
(6) Wenn Bizet und Verdi Landsleute wären, wäre Bizet Italiener.
(7) Wenn Bizet und Verdi Landsleute wären, wäre Verdi Franzose.

Die einfachste Beispielaussage ist die Aussage (1), ihre Wahrheit ruft keinen Zweifel hervor. Der Grund dafür ist, daß sie nach logischen Regeln aus einer Aussage über die logische Folgebeziehung gewonnen werden kann. Solche Regeln lassen sich leicht formulieren:

Wenn $A \vdash B$ und $\sim A$, so ist $A \Rightarrow B$ die gültige irreale Konditionalaussage „Wenn A wäre, wäre B“.
Wenn $A \vdash B$ und B, so ist $\sim B \Rightarrow \sim A$ die gültige irreale Konditionalaussage „Wenn B nicht wäre, wäre A nicht“.

Die Aussage (1) ist nach der zweiten Regel aus dem Axiom des Systems F^S $A \wedge B \vdash B$ gewonnen worden. Genau wie die Klasse der Konditionalaussagen, die auf Grund von Aussagen über die logische Folgebeziehung gelten, vom konkreten System der Folgebeziehung abhängig ist, sind auch die nach den angegebenen Regeln bildbaren irrealen Konditionalaussagen vom zugrundeliegenden System der logischen Folgebeziehung abhängig.

Die Aussage (2) drückt einen (hypothetischen) Sachverhalt aus. Gerade solche irreale Konditionalaussagen werden zur Explikation des Begriffes „empirisches Gesetz“ genutzt, indem behauptet wird, daß eine wahre, allgemeine, konditionale Aussage dann ein Gesetz ausdrückt (eine Gesetzesaussage ist), wenn ihr wahre irreale Konditionalaussagen entsprechen. Eine Gesetzesaussage würde auf alle, auch nur mögliche, hypothetische, denkbare Gegenstände und Sachverhalte zutreffen, eine nur gesetzesähnliche Aussage nicht.

So ist etwa „Für alle Gegenstände gilt: wenn Peter sie gerade in der Tasche hat, so sind es Groschen“ auch dann kein Gesetz, wenn Peter momentan tatsächlich nur Groschen in der Tasche hat. Schließlich gilt die Aussage „Wenn Peter gerade ein Markstück in der Tasche hätte, so wäre es ein Groschen“ offensichtlich nicht, und so ist die allquantifizierte konditionale Aussage nur gesetzesähnlich.

Im Gegensatz dazu gilt die irreale Aussage (2) selbst für Spulen, die während der Steinzeit von Außerirdischen auf die Erde gebracht wurden - als es noch keine elektrischen Anschlüsse gab. Deshalb, so wird argumentiert, ist die entsprechende (reale) Konditionalaussage „Immer und überall gilt: wenn durch eine Spule ein Strom fließt, baut sich um sie herum ein Magnetfeld auf“ eine Gesetzesaussage.

Bei diesem Zugang wird aber vorausgesetzt, daß die Wahrheit der irrealen Konditionalaussage unabhängig von der Gesetzesaussage oder gesetzesähnlichen Aussage festgestellt werden kann. Für irreale Aussagen ist das aber in der Regel sehr schwer: Woher kann man denn wissen, wie etwas Nichtstattfindendes unter bestimmten Bedingungen wäre; noch dazu ohne Rückgriff darauf, wie es unter solchen Bedingungen regelmäßig ist?

Nach der hier vertretenen Auffassung ist auch in diesem Fall die irreale Aussage von der realen abhängig. Die irrealen Konditionalaussagen wie im Beispiel (2) entstehen aus Aussagen über die physische Folgebeziehung nach sinngemäß ähnlichen Regeln, wie die beiden oben erwähnten:

> Wenn $\forall l \exists l' (A(l) \rightarrow R(sA(l), sB(l')))$ und $\sim A(k)$, so ist $A(k) \Rightarrow \exists l R(sA(k), sB(l))$ eine gültige irreale Konditionalaussage.
>
> Wenn $\forall l \exists l' (A(l) \rightarrow R(sA(l), sB(l')))$ und $R(sA(k), sB(k'))$, so ist $\sim R(sA(k), sB(k')) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sim A(k)$ eine gültige irreale Konditionalaussage.

Gesetzesaussagen stützen, garantieren die Gültigkeit entsprechender irrealer Konditionale und nicht umgekehrt. Die Aussage (2) ist nach der ersten Regel aus einem anerkannten Naturgesetz gewonnen worden, daher wird sie normalerweise auch solange akzeptiert, solange das Naturgesetz akzeptiert wird.

Allgemein lassen sich auch andere irreale Konditionalaussagen nach dieser Struktur analysieren: als Konjunktionen, deren eines Konjunktionsglied eine reale Konditionalaussage ist und deren konkrete Form von der Art und Weise abhängig ist, wie die (reale) Konditionalaussage gewonnen wurde. Häufig sind das dann Konjunktionen einer Konditionalaussage mit ihrem negierten Antezedent: $A \Rightarrow B \equiv_{Def} (A \rightarrow B) \wedge \sim A$, oder mit unnegiertem Konsequent: $\sim B \Rightarrow \sim A \equiv_{Def} (A \rightarrow B) \wedge B$. Solche Aussagen lassen sich leicht auf der Basis des Systems F^K untersuchen. Setzen wir die Definition $A \Rightarrow B \equiv_{Def} (A \rightarrow B) \wedge \sim A$ voraus, so ist offenbar die Formel der logischen Folgebeziehung $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow C)$ ein Theorem. Der irreale Konditionaloperator ist also transitiv wie der reale. Die Kontrapositionsregel führt aus der Klasse der irrealen Konditionalaussagen heraus, da nicht jede Kontraposition einer irrealen Konditionalaussage notwendig ein falsches Antezedent hat.

Aussagen wie die Aussage (3), „selbst wenn - dann“-Aussagen, werden häufig in der Umgangssprache und in Beispielen zur Konditionallogik verwendet. Im Gegensatz zu Aussagen wie (1) - in der eine logische Beziehung zwischen Antezedent und Konsequent konstatiert wird - und (2) - in der eine physische Beziehung zwischen Antezedentereignis und Konsequentereignis konstatiert wird -, behaupten „selbst wenn -dann“-Aussagen das Fehlen einer Beziehung zwischen Antezedent und Konsequent. Solche Aussagen gelten als wahr, weil das Konsequent „sowieso wahr“ ist, weil es, im angegebenen Beispiel, weder mit noch ohne Schamanentanz regnet. Eine irreale Aussage „Selbst wenn A, dann B“ (künftig: $A \Rrightarrow B$) wird also gebraucht, wenn A nicht $\sim B$ nachsichzieht, B gilt und auch $\sim A$ (da die Aussage irreal sein soll). Diese Überlegung führt zur Definition: $A \Rrightarrow B \equiv_{Def} \sim(A \rightarrow \sim B) \wedge \sim A \wedge B$. Die Aussage (3) steht also für die Konjunktion: „Es ist nicht so, daß es regnet, wenn der Schamane den Regentanz tanzt, und er tanzt nicht, und es regnet nicht“.

Auf der Basis des Systems F^K lassen sich die Eigenschaften des Operators $\Rrightarrow$ betrachten. Der Sprachintuition entsprechend sind Aussagen mit diesem Operator nicht transitiv und nicht kontraponierbar, auch die Formeln der logischen Folgebeziehung $A \Rrightarrow B \vdash A \rightarrow B$ und $A \Rrightarrow B \vdash \sim A \rightarrow B$ sind nicht herleitbar. Dagegen ist $A \Rrightarrow B \vdash \sim(\sim A \rightarrow \sim B)$ ebenso beweisbar wie $A \Rrightarrow (B \wedge C) \vdash A \Rrightarrow B$.

Der Unterschied zwischen den Aussagen (4) und (5) scheint vielen Logikern als schwer faßbar und logisch außerordentlich interessant. Bei einer gängigen Interpretation (die von Oswald als

Alleintäter ohne einflußreichen Anstifter im Hintergrund ausgeht) ist (4) zweifellos wahr, und (5) ist falsch. Wie ist das zu erklären?

Um die Aussage (4) als wahr erkennen zu können, muß man sich nach einer verbreiteten Konzeption in einen Kontext versetzen, in welchem Oswald Kennedy nicht erschossen hat, und der ansonsten der Wirklichkeit so nahe wie möglich ist. Da Kennedy allerdings erschossen wurde, ist der dem aktuellen Gang der Geschichte ähnlichste Kontext der, in dem ein anderer Mann Kennedy erschoß, und die Aussage (4) ist wahr. Im Falle der Aussage (5) müsse man sich in einen Kontext versetzen, in dem Oswald erst gar nicht geschossen hat. Dann ist es aber der Wirklichkeit am nächsten (in der beschriebenen Interpretation der Ereignisse), daß niemand geschossen hätte und Kennedy noch lebt.

Dieser Zugang hat den Nachteil, daß die Auswahl der Kontexte, die man zu bedenken hat, und ihr Vergleich darauf hin, welcher der Wirklichkeit am ähnlichsten ist, motiviert und erläutert werden muß. Die bisher vorgestellten Überlegungen, erlauben ein einfacheres Vorgehen:

Die Aussage (4) entstand aus der wahren (realen) Konditionalaussage „Wenn kein anderer Kennedy erschossen hat, so war es Oswald“ und der Aussage „Oswald hat Kennedy erschossen“. Die Wahrheit beider Aussagen ist einsichtig, und daher wird auch (4) als wahre Aussage verstanden. Die Aussage (5) hingegen ist eine versteckte „selbst wenn - dann“-Aussage: es wird behauptet, daß Oswald der Mörder ist, daß Kennedy erschossen wurde und daß dies auch unabhängig von Oswalds Handlungen eingetreten wäre. Das sind aber die Konjunktionsglieder für die Aussage: „Selbst wenn Oswald Kennedy nicht erschossen hätte, wäre Kennedy erschossen worden“, und dieser Satz ist eine stilistische Variante zu (5). Da der beschriebenene Kontext voraussetzt, daß Kennedy nicht erschossen wird, falls Oswald ihn nicht erschießt, ist es nicht verwunderlich, daß in diesem Kontext (5) falsch wird.

Die Wahrheit von „selbst wenn - dann“-Aussagen ist wegen der vorkommenden negierten Konditionalaussagen schwierig festzustellen. Zusätzlich ist das negierte Antezedent falsch, so daß übliche Überprüfungsverfahren für Konditionalaussagen schwer anzuwenden sind. Solche Aussagen werden aber sehr oft in historischen oder politischen Kontexten als Postulate gesetzt und drücken die Überzeugung des Autors davon aus, daß ein bestimmter Zusammenhang nicht besteht. So kann auch die Aussage (5) in einer Arbeit über das Schicksal der Kennedys als Postulat gesetzt werden und würde dann als Meinung des Verfassers über Praktiken des Machtkampfes im politischen System der USA jener Jahre aufzufassen sein, die nicht zu widerlegen ist (denn Oswald hat ja Kennedy erschossen).

Die Aussagen (6) und (7) scheinen jede für sich wahr zu sein, da jedoch $(A \to B) \wedge \wedge (A \to C) \vdash A \to (B \wedge C)$ (und deshalb auch $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)$) gilt, ist aus ihnen der paradoxe Satz „Wenn Bizet und Verdi Landsleute wären, wäre Bizet Italiener und Verdi Franzose“ ableitbar. Der Grund für das Entstehen des Paradoxes liegt im unkontrollierten Verwenden des Prädikates „Landsleute“, und nicht in der Konditionallogik.

Wenn Bizet und Verdi Landsleute wären, so folgt daraus noch nichts über die konkrete Nationalität beider, ausgenommen: es ist dieselbe. Mit dem selben Recht wie (6) und (7) kann also behauptet werden: „Wenn Bizet und Verdi Landsleute wären, wären beide Japaner“. Ein anderes Bild ergibt sich, wenn anstelle des zweistelligen Prädikates „Landsleute“, die einstelligen Prädikate „Landsmann von Bizet“ und „Landsmann von Verdi“ verwendet werden, die in der Sprachpraxis sich stets auf die bekannte Nationalität von Bizet beziehungsweise Verdi beziehen. Dann lauten die entsprechenden Sätze:

$(6')$ Wenn Bizet Landsmann von Verdi wäre, wäre Bizet Italiener.
$(7')$ Wenn Verdi Landsmann von Bizet wäre, wäre Verdi Franzose.

Diese lassen sich durchaus als irreale Konditionalaussagen nach dem vorgeschlagenen Schema analysieren:

(6'') Immer, wenn jemand Landsmann von Verdi ist, ist er Italiener; und Bizet ist nicht Landsmann von Verdi.
(7'') Immer wenn jemand Landsmann von Bizet ist, ist er Franzose; und Verdi ist nicht Landsmann von Bizet.

Ein Problem stellen diese Sätze nicht dar, da sie im Gegensatz zu (6) und (7) unterschiedliche Antezedente haben.

Mit Hilfe des beschriebenen Zugangs zu irrealen Konditionalaussagen lassen sich auch Systeme von Schlußregeln, aufbauend auf F^K, für solche Aussagen angeben. Sie sind jedoch nicht notwendig, da jedes Vorkommen von irrealen Konditionalaussagen durch Konjunktionen ersetzt werden kann, in denen reale Konditionalaussagen vorkommen. Auf diese können dann die logischen Regeln angewandt werden, je nach der konkreten Form der Konjunktionsglieder und der Herkunft der (realen) Konditionale. Dadurch werden irreale Konditionalaussagen nicht aus der Sprache ausgeschlossen, sondern ihre korrekte und rationale Verwendung wird ermöglicht.

Übungen:

1. Überprüfen Sie, welche der Theoreme des Systems F^K beweisbare Formeln bleiben, wenn ein oder mehrere Konditionaloperatoren durch irreale Konditionaloperatoren $\Rightarrow$ oder $\Rrightarrow$ ersetzt werden!
2. Bilden Sie ein Beispiel für die Behauptung, daß die Anwendung der Kontrapositionsregel aus der Klasse der irrealen Aussagen herausführt!
3. Überlegen Sie sich, wie mit Hilfe des Konditionaloperators des Systems F^K ein Operator „da - dann" und ein Operator „nur wenn - dann" definiert werden können!

13.10 Existenzbelastung von Konditionalaussagen

Da der Konditionaloperator kein wahrheitsfunktionaler Operator ist, können wir die Existenzbelastung von Konditionalaussagen nicht auf dieselbe Art und Weise ermitteln wie bei zusammengesetzten Aussagen mit wahrheitsfunktionalen Operatoren. Bei der Behandlung der Existenzbelastung von Formeln der aussagenlogischen Folgebeziehung der Form $\vdash (tA, tB)$ hatten wir gesagt, daß bei ihnen die Existenzbelastung eingelöst ist, wenn A und B Satzformeln sind. In diesem Sinne ist die Existenzbelastung auch bei Formeln der Form $\vdash (tA, tB)$, wo A und B Konditionalaussagen sind, eingelöst. Dies gilt für alle Formen der Folgebeziehung. Für die aussagenlogische Theorie der Folgebeziehung konnten wir darüber hinaus den Satz beweisen: Wenn $\vdash (tA, tB)$ eine gültige Regel der Folgebeziehung ist, so hat die Formel $A \supset B$ die Charakteristik n, d. h., der Fall, daß A die Charakteristik n und B die Charakteristik e hat, ist ausgeschlossen. In der Konditionallogik läßt sich ein analoger Satz nicht beweisen. Offenbar muß die in dem Satz ausgedrückte Beziehung aber für jede gültige Regel der logischen Folgebeziehung gelten, denn sonst könnte man logisch von einer nicht existentiell belasteten Aussage auf eine existentiell belastete Aussage schließen. Um Regeln für die Existenzbelastung von Konditionalaussagen aufstellen zu können, vollziehen wir jetzt eine „Umkehr der Methode". Wir wählen einige wenige, intuitiv offensichtlich gültige Regeln der logischen Folgebeziehung und postulieren für sie die Gültigkeit des oben formulierten Satzes. Als Folgerung lassen sich dann die Regeln für das Zuschreiben der Charakteristika n und e für Konditionale und Bikonditionale aufstellen.
Wir akzeptieren folgende Regeln der Folgebeziehung als gültig:

1. $A \to B \vdash A \supset B$
2. $A \leftrightarrow B \vdash A \equiv B$
3. $A \leftrightarrow B \dashv\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$
4. $A \to B \dashv\vdash \sim B \to \sim A$

Für diese Regeln akzeptieren wir: Wenn wir in ihnen das Zeichen der Folgebeziehung $\vdash$ durch die Subjunktion $\supset$ ersetzen, so haben die gewonnenen Formeln die Charakteristik n. Wegen 1, 2 und 3 erhalten wir dann folgende Tabelle:

A	B	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
n	n		
n	e	e	e
e	n		e
e	e		

Offenbar gilt: Wenn eine Formel B die Charakteristik n hat, so hat auch die Formel $A \to B$ die Charakteristik n, denn durch eine Konditionalisierung kann keine Existenzbelastung entstehen. Folglich können wir unsere Tabelle ergänzen zu:

A	B	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
n	n	n	n
n	e	e	e
e	n	n	e
e	e		

Wegen 4 ergibt sich dann für die letzte Zeile der Tabelle:

A	B	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
n	n	n	n
n	e	e	e
e	n	n	e
e	e	n	n

Für die dargestellten Systeme der Konditionallogik lassen sich folgende Metatheoreme beweisen:

MT1. Wenn $A \vdash B$ eine gültige Regel der Konditionallogik ist, so hat die Formel $A \supset B$ die Charakteristik n.

MT2. Wenn $\vdash A$ in der Konditionallogik gültig ist, so hat A die Charakteristik n.

14. Kapitel
Terminitheorie

14.1 Subjekt- und Prädikattermini

Bisher haben wir nur Bereiche der Logik dargestellt, die logische Beziehungen zwischen Aussagen (Sätzen) untersuchen. Genauso wichtig sind die Bereiche der Logik, die sich mit den logischen Eigenschaften von Termini und den logischen Beziehungen zwischen Termini beschäftigen. Obwohl diese Bereiche der Logik in der traditionellen (vormathematischen) Logik gleichberechtigt neben der Satzlogik entwickelt wurden, bildete sich in der modernen mathematischen Logik eine starke Disproportion zuungunsten der Terminilogik heraus. Häufig faßt man gegenwärtig die Logik überhaupt als eine Wissenschaft vom logischen Schließen auf und verbannt die Terminitheorie ganz aus ihr oder sieht sie als trivial an, da alle ihre Probleme in der klassischen Quantorentheorie darstellbar seien. Wir sind nicht dieser Auffassung und stellen in diesem Kapitel die Grundbegriffe einer logischen Terminitheorie dar. Dabei knüpfen wir an die von A. A. Sinowjew entwickelte Terminitheorie an (vgl. Sinowjew 1970; Sinowjew/Wessel 1975; Zinov'ev 1983), nehmen jedoch einige wesentliche Änderungen vor. Im Mittelpunkt der Darstellung steht dabei eine nichtformale Erörterung der Grundbegriffe. Ausführlicher werden Probleme der Terminitheorie in den eben angegebenen Arbeiten behandelt.

Die Unterscheidung in Subjekt- und Prädikattermini ist in der Terminitheorie fundamental. Im achten Kapitel haben wir diese Unterscheidung bereits behandelt. *Subjekttermini* sind solche Termini, die in der Sprache die Aufgabe haben, Gegenstände zu bezeichnen. Beispiele für Subjekttermini sind: Inselsberg, Berg, Gott, der Kaiser von China, π, Gegenstand, Elementarteilchen usw. *Prädikattermini* sind solche Termini, die in der Sprache die Aufgabe haben, Eigenschaften und Beziehungen auszudrücken. Beispiele für Prädikattermini sind: laufen, rot, lieben, ehrlich, größer als, zwischen ... und ... liegen usw. Die Unterscheidung zwischen Subjekt- und Prädikattermini hat vorlogischen Charakter, d. h., wir setzen die Fähigkeit der Menschen voraus, zwischen Subjekt- und Prädikattermini zu unterscheiden.

Allgemein kann man den Unterschied zwischen Subjekt- und Prädikattermini folgendermaßen erläutern. Der Sprecher, d. h. der Mensch, der die Subjekt- und Prädikattermini bildet und verwendet, wählt irgend etwas (aus irgendwelchem Grunde) aus und bezeichnet es mit einem Terminus s. Danach wird in dem bereits ausgewählten und mit s bezeichneten Bereich noch einmal etwas ausgewählt und mit einem Terminus P bezeichnet, wobei gilt, daß das mit P Bezeichnete nicht ausgewählt werden kann, wenn vorher nicht das mit s Bezeichnete ausgewählt wurde. Ein solcher Terminus s ist dann ein Subjektterminus und P ein Prädikatterminus. Wir haben hier bewußt den Begriff „Auswahl“ gewählt, da er die verschiedensten Handlungen bezeichnet. Solch eine Auswahl kann eine ganz elementare Tätigkeit sein, die etwa darin besteht, daß der Sprecher im Garten eine Rose betrachtet und sie mit dem Terminus s bezeichnet. Die zweite Auswahl könnte dann sein, daß er sich auf die Farbe der Rose konzentriert und sie mit dem Terminus „rot“ bezeichnet. Die einfache Prädikation wäre dann das Aussprechen der Aussage $s \leftarrow P$ („Die Rose ist rot.“). Bei einer Auswahl kann es sich aber auch um sehr komplexe Tätigkeiten handeln.

Der Terminus „Auswahl“ eignet sich zur Erläuterung der Prädikation, weil seine Verwendung zweierlei voraussetzt:

1. es muß etwas geben, aus dem ausgewählt wird;

2. die Auswahl wird stets von jemand durchgeführt, der mit ihr bestimmte Interessen verbindet und Ziele verfolgt.

Gegenwärtig ist eine Erläuterung der Prädikate als menschliche Handlungsschemata weit verbreitet. Sie wird vor allem von P. Lorenzen und seinen Mitarbeitern publiziert. Diese Auffassung hat gegenüber einem platten Empirismus den Vorzug, daß sie auf den im Punkt 2 genannten Aspekt der Prädikation aufmerksam macht. Jedes Sprechen und auch das Prädizieren sind menschliche Handlungen, und da es sich beim Prädizieren um wiederholte gleichartige Handlungen handelt, ist es durchaus angebracht, von Handlungsschemata zu sprechen. Doch besteht bei dieser Erläuterung die Gefahr, daß das im Punkt 1 Gesagte vergessen wird. Bei den eben gemachten Erläuterungen handelt es sich um keine Definition der Termini „Subjektterminus" und „Prädikatterminus", sondern eher um eine didaktisch motivierte Erklärung des normalen Gebrauchs von Subjekt- und Prädikattermini. Unter normalem Gebrauch verstehen wir dabei unkomplizierte Fälle der Verwendung von Subjekt- und Prädikattermini in der Umgangssprache und in den Wissenschaftssprachen. Bei der Verwendung von leeren Termini versagt diese Erklärung schon.

Im Rahmen der logischen Terminitheorie setzen wir die Einteilung in Subjekt- und Prädikattermini für einige Termini als gegeben voraus. Unter dieser Voraussetzung lassen sich dann für andere Termini logische Regeln aufstellen, die wir im weiteren behandeln.
Wir setzen in unserer Terminitheorie das Axiom:

A1. Kein Subjektterminus ist ein Prädikatterminus, und kein Prädikatterminus ist ein Subjektterminus.

Die übliche Sprachpraxis scheint diesem Axiom zu widersprechen, da dort manchmal ein und derselbe Terminus als Subjekt- und als Prädikatterminus verwendet wird. Doch eine genaue Analyse dieser Fälle macht deutlich, daß es sich dabei um unkorrekte oder verkürzte Redeweisen handelt.

Eine wichtige Relation der Terminitheorie ist die Bezeichnungs- oder Benennungsrelation. Wir verwenden für sie das Symbol S. In der Terminitheorie von Sinowjew und auch in den früheren Auflagen dieses Buches ist diese Relation eine Grundrelation, mit deren Hilfe die gesamte Terminitheorie aufgebaut wurde. Insbesondere hatten wir für sie folgende Axiome gesetzt:

A2′. $\vdash S(a, ta)$
A3′. $\sim S(a, tb) \vdash \neg S(a, tb)$,
wobei a und b beliebige Termini sind und t der Metaterminusoperator, der aus einem Terminus a einen Namen dieses Terminus ta bildet.

Das Axiom *A2′* scheint offensichtlich zu sein. Nach diesem Axiom sind die Sätze „Der Inselsberg wird mit dem Terminus Inselsberg bezeichnet" und „Runde Quadrate werden mit dem Terminus rundes Quadrat bezeichnet" logisch wahr. Bleiben wir zunächst bei dem ersten Beispielsatz. In ihm kommt das Wort Inselsberg zweimal vor. Diese beiden Vorkommen haben aber ganz unterschiedlichen Charakter. Beim ersten Vorkommen wird das Wort Inselsberg in der üblichen Weise als Terminus gebraucht (verwendet), und es bezeichnet eine Naturgegebenheit des Thüringer Waldes. Beim zweiten Vorkommen wird das Wort Inselsberg nicht als Terminus verwendet, sondern es wird nur als besonderer physischer Gegenstand angeführt. Wir unterscheiden also zwischen einem Vorkommen eines Terminus (oder einer Aussage) als Terminus (bzw. als Aussage) und einem Vorkommen als bloßem physischen Gegenstand. So kommt das Wort dreisilbig in dem Satz „Das Wort dreisilbig ist dreisilbig" das erste Mal bloß als physischer Gegenstand und nicht als Terminus vor (es wird angeführt), und das zweite Mal wird es als Terminus verwendet. In der Umgangssprache wird die Tatsache, daß ein Terminus (eine

Aussage) nur angeführt und nicht gebraucht wird, durch Verwendung von Anführungszeichen oder durch Voranstellen solcher Worte wie „der Terminus", „die Aussage", „das Wort", „das Prädikat" usw. ausgedrückt. Wir verwenden dafür den Metaterminusoperator t.

Wenden wir uns dem zweiten Beispielsatz zu. Hierbei handelt es sich um eine prädikative Aussage mit den beiden Subjekttermini „rundes Quadrat" und „Terminus rundes Quadrat", die in der Bezeichnungsrelation S stehen. Aus der Prädikationstheorie wissen wir aber bereits, daß eine prädikative Aussage mit einem leeren Subjektterminus nicht wahr sein kann, sondern daß hier der Fall der Unbestimmtheit vorliegt. Deshalb können wir $A2'$ nicht als logisches Axiom akzeptieren und ersetzen es durch das schwächere Axiom:

A2. $\vdash E(a) \supset S(a, ta)$,
wobei E das Existenzprädikat ist.

Anders verhält es sich, wenn der Gegenstand, der bezeichnet wird, selber ein Terminus ist, denn der existiert ja schon, wenn er hingeschrieben oder gesprochen wird. Deshalb gilt:

A3. $\vdash S(ta, tta)$.

Aus den gleichen Gründen, aus denen wir das ursprüngliche Axiom $A2'$ verworfen haben, müssen wir auch das ursprüngliche Axiom $A3'$ verwerfen, denn wenn a ein leerer Terminus ist, kann $\sim S(a, tb)$ wahr sein, während $\neg S(a, tb)$ immer unbestimmt ist. Wir ersetzen das ursprüngliche Axiom $A3'$ durch das schwächere:

A4. $E(a) \wedge \sim S(a, tb) \vdash \neg S(a, tb)$.

Auch hier gilt wieder ohne Einschränkung:

A5. $\sim S(ta, tb) \vdash \neg S(ta, tb)$.

Als allgemeinsten Subjektterminus verwenden wir den Terminus „Gegenstand", abgekürzt g, und als allgemeinsten Prädikatterminus den Terminus „Prädikat", abgekürzt p.

Übungen:

1. Geben Sie einige Beispiele dafür an, daß Philosophen dazu neigen, Prädikate zu Subjekten zu machen (vgl. Feuerbachs und Marx' Kritik an Hegel)!
2. Wie lassen sich solche Subjekttermini wie „Wahrheit", „Einfachheit", „Wesen", „Unendlichkeit", „Sein", „Veränderung" korrekt in eine philosophische Sprache einführen?

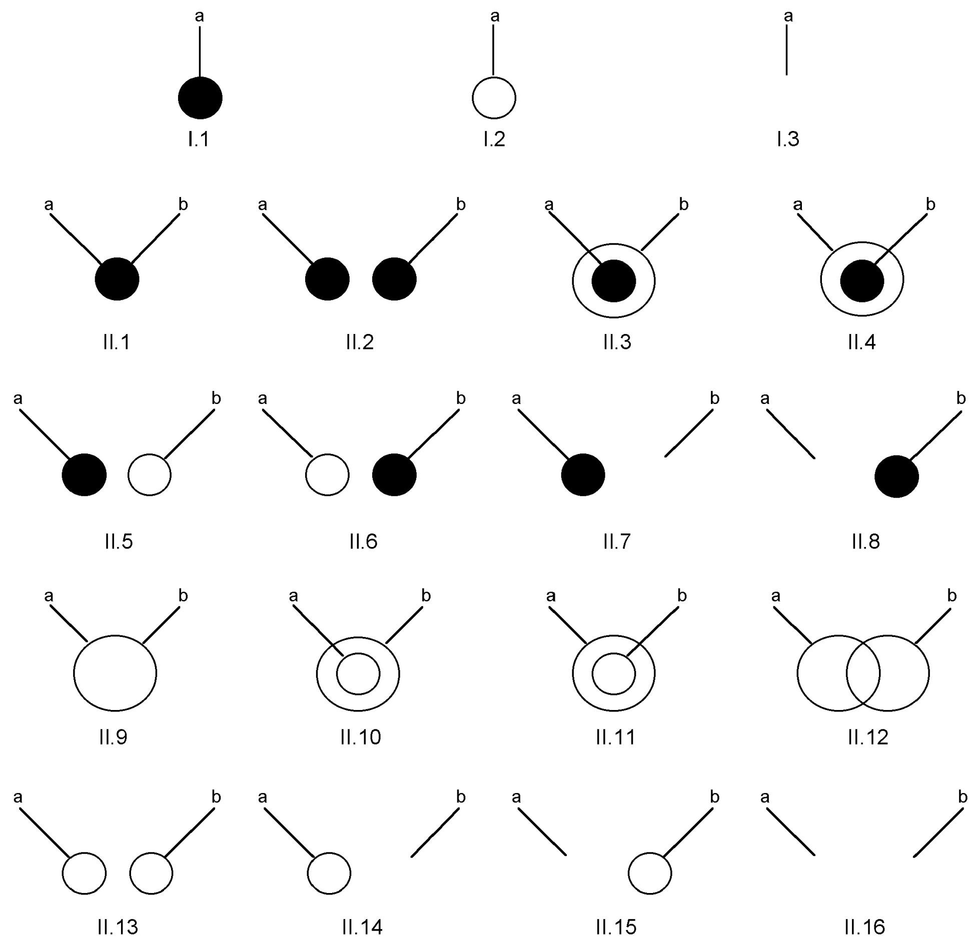
14.2 Singuläre, generelle und kategoriale Subjekttermini. Leere und nichtleere Subjekttermini.

In der klassischen Quantorentheorie werden alle Terminitypen in die Schablone von Eigennamen (oder bestimmten Kennzeichnungen) und Prädikaten gepreßt. Einige Logiker gehen sogar soweit, auch noch die Eigennamen aus der Logik auszuschließen. Eine differenziertere Behandlung der Termini findet sich in den Arbeiten einiger polnischer Logiker, die meist an die Leśniewskische Ontologie anknüpfen.

Bei Borkowski finden wir die folgende Einteilung der Namen: „Der durch einen Namen bezeichnete Gegenstand wird *Designat* dieses Namens genannt. Nach der Zahl der Designate teilen wir die Namen ein in: 1. *allgemeine Namen*, die mehr als ein Designat haben, 2. *Einzelnamen* (*Eigennamen*), die genau ein Designat haben, und 3. *leere Namen*, die gar kein Designat haben." (Borkowski 1976, S. 13) Prädikate betrachtet er als Funktoren.

Borkowski übernimmt diese Einteilung von Lejewski, der bereits 1957 schrieb: „Die ontologische Tafel, die wir im Sinn haben, ist eine Erweiterung der wohlbekannten Eulerschen Diagramme. Bei den Namen und namensähnlichen Ausdrücken der alltäglichen Sprache können wir unterscheiden (1) individuelle Namen, von denen jeder nur einen Gegenstand bezeichnet, zum Beispiel ‚Sokrates', ‚der Mond' etc., (2) generelle Namen, von denen jeder mehr als einen Gegenstand bezeichnet, zum Beispiel ‚Satellit des Jupiter', ‚Himmelskörper' etc., und (3) fiktive Namen, das heißt Ausdrücke, die sich in Bezug auf ihre Syntax wie individuelle oder generelle Namen verhalten, die aber nicht irgend etwas bezeichnen, zum Beispiel ‚Pegasus', ‚Zentaur', ‚Gegenstand, der nicht existiert'." (Lejewski 1957/58, S. 53)

Für diese drei Namentypen baut Lejewski dann die folgenden ontologischen Tafeln auf und definiert mit ihrer Hilfe verschiedene Funktoren der Einschließung, der Ausschließung und der Existenz und untersucht deren Beziehung zur Leśniewskischen Ontologie.



(Ontologische Tafel von Lejewski)

In dieser Tafel erläutert das Diagramm I.1 den semantischen Status von Eigennamen (Beispiel: ‚der Mond'), das Diagramm I.2 den semantischen Status von allgemeinen Namen (Beispiel: ‚Mensch') und Diagramm I.3 den semantischen Status von leeren Namen (Beispiel: ‚Zentaur').

Die Betrachtung von Namenpaaren ist ebenso einfach. So erläutert z. B. das Diagramm II.3 den semantischen Status von ‚der Mond' und ‚Himmelskörper', Diagramm II.12 den von ‚Maler' und ‚Bildhauer'. Ich möchte hier die Erläuterung von Lejewskis ontologischen Tafeln abschließen, da die von ihm und Borkowski vertretene Position unter gravierenden Mängeln leidet. Erstens werden Prädikate ungenügend berücksichtigt und als Funktoren betrachtet. So gibt es in Leśniewskis Ontologie eigentlich keine Prädikationstheorie. Dies führt zu einer Reihe von Schwierigkeiten, auf die in der nichttraditionellen Prädikationstheorie bereits hingewiesen wurde.

Zweitens werden die kategorialen (allgemeinsten) Subjektermini einfach vergessen, obwohl für sie besondere logische Regeln gelten. Drittens werden von Lejewski und Borkowski meines Erachtens zwei verschiedene Klassifikationen vermischt. Bei der einen Klassifikation werden Termini danach unterschieden, welche Aufgabe ihnen in der Sprache zugewiesen wurde. Nach ihr werden singuläre, generelle und kategoriale Subjekttermini unterschieden. Wir treffen diesbezüglich folgende Definitionen:

D1. Ein **singulärer Subjektterminus** ist ein Subjektterminus, der die Aufgabe hat, genau einen Gegenstand zu bezeichnen.

D2. Ein **genereller Subjektterminus** ist ein Subjektterminus, der die Aufgabe hat, mehrere Gegenstände zu bezeichnen.

D3. Ein **kategorialer Subjektterminus** ist ein Subjektterminus, der die Aufgabe hat, alle Gegenstände zu bezeichnen.

Die Unterscheidung von singulären, generellen und kategorialen Subjekttermini hat rein sprachlichen und vorlogischen Charakter, d. h., es gibt keine rein logischen Kriterien, die es gestatten würden, diese Art Termini voneinander zu unterscheiden. Wir setzen hier wieder die Fähigkeiten der Menschen voraus, zwischen singulären, generellen und kategorialen Subjekttermini zu unterscheiden. In der Logik berücksichtigen wir diese Unterscheidung, indem wir verschiedene Symbole für singuläre, generelle und kategoriale Subjekttermini verwenden. Singuläre Subjekttermini stellen wir durch die Buchstaben i, i_1, i_2 …, generelle durch die Buchstaben a, b, c, a_1, b_1, c_1 … und kategoriale durch k, k_1, k_2 … dar. Die Buchstaben a, b, c verwenden wir auch zur Darstellung beliebiger Termini, wobei aus dem Kontext jeweils klar wird, in welcher Form sie verwendet werden. Unseres Erachtens ist beim Aufbau einer beliebigen Terminologie ein kategorialer Terminus ausreichend, nämlich der im vorigen Abschnitt angegebene Terminus Gegenstand (g). Es sind unbegrenzt viele singuläre Termini möglich, aber jede Terminologie kommt mit einer begrenzten, sogar einer relativ kleinen Anzahl von singulären Termini aus.

Nach Lejewskis Klassifikation hat beispielsweise der Terminus ‚Kosmonaut‘ (oder der synonyme ‚Astronaut‘) eine mysteriöse Wandlung durchgemacht. Er war erst ein fiktiver Terminus (zur Zeit vor Gagarins erstem Flug ins All), dann ein individueller (von Gagarins Start bis zum Flug des nächsten Kosmonauten), und von diesem Zeitpunkt an ist er ein genereller Terminus. Es ist aber offensichtlich, daß der Terminus Kosmonaut von Anfang an als allgemeiner Terminus in den Gebrauch eingeführt wurde und daß die Referenzproblematik damit nichts zu tun hat.

Bei der Unterscheidung von leeren und nichtleeren Termini handelt es sich um eine ganz andere Klassifikation von Termini. Hier wird die Sphäre des rein Sprachlichen verlassen, und es wird geprüft, ob die betreffenden Termini die ihnen auferlegte Aufgabe erfüllen oder nicht. Bei der Einteilung der Termini in leere und nichtleere wird geprüft, ob Gegenstände existieren, die mit dem betreffenden Terminus bezeichnet werden, oder nicht. Es ist offensichtlich, daß es sich hierbei nicht um eine rein logische Aufgabe handelt. Die Unterscheidung in leere und nichtleere Termini ist für alle Terminitypen möglich, und es läßt sich auch eine detaillierte Klassifikation von Termini bezüglich ihrer Referenz angeben. Für singuläre Subjekttermini treffen wir beispielsweise folgende Definitionen:

D4. Ein singulärer Subjektterminus ist **leer** genau dann, wenn es keinen Gegenstand gibt, der mit ihm bezeichnet wird.

D5. Einen singulären Subjektterminus nennen wir einen **individuellen Terminus** genau dann, wenn es genau einen Gegenstand gibt, der mit ihm bezeichnet wird.

In früheren Auflagen dieses Buches hatte ich an dieser Stelle die folgende Definition gesetzt:

D6′. Ein singulärer Subjektterminus ist **mehrdeutig** genau dann, wenn es mehrere Gegenstände gibt, die mit ihm bezeichnet werden.

Herrn Anselm W. Müller verdanke ich den Hinweis, daß dies eine unzweckmäßige und einseitige Definition von „mehrdeutig" ist, da die Mehrdeutigkeit von Termini zumindest in genauso starkem Maße normativ bedingt, wie sie referentiell bedingt sein kann. Ob eine strenge Trennung von normativ bedingter und referentiell bedingter Mehrdeutigkeit durchgeführt werden kann, lassen wir hier offen. Auf jeden Fall ist *D6′* nicht akzeptabel.

Analoge Unterscheidungen in leere und nichtleere lassen sich auch für generelle und kategoriale Subjekttermini angeben. Während die Unterscheidung von singulären, generellen und kategorialen Subjekttermini auf logischer Ebene berücksichtigt werden muß, ist die Unterscheidung in leere und nichtleere Termini für die Aufstellung logischer Regeln in folgender Hinsicht irrelevant: Logische Regeln müssen sowohl für leere als auch für nichtleere Termini gelten, da es keine logischen Kriterien gibt, um leere von nichtleeren Termini zu unterscheiden. In den meisten Fällen hängt die Tatsache, ob ein Terminus leer ist oder nicht, von objektiven Gegebenheiten ab, und sie ändert sich auch im Laufe der Zeit.

Wir haben hier nur zwei Klassifikationen von Subjekttermini betrachtet. Es gibt natürlich viele Klassifikationen von Subjekttermini nach anderen Gesichtspunkten.

Nachdem wir die Unterscheidung in singuläre, generelle und kategoriale Subjekttermini eingeführt haben, fügen wir für die Bezeichnungsrelation S zu den Axiomen des Abschnitts 1 folgende Axiome hinzu:

A6. $S(a, tb) \wedge S(b, tc) \supset S(a, tc)$
A7. $\vdash S(i_1, ti_2) \supset S(i_2, ti_1)$.

14.3 Bedeutungseinschluß und Bedeutungsgleichheit von Termini

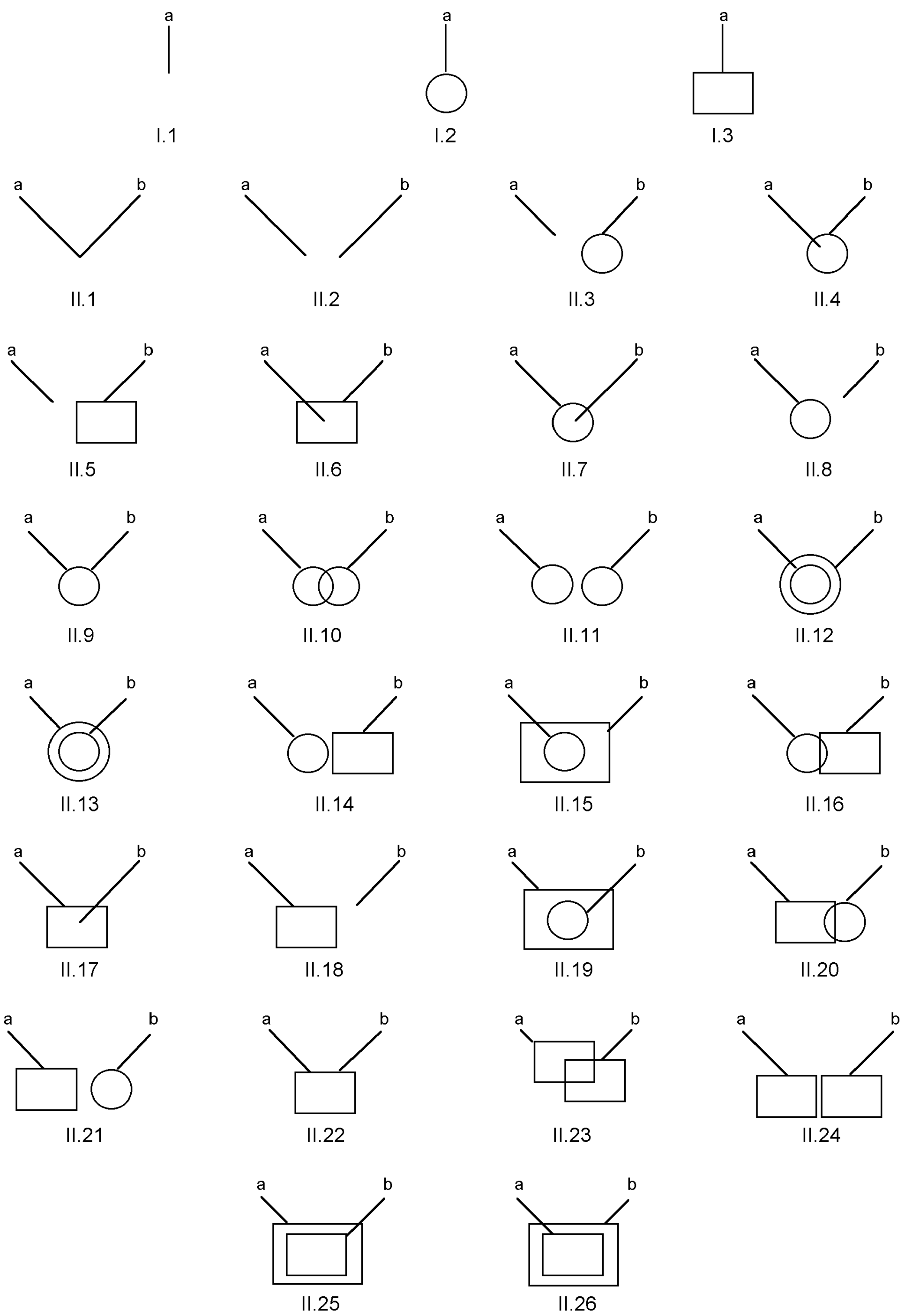
Eine wesentliche Rolle in der von Sinowjew aufgebauten Terminitheorie spielt die Beziehung des Bedeutungseinschlusses von Termini, die wie folgt definiert wird:

D1′. Ein Subjektterminus a **schließt der Bedeutung nach** einen Subjektterminus b **ein** genau dann, wenn jeder Gegenstand, der mit dem Terminus a bezeichnet wird, auch mit dem Terminus b bezeichnet wird.

Oder symbolisch: $(ta \rightharpoonup tb) \equiv_{Def} S(g, ta) \rightarrow S(g, tb)$, wobei $\rightharpoonup$ die Beziehung des Bedeutungseinschlusses, t ein terminibildender Operator, der aus einem Terminus einen Namen dieses Terminus bildet, S die Bezeichnungsrelation, g der kategoriale Terminus „Gegenstand" und $\rightarrow$ der Konditionaloperator sind.

Hier wird die Beziehung des Bedeutungseinschlusses mit Hilfe der Bezeichnungsrelation definiert. Dies führt aber sofort zu Schwierigkeiten, wenn man es mit leeren Termini zu tun hat. Auf diesen Umstand machte K.-H. Krampitz (1990) aufmerksam. Betrachten wir den Satz „Nixen sind Fabelwesen", so stehen die Termini „Nixe" und „Fabelwesen" offensichtlich in der intendierten Beziehung des Bedeutungseinschlusses. Doch die beiden Aussagen mit der Bezeichnungsrelation sind unbestimmt, da es sich um prädikative Aussagen mit leeren Termini handelt.

Legen wir die Klassifikation von Subjekttermini gemäß *D1-D3* des vorigen Abschnitts zugrunde, so lassen sich in Analogie zu Lejewskis ontologischen Tafeln folgende normativ-semantische Tafeln aufstellen:



(Normativ semantische Tafeln)

Diese Tafeln werden *normativ-semantische* genannt, weil in den Definitionen *D1-D3* von „der Aufgabe eines Terminus zu bezeichnen“ die Rede ist. Es handelt sich um Soll-Sätze, und für die Festlegung der Bedeutungsbeziehungen spielt die Referenz zunächst keine Rolle. Hiermit wird auch die übliche Unterscheidung von Syntax, Semantik und Pragmatik relativiert. Der Ansatz der Terminitheorie ist hier von Anfang an ein pragmatisch-normativer.

Das Diagramm I.1 stellt den normativ-semantischen Status eines singulären Subjektterminus a, das Diagramm I.2 den eines allgemeinen Subjektterminus a und das Diagramm I.3 den eines kategorialen Subjektterminus dar.

Diagramm II.1 stellt den normativ-semantischen Status zweier singulärer Subjekttermini a und b dar, die die Aufgabe haben, beide denselben einzelnen Gegenstand zu bezeichnen, z. B. „Henry Beyle“ und „der Schriftsteller Stendhal“.

Diagramm II.2 stellt den normativ-semantischen Status zweier singulärer Subjekttermini a und b dar, die die Aufgabe haben, jeweils einen anderen einzelnen Gegenstand zu bezeichnen.

Das Diagramm II.4 stellt beispielsweise den normativ-semantischen Status von „der Mond“ und „Himmelskörper“ dar, aber auch von „Herkules“ und „Fabelwesen“.

Das Diagramm II.12 stellt den Status von „Dackel“ und „Hund“, aber auch von „Nixe“ und „Fabelwesen“ dar.

Mit Hilfe der normativ-semantischen Tafeln lassen sich verschiedene Relationen zwischen Subjekttermini definieren, mit deren Hilfe ihrerseits eine logische Terminitheorie aufgebaut werden kann.

D1. Ein Subjektterminus a **schließt der Bedeutung nach** den Subjektterminus b **ein** (symbolisch: $ta \rightharpoonup tb$) genau dann, wenn die Diagramme II.1, II.4, II.6, II.9, II.12, II.15, II.22 oder II.26 den normativ-semantischen Status der Termini a und b erläutern.

In der in *D1* angegebenen Beziehung befinden sich beispielsweise die Termini „Sokrates“ und „Ehemann der Xanthippe“ (II.1), „Sokrates“ und „Philosoph“ (II.4), „Herkules“ und „Sagengestalt“ (II.4), „Berliner Fernsehturm“ und „Gegenstand“ (II.6), „Wallach“ und „kastriertes Pferd“ (II.9), „Dackel“ und „Hund“ (II.12), „Haus“ und „Gegenstand“ (II.15).

Anstelle des Ausdrucks „ein Terminus a schließt der Bedeutung nach den Terminus b ein“ sagt man in der Umgangssprache häufig „a ist b“ (z. B. „Ein Dackel ist ein Hund.“). Das Wort „ist“ wird in der Umgangssprache allerdings in verschiedenen Bedeutungen verwendet (vgl. Wessel 1976). Wir untersuchen es hier ausschließlich im angegebenen Sinn. Wenn man beispielsweise sagt „Ein Elektron ist ein Elementarteilchen“ oder „Ein Dackel ist ein Hund“ usw., so meint man gerade den Einschluß der Bedeutung des zweiten Terminus in der des ersten, obwohl solche Aussagen auf den ersten Blick wie echte empirische Aussagen erscheinen. Selbst wenn wir ausdrücklich vereinbaren, die beiden angegebenen Ausdrücke in gleicher Weise zu verwenden, so bleibt doch ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden in anderer Hinsicht bestehen. Der erste Ausdruck ist eine Aussage, deren Subjekte die Termini „Terminus a“ und „Terminus b“, die entsprechend die Termini a und b bezeichnen, sind und nicht die Termini a und b selbst. Im zweiten Ausdruck sind hingegen die Termini a und b selbst Termini der Aussage „a ist b“. Der erste Ausdruck ist eine Aussage über die Termini a und b, der zweite Ausdruck hat die Form einer Aussage über die mit den Termini a und b bezeichneten Gegenstände. Wenn man sich aber fragt, was das Wort „ist“ hier bedeutet und wie man solch eine Aussage gewinnt, so zeigt sich, daß der zweite Ausdruck vom ersten abgeleitet ist. Um den zweiten zu erklären, muß man den ersten Ausdruck heranziehen. Wenn wir hier den zweiten Ausdruck als Mittel der Erläuterung für die uns interessierende Beziehung von Termini anführen, so geschieht dies nur als ein Appell an die Sprachgewohnheit, denn eine gründlichere Analyse führt zu der Erklärung, die wir oben mit dem ersten Ausdruck gegeben haben.

Die Aussage „Der Terminus a schließt der Bedeutung nach den Terminus b ein“ besteht, wie wir bereits sagten, aus den Subjekten „der Terminus a“ und „der Terminus b“ sowie dem zweistelligen Prädikat „der erste schließt der Bedeutung nach den zweiten ein“ (oder „der erste enthält der Bedeutung nach den zweiten“). Unter Verwendung des Metaterminusoperators t hat unsere Aussage dann folgende symbolische Form: $\rightharpoonup (ta, tb)$. Wegen der größeren Anschaulichkeit verwenden wir anstelle dieses Ausdrucks die adäquate Schreibweise: $ta \rightharpoonup tb$ bzw. abgekürzt $a \rightharpoonup b$.

Bisher haben wir die Beziehung des Bedeutungseinschlusses nur für Subjekttermini definiert. Wenn wir den kategorialen Terminus „Gegenstand“ (g) verwenden, so läßt sich mit Hilfe des

Operators „derart, daß“ (symbolisch: $\downarrow$) die Beziehung des Bedeutungseinschlusses auch für Prädikattermini definieren.

D2. $ta \rightharpoonup tb \equiv_{Def} (tg \downarrow a \rightharpoonup tg \downarrow b)$, wobei a und b Prädikattermini sind.

In dieser Beziehung befinden sich etwa die Prädikattermini „sich entwickeln“ und „sich verändern“, denn jeder Gegenstand, der sich entwickelt, verändert sich auch.

D3. Ein Subjektterminus a **schließt der Bedeutung nach** den Subjektterminus b **streng ein** (symbolisch: $ta \doteq tb$) genau dann, wenn die Diagramme II.4, II.6, II.12, II.15 oder II.26 den normativ-semantischen Status der Termini a und b erläutern.

Die Termini in den für *D1* angegebenen Beispielen, außer dem ersten („Sokrates“ und „Ehemann der Xanthippe“) und dem fünften („Wallach“ und „kastriertes Pferd“), befinden sich in der Beziehung des strengen Bedeutungseinschlusses.

Wir können die Beziehung des strengen Bedeutungseinschlusses auch wie folgt definieren:

D3′. $(ta \doteq tb) \equiv_{Def} (ta \rightharpoonup tb) \wedge \sim(tb \rightharpoonup ta)$.

D4. Die Subjekttermini a und b sind **bedeutungsgleich** (symbolisch: $ta \rightleftharpoons tb$) genau dann, wenn die Diagramme II.1, II.9 oder II.22 den normativ-semantischen Status der Termini a und b erläutern.

Beispiele für bedeutungsgleiche Termini: „Stendhal“ und „Henry Beyle“, „Quadrat“ und „gleichseitiges Rechteck“.

Wir können die Beziehung der Bedeutungsgleichheit auch folgendermaßen definieren:

D4′. $(ta \rightleftharpoons tb) \equiv_{Def} (ta \rightharpoonup tb) \wedge (tb \rightharpoonup ta)$.

D5. Die Subjekttermini a und b **überschneiden sich der Bedeutung nach** (symbolisch: $ta \bigtriangleup tb$) genau dann, wenn die Diagramme II.1, II.4, II.6, II.7, II.9, II.10, II.12, II.13, II.15, II.16, II.17, II.19, II.20, II.22, II.23, II.25 oder II.26 den normativ-semantischen Status der Termini a und b erläutern.

In dieser Beziehung stehen etwa die Termini „Säugetier“ und „Wassertier“, die Termini „allgemeiner Subjektterminus“ und „leerer Subjektterminus“ oder „Philosoph“ und „Wissenschaftler“.

D6. Zwei Subjekttermini a und b **schließen sich der Bedeutung nach aus** (symbolisch: $ta \neg \bigtriangleup tb$) genau dann, wenn die Diagramme II.2, II.3, II.5, II.8, II.11, II.14, II.18, II.21 oder II.24 den normativ-semantischen Status der Termini a und b erläutern.

Beispiele: „Feuer“ und „Wasser“, „Faschist“ und „Humanist“.

D7. Zwei Subjekttermini a und b **überschneiden sich echt der Bedeutung nach** (symbolisch: $ta \bigtriangledown tb$) genau dann, wenn sie sich überschneiden und nicht bedeutungsgleich sind, d. h., wenn die Diagramme II.4, II.6, II.7, II.10, II.12, II.13, II.15, II.16, II.17, II.19, II.20, II.23, II.25 oder II.26 den normativ-semantischen Status der Termini erläutern.

Alle Beispiele für *D5* sind auch Beispiele für *D7*.

Die in *D3-D7* definierten Beziehungen zwischen Subjekttermini lassen sich nach dem Schema von *D2* auch für Prädikattermini definieren.

In der Terminitheorie gilt folgendes Ersetzbarkeitsprinzip für bedeutungsgleiche Termini (*EPB*):

$$\frac{\begin{array}{c} ta \rightleftharpoons tb \\ A \end{array}}{A\,[a/b]}$$

Hierbei ist $A\,[a/b]$ die Formel (Aussage), die man aus der Formel (Aussage) A erhält, wenn man null oder mehr Vorkommen von a als Terminus durch b ersetzt.

Übung:

Geben Sie Beispiele von Subjekt- und Prädikattermini an, die sich in den in *D1-D7* definierten Beziehungen befinden!

14.4 Einige abgeleitete Begriffe

D1. Den **Bedeutungsbereich** (**Wertbereich**) eines Terminus a bilden alle die Termini, von denen jeder der Bedeutung nach den Terminus a einschließt.

Wenn $tb \rightharpoonup ta$, so ist b ein Terminus (ein Element) aus dem Bedeutungsbereich des Terminus a. Den Bedeutungsbereich des Terminus „Fluß" bilden beispielsweise die Termini „Spree", „Havel", „Nebenfluß", „fischreicher Fluß" usw.

D2. Ein Terminus a wird **allgemeiner Terminus** (oder **Gattungsterminus**) **bezüglich eines Terminus** b genannt, und der Terminus b wird **spezieller Terminus** (oder **Artterminus**) **bezüglich** a genannt genau dann, wenn $(tb \rightharpoonup ta) \wedge \sim(ta \rightharpoonup tb)$.

So ist der Terminus „Tier" z. B. Gattungsterminus bezüglich des Terminus „Hund", und der Terminus „Hund" ist Artterminus bezüglich des Terminus „Tier".

Für einen individuellen Subjektterminus i gilt: $(ta \rightharpoonup ti) \rightarrow (ti \rightharpoonup ta)$, wobei a ein beliebiger Subjektterminus ist, der nicht den Terminus i und keinen von i abgeleiteten Terminus enthält. Mit anderen Worten, für einen individuellen Subjektterminus i gilt: Es gibt keinen solchen Terminus a mit den angegebenen Einschränkungen, für den gilt: $(ta \rightharpoonup ti) \rightarrow \sim(ti \rightharpoonup ta)$, d. h., ein individueller Terminus ist kein Gattungsterminus.

Diese Behauptung ist in folgender Hinsicht problematisch. Für jeden Subjektterminus a lassen sich speziellere Subjekttermini der Form $a \downarrow X$ („a derart, daß X"), wo X eine Aussage ist, bzw. der Form $a\alpha$, wo α ein Koordinatenzeichen ist (vgl. Abschnitt 5 des dreizehnten Kapitels), bilden. Dies gilt auch für individuelle Subjekttermini. Nehmen wir als individuellen Terminus i den Terminus „Sokrates". Hier lassen sich solche Termini bilden wie „Sokrates, der den Schierlingsbecher trinkt", „Sokrates zur Zeit t", „Sokrates am Ort s" usw., die alle speziellere Termini sind als der Terminus „Sokrates". Trotzdem ist unserer Auffassung nach der Terminus „Sokrates" ein individueller Terminus. Deshalb haben wir oben bezüglich des Terminus a die Einschränkung getroffen, daß a weder den Terminus i noch einen von i abgeleiteten Terminus enthält.

D3. Ein Gegenstand, der mit einem individuellen Terminus bezeichnet wird, ist ein **Individuum**.

D4. Ein Gegenstand, der mit einem individuellen Terminus aus dem Bedeutungsbereich des Terminus a bezeichnet wird, ist ein **Individuum aus dem Bedeutungsbereich von** a.

D5. Die Menge der Individuen aus dem Bedeutungsbereich eines Terminus a ist der **Gegenstandsbereich** des Terminus a.

Beispielsweise bilden den Gegenstandsbereich des Terminus „Fluß" nicht die Namen der einzelnen Flüsse, sondern die Flüsse selbst.

D6. Die Termini $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ sind der **Bedeutung nach** bezüglich b **vergleichbar** genau dann, wenn ein solcher Terminus b möglich ist, daß $(ta_1 \rightharpoonup tb) \wedge (ta_2 \rightharpoonup tb) \wedge \ldots \wedge \wedge (ta_n \rightharpoonup tb)$.

Zum Beispiel gibt es für die Termini „Apfel" und „Birne" den Terminus „Frucht" derart, daß jeder der ersten beiden Termini den dritten der Bedeutung nach einschließt.

D7. Eine **Gliederung** eines Terminus a seiner Bedeutung nach ist eine Menge sich der Bedeutung nach gegenseitig ausschließender Termini $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ aus dem Bedeutungsbereich von a derart, daß jedes Individuum aus dem Bedeutungsbereich von a ein Individuum aus dem Bedeutungsbereich irgendeines der Termini $a_1, \ldots, a_n$ ist. Die Termini $a_1, \ldots, a_n$ sind die **Elemente der Gliederung** von a.

So bilden die Termini „rechtwinkliges Dreieck“, „spitzwinkliges Dreieck“ und „stumpfwinkliges Dreieck“ eine Gliederung des Terminus „Dreieck“.

Übungen:

1. Geben Sie drei verschiedene Gliederungen des Terminus „Philosoph“ an!
2. In welcher Beziehung befinden sich die folgenden Terminipaare: „Dichter“ und „Maler“, „Haustier“ und „Hund“, „Kommunist“ und „Kapitalist“, „Gegenstand“ und „Inselsberg“, „Samstag“ und „Sonnabend“, „Marxist“ und „Existentialist“?

14.5 Einige Theoreme

Aus den in Abschnitt 3 getroffenen Definitionen ergeben sich einige Theoreme einer logischen Terminitheorie, z. B. folgende:

T1. $ta \rightharpoonup ta$
T2. $ta \rightharpoonup tb \wedge tb \rightharpoonup tc \supset ta \rightharpoonup tc$
T3. $ta \rightleftharpoons tb \dashv\vdash ta \rightharpoonup tb \wedge tb \rightharpoonup ta$
T4. $ta \rightharpoonup tb \supset (ta \mathrel{\underline{\rightharpoonup}} tb) \vee (ta \rightleftharpoons tb)$
T5. $\sim(ta \mathrel{\underline{\rightharpoonup}} ta)$
T6. $ta \triangle tb \supset \sim(ta\neg \triangle tb)$
T7. $ta\neg \triangle tb \supset \sim(ta \triangle tb)$
T8. $\sim(ta\neg \triangle ta)$
T9. $\sim(ta \triangledown ta)$
T10. $ta \triangle tb \supset tb \triangle ta$
T11. $ta\neg \triangle tb \supset tb\neg \triangle ta$
T12. $ta \triangledown tb \supset tb \triangledown ta$
T13. $ta \rightleftharpoons tb \wedge tb \rightleftharpoons tc \supset ta \rightleftharpoons tc$
T14. $ta \rightharpoonup tb \supset ta \triangle tb$
T15. $ta \rightleftharpoons tb \supset ta \triangle tb$
T16. $ta \mathrel{\underline{\rightharpoonup}} tb \supset ta \triangle tb$
T17. $ta \rightleftharpoons tb \supset \sim(ta \triangledown tb)$
T18. $ta \mathrel{\underline{\rightharpoonup}} tb \supset ta \triangledown tb$
T19. $ta \mathrel{\underline{\rightharpoonup}} tb \wedge tb \mathrel{\underline{\rightharpoonup}} tc \supset ta \mathrel{\underline{\rightharpoonup}} tc$
T20. $ta\neg \triangle tb \supset \sim(ta \rightharpoonup tb)$
T21. $ta\neg \triangle tb \supset \sim(ta \rightleftharpoons tb)$
T22. $ta\neg \triangle tb \supset \sim(ta \mathrel{\underline{\rightharpoonup}} tb)$
T23. $ta\neg \triangle tb \supset \sim(ta \triangledown tb)$
T24. $ta \triangle ta$
T25. $ta \rightleftharpoons tb \supset tb \rightleftharpoons ta$

Die normativ-semantischen Tafeln gestatten es, diese und andere Theoreme als logisch wahr nachzuweisen. Betrachten wir *T1*. Wenn die Termini a und b in den normativ-semantischen Tafeln identisch sind, kommen nur die Fälle II.1, II.9 und II.22 in Betracht, und in diesen Fällen gilt definitionsgemäß die Beziehung des Bedeutungseinschlusses.

Ebenso leicht sehen wir *T8*, *T9* und *T24* als gültig ein. Bei einigen Theoremen folgt ihre Gültigkeit unmittelbar aus den Definitionen, da die möglichen wahren Fälle für das Vorderglied der Subjunktion alle unter den möglichen wahren Fällen für das Hinterglied der Subjunktion vorkommen (z. B. *T14-T16*).

Etwas aufwendiger wird die Überprüfung schon bei *T2*. Die Subjunktion würde nur den Wert falsch annehmen, wenn das Vorderglied wahr und das Hinterglied falsch wäre. Wir prüfen also ob der Fall möglich ist, daß $ta \rightharpoonup tb$ und $tb \rightharpoonup tc$ beide wahr sind, $ta \rightharpoonup tc$ hingegen falsch ist. Die folgende Tabelle zeigt, daß dies nicht möglich ist.

$ta \rightharpoonup tb$	$\wedge$	$tb \rightharpoonup tc$	$\supset$	$ta \rightharpoonup tc$	$ta \rightharpoonup tb$	$\wedge$	$tb \rightharpoonup tc$	$\supset$	$ta \rightharpoonup tc$
II.1		II.1		II.1	II.12		II.1+		
		4		4			4+		
		6		6			6+		
				9+			9		12
		12+					12		12
		15+					15		15
		22+					22+		
		26+					26+		
II.4		1+			II.15		1+		
		4+					4+		
		6+					6+		
		9		1			9+		
		12		4			12+		
		15		6			15+		
		22		6			22		15
		26+					26		15
II.6		1+			II.22		1+		
		4+					4+		
		6+					6+		
		9+					9+		
		12+					12+		
		15+					15+		
		22		6			22		22
		26		12			26		26
II.9		1+			II.26		1+		
		4+					4+		
		6+					6+		
		9		9			9+		
		12		12			12+		
		15		15			15+		
		22+					22		26
		26+					26		26

Die mit dem Zeichen + gekennzeichneten Zeilen sind aus rein syntaktischen Gründen nicht möglich.

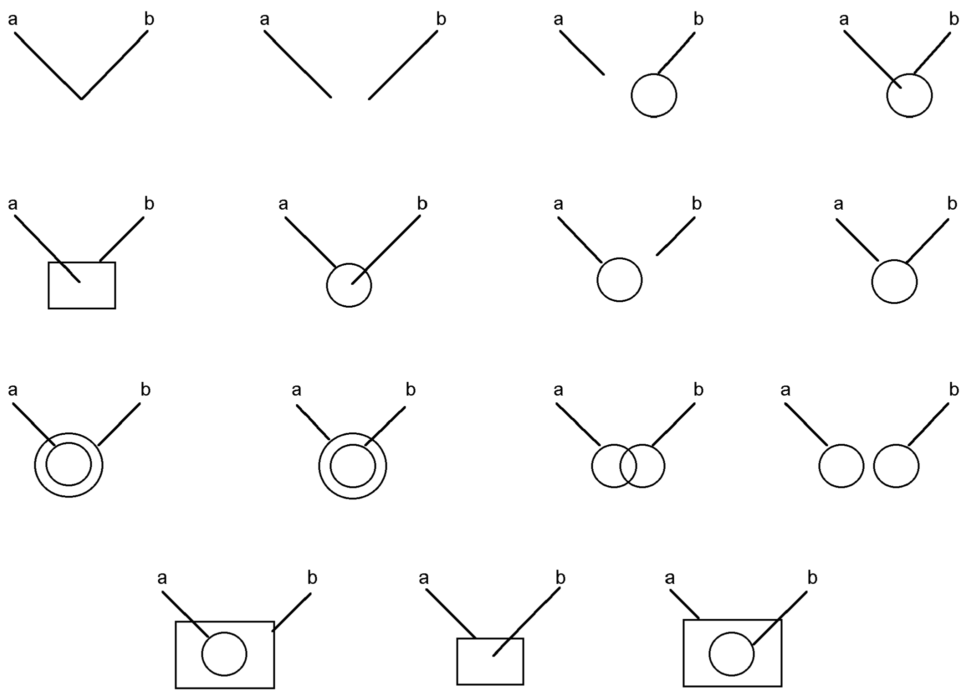
14.6 Vereinfachung der normativ-semantischen Tafeln

Wir haben aus logisch-philosophischen Gründen nur einen kategorialen Terminus als sinnvoll akzeptiert, nämlich den Terminus *Gegenstand* (und seine Synonyme, vgl. II.22). Das ermöglicht es uns, die normativ-semantischen Tafeln zu vereinfachen. Man kann die Fälle II.22, II.23, II.24, II.25 und II.26 unberücksichtigt lassen.

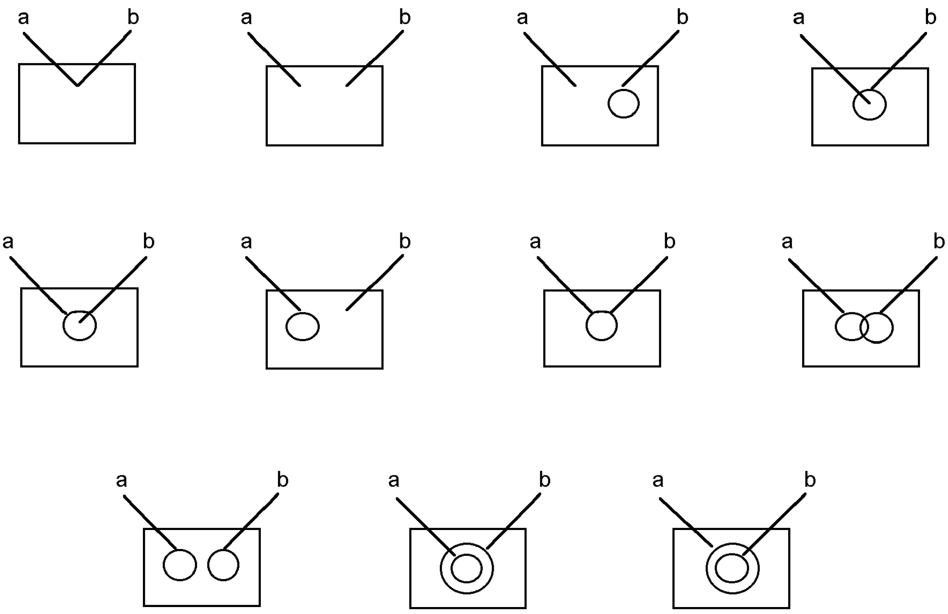
Die hier vertretene Position widerspricht natürlich solchen philosophischen Auffassungen, wie sie etwa von N. Goodman vertreten werden (vgl. Goodman 1951, 1975, 1988). Akzeptiert man - wie Goodman - eine Vielfalt von Welten und verschiedene „ways of world making", so muß man verschiedene kategoriale Subjekttermini zulassen und auch die oben ausgeschlossenen Fälle berücksichtigen. Ich allerdings bin der Auffassung, daß es nur eine Welt gibt, und schließe diese Fälle aus.

Auch die Fälle II.5, II.14, II.16, II.18, II.20 und II.21 widersprechen der hier vorgetragenen Position und können unberücksichtigt bleiben. Das Diagramm II.5 etwa stellt den normativ-semantischen Status eines singulären Subjektterminus a und eines kategorialen Subjektterminus b dar, für die gilt, a hat die Aufgabe, einen einzelnen Gegenstand zu bezeichnen, der kein Gegenstand ist. Für mich gibt es hier nur die Folgerung, daß a in diesem Falle kein Terminus ist.

Wir erhalten dann die folgenden normativ-semantischen Tafeln, unter der Bedingung, daß nur ein kategorialer Terminus akzeptiert wird:



Da alle Subjekttermini die Aufgabe haben, Gegenstände zu bezeichnen, erweisen sich auch die Fälle II.6, II.15, II.17 und II.19 als überflüssig. Die These des Reismus von Kotarbiński (Kotarbiński 1968), daß alles, was es gibt, ein Gegenstand ist, erweist sich als eine rein sprachliche Festsetzung und als logisch wahr: $\forall a(a \rightharpoonup g)$. Unsere Diagramme schmelzen zusammen zu:



Wir sind also fast bei den Vennschen Diagrammen angekommen, wobei der Unterschied darin besteht, daß wir uns auf normativ-semantischer Ebene bewegen und den referentiellen Aspekt nicht betrachtet haben.

14.7 Einfache und zusammengesetzte Termini

Termini werden in *einfache* und *zusammengesetzte Termini* eingeteilt. Einfache Termini haben unter logischen Gesichtspunkten keine Bestandteile, sie sind elementar. Zusammengesetzte Termini setzen sich aus anderen Termini, Aussagen und terminierzeugenden Operatoren zusammen. In der Umgangssprache und auch in den Wissenschaftssprachen ist nicht immer offensichtlich, ob es sich bei einem bestimmten Terminus um einen einfachen oder um einen zusammengesetzten handelt. Bei der logischen Analyse und Rekonstruktion einer bestimmten Terminologie kann man dabei zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen, d. h., ein und derselbe Terminus kann bei der einen Analyse als einfacher und bei einer anderen als zusammengesetzter Terminus angesehen werden. Wir setzen hier voraus, daß einige einfache Termini gegeben sind. Im weiteren betrachten wir einige terminierzeugende Operatoren, die auf beliebige Termini oder Aussagen, unabhängig von ihrer konkreten Bedeutung, bzw. auf beliebige Termini oder Aussagen eines gegebenen logischen Typs anwendbar sind. Wir betrachten diese Operatoren gleichzeitig mit den entsprechenden Regeln zum Aufbau von Termini.

In diesem Abschnitt beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung von Operatoren, die aus Termini wieder Termini bilden.

Terminierzeugende Operatoren:

1) t - Metaterminusoperator;
2) s - Operator des Bezeichneten;
3) $(..., ..., ...)$ - Operator eines n-Tupels von Termini;
4) $\wedge$, $\vee$, $\sim$ - Konjunktion, Adjunktion und Negation als terminierzeugende Operatoren.

Dies ist natürlich nur eine kleine Auswahl von terminierzeugenden Operatoren. Weitere Operatoren werden in Sinowjew/Wessel 1975, Wessel 1977, Zinov'ev 1983 betrachtet.

TR1. Wenn a ein Terminus ist, so ist ta ein Subjektterminus.

Der Ausdruck ta wird folgendermaßen gelesen: „ein Terminus (Subjekt; Prädikat), der (das) a geschrieben, gesprochen usw. wird (in allgemeiner Form: die Form a hat)". In ta tritt a nicht in der Rolle eines Terminus, sondern als ein besonderer physischer Gegenstand der Form a auf; a kommt in ta nicht als Terminus vor, deshalb gilt:

$$\sim(a \rightharpoonup ta) \wedge \sim(ta \rightharpoonup a) \quad \text{und} \quad \vdash \sim((a \rightleftharpoons b) \rightarrow (ta \rightleftharpoons tb)).$$

TR2. Wenn a ein Terminus ist, so ist sa ein Subjektterminus.

Der Terminus sa wird gelesen als „das, was mit dem Terminus a bezeichnet (ausgedrückt) wird". Wenn a ein Subjekt ist, so wird sa auch als „ein mit dem Terminus a bezeichneter Gegenstand" gelesen. Für einen beliebigen Terminus a gilt $ta \rightleftharpoons tsa$. Trotz dieser Bedeutungsgleichheit sind Termini vom Typ sa nicht überflüssig. Insbesondere in philosophischen Erörterungen ist es wesentlich, zu unterstreichen, daß eben das Bezeichnete, das außerhalb der Sprache Liegende, gemeint ist. Wir haben hier eine ähnliche Situation wie bei dem Prädikat „wahr". Denn alles, was sich korrekt mit diesem Prädikat aussagen läßt, kann man auch ohne dieses Prädikat aussagen. Trotzdem ist eine Verwendung dieses Prädikates nützlich und erforderlich.

TR3. Wenn $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ Subjekte sind, so ist $(a_1, \ldots, a_n)$ ein n-Tupel von Subjekten. Ein n-Tupel von Subjekten ist ein Subjekt.

Eine Besonderheit von Subjekten der Form $(a_1, \ldots, a_n)$ besteht darin, daß sie nur mit entsprechenden n-stelligen Prädikaten Aussagen ergeben.

TR4. Wenn a ein genereller Subjektterminus (ein Prädikatterminus) ist, so ist $\sim a$ ein Subjektterminus (entsprechend ein Prädikatterminus).

Der Terminus $\sim a$ wird gelesen als „nicht-a". Die Einschränkung, daß a ein genereller Terminus sein muß, ist wesentlich, da es sinnlos ist, singuläre und kategoriale Termini zu negieren. Der Ausdruck „Nichtgegenstand" ist kein Terminus, und eine Negation eines singulären Terminus ergäbe nur in einem Bereich mit zwei Individuen wieder einen singulären Terminus. Wir vereinbaren deshalb, daß überall da, wo eine Negation vor einem Terminus steht, dieser kein singulärer oder kategorialer Terminus ist. Dies gilt auch für die im weiteren angegebene engere Termininegation.

TR5. Wenn a ein genereller Subjektterminus (ein Prädikatterminus) ist, so ist $\tilde{a}$ ein Subjektterminus (entsprechend ein Prädikatterminus).

Ein Terminus $\tilde{a}$ wird auch als „nicht-a" gelesen (beispielsweise „Nichtschwimmer", „nicht gerade" im Sinne von „ungerade", „unendlich", „nicht durch 5 teilbar"), was von der Zweideutigkeit der umgangssprachlichen Negation zeugt, denn es gilt nicht immer $t{\sim}a \rightharpoonup t\tilde{a}$, während die umgekehrte Behauptung $t\tilde{a} \rightharpoonup t{\sim}a$ gültig ist. Wenn a der Terminus „Schwimmer" ist, so bezeichnet der Terminus $\sim a$ alle Gegenstände, die nicht „Schwimmer" genannt werden, so etwa Luft, Eisen usw., während der Terminus $\tilde{a}$ nur die Menschen bezeichnet, die nicht schwimmen können. Die Verwendung von Prädikattermini des Typs $\tilde{a}$ hängt damit zusammen, daß man Aussagen des Typs $s \nleftarrow P$ so aufgliedert, daß man die Negation als Teil des Prädikates ansieht und die Aussage als $s \leftarrow \tilde{P}$ auffaßt. Für Prädikattermini des Typs $\tilde{a}$ gilt also die Regel $s \leftarrow \tilde{P}$ genau dann, wenn $s \nleftarrow P$.

TR6. Wenn a und b Subjekttermini (entsprechend Prädikattermini) sind, so sind $(a \wedge b)$ und $(a \vee b)$ Subjekttermini (entsprechend Prädikattermini).

Gelesen werden diese Termini wie folgt: 1) $a \wedge b$ als „das, was mit dem Terminus a und dem Terminus b bezeichnet wird"; 2) $a \vee b$ als „das, was mit dem Terminus a oder dem Terminus b

bezeichnet wird“.

Die Eigenschaften zusammengesetzter Termini (und der in ihnen enthaltenen Operatoren) werden durch ein System von Behauptungen bestimmt, dem man die Form eines deduktiven Systems oder eines Kalküls geben kann. Wenn ein solches System gegeben ist, so wird die Bedeutung eines zusammengesetzten Terminus als bekannt angesehen, wenn die Bedeutung der Termini bekannt ist, aus denen er aufgebaut ist. Im folgenden Abschnitt deuten wir an, wie solche Kalküle der Terminitheorie aufgebaut werden können.

14.8 Kalküle der Terminitheorie

Beim Aufbau von Kalkülen der Terminitheorie setzen wir die Systeme der logischen Folgebeziehung (für die Aussagenlogik, die Prädikationstheorie und die Quantorenlogik) als gegeben voraus und ergänzen sie durch die speziellen Definitionen und Axiome der Terminitheorie. Es ist offensichtlich, daß man schon auf Grund der verschiedenen Basissysteme verschiedene Systeme der Terminitheorie aufbauen kann. Wir gehen hier auf diese Variationen nicht ein.

Beim Aufbau von Kalkülen der Terminitheorie wird im ersten Schritt das Alphabet der Basissysteme ergänzt. Einmal werden für die verschiedenen Terminitypen Variablen zum Alphabet hinzugefügt, d. h., es werden Variablen für singuläre, generelle und kategoriale Subjekttermini sowie Variablen für Prädikattermini angegeben. Zum anderen werden terminibildende Operatoren zum Alphabet hinzugefügt. Der Einfachheit halber unterscheiden wir bei dem im folgenden angegebenen Kalkül der Terminitheorie nicht zwischen den verschiedenen Typen von Subjektvariablen, sondern treffen die generelle Einschränkung, daß die Kalkülregeln nur für generelle Subjekttermini gelten. Als terminibildende Operatoren wählen wir die im vorigen Abschnitt angegebenen Operatoren $(...,...,...)$, $\wedge$, $\vee$ und $\sim$. Außerdem fügen wir zum Alphabet das konkrete zweistellige Prädikat $\rightharpoonup$ hinzu.

D1. Subjektform:

1. Subjektvariablen sind Subjektformen;
2. wenn $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ Subjektformen sind, so ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Subjektform;
3. wenn a eine Subjektform ist, so sind $\sim a$ und $\tilde{a}$ Subjektformen;
4. wenn a und b Subjektformen sind, so sind $(a \wedge b)$ und $(a \vee b)$ Subjektformen;
5. eine Subjektform liegt nur auf Grund der Punkte 1-4 vor.

D2. Prädikatform:

1. Prädikatenvariablen sind Prädikatformen;
2. wenn a eine Prädikatform ist, so sind $\sim a$ und $\tilde{a}$ Prädikatformen;
3. wenn a und b Prädikatformen sind, so sind $(a \wedge b)$ und $(a \vee b)$ Prädikatformen;
4. eine Prädikatform liegt nur auf Grund der Punkte 1-3 vor.

D3. Terminiform: Subjekt- und Prädikatformen sind Terminiformen.

D4. Wenn a und b beide Subjekt- oder beide Prädikatformen sind, so ist $\rightharpoonup (a, b)$ eine **elementare Formel der Terminitheorie**.

D5. Elementare Formeln der Terminitheorie sind Formeln.

Anstelle von Symbolen der Form $\rightharpoonup (a, b)$ schreiben wir $a \rightharpoonup b$.

D6. $(a \rightleftharpoons b) \equiv_{Def} (a \rightharpoonup b) \wedge (b \rightharpoonup a)$.

Im weiteren formulieren wir einige Axiomenschemata der Terminitheorie:

A1. $(a \rightleftharpoons b) \wedge A \vdash B$, wobei B aus A durch ein korrektes Ersetzen von null oder mehr (nicht unbedingt allen) Vorkommen von a als Terminus in A durch b gebildet wird.

A2. $\vdash (a \rightleftharpoons b) \rightarrow (c \rightleftharpoons d)$, wobei d aus c durch ein korrektes Ersetzen von null oder mehr (nicht unbedingt allen) Vorkommen von a als Terminus in c durch b gebildet wird.

A3. $\vdash \sim\sim a \rightharpoonup a$

A4. $\vdash a \rightharpoonup \sim\sim a$

A5. $\vdash a \wedge b \rightharpoonup a$

A6. $\vdash a \wedge b \rightharpoonup b \wedge a$

A7. $\vdash a \vee b \rightharpoonup \sim(\sim a \wedge \sim b)$

A8. $\vdash \sim(\sim a \wedge \sim b) \rightharpoonup a \vee b$

A9. $a \rightharpoonup b \vdash \sim b \rightharpoonup \sim a$

A10. $(a \rightharpoonup b) \wedge (b \rightharpoonup c) \vdash (a \rightharpoonup c)$

A11. $(a \rightharpoonup b) \wedge (a \rightharpoonup c) \vdash (a \rightharpoonup b \wedge c)$

A12. $(a \rightharpoonup b \wedge c) \vdash (a \rightharpoonup b) \wedge (a \rightharpoonup c)$

A13. $(a \rightharpoonup b) \vee (a \rightharpoonup c) \vdash (a \rightharpoonup b \vee c)$

A14. $\vdash (a \vee b) \wedge c \rightharpoonup (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

A15. $\vdash (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \rightharpoonup (a \vee b) \wedge c$

A16. $\vdash a \vee a \rightharpoonup a$

Die beiden ersten Axiomenschemata sind Ersetzbarkeitsregeln für bedeutungsgleiche Termini. In den Axiomenschemata *A3-A16* werden die Beziehungen zwischen den terminierzeugenden Operatoren $\sim$, $\wedge$ und $\vee$ festgelegt. Hier sind verschiedene andere Varianten möglich. Die folgenden beiden Axiomenschemata legen die Beziehung des Bedeutungseinschlusses für n-Tupel von Subjekten fest:

A17. $(a_1 \rightharpoonup b_1) \wedge \ldots \wedge (a_n \rightharpoonup b_n) \vdash (a_1, \ldots, a_n) \rightharpoonup (b_1, \ldots, b_n)$

A18. $(a_1, \ldots, a_n) \rightharpoonup (b_1, \ldots, b_n) \vdash (a_1 \rightharpoonup b_1) \wedge \ldots \wedge (a_n \rightharpoonup b_n)$.

Für Prädikatformen gelten folgende Axiomenschemata:

A19. $(P \rightharpoonup Q) \wedge P(a) \vdash Q(a)$

A20. $(P \rightharpoonup Q) \wedge \neg Q(a) \vdash \neg P(a)$

A21. $(P \rightharpoonup Q) \wedge ?Q(a) \vdash \sim P(a)$

A22. $\neg P(a) \vdash \tilde{P}(a)$

A23. $\tilde{P}(a) \vdash \neg P(a)$

A24. $\neg \tilde{P}(a) \dashv\vdash P(a)$

A25. $?P(a) \dashv\vdash ?\tilde{P}(a)$.

Das hier dargestellte Axiomensystem ist fragmentarisch. Umfassendere Systeme der Termitheorie sind in der eingangs angegebenen Literatur enthalten.

14.9 Bildung von Termini aus Aussagen

Eine spezielle Gruppe von Operatoren sind solche, die aus Aussagen Termini bilden. Zwei solcher Operatoren haben wir bereits kennengelernt, den Operator t, der aus einer Aussage A bzw. aus einem Terminus a einen Namen dieser Aussage tA bzw. dieses Terminus ta bildet, und den Operator „die Tatsache, daß ...“ ($\downarrow$), der aus einer Aussage A einen Terminus $\downarrow A$, „die Tatsache, daß A“, bildet.

Wie aus dem Text ersichtlich ist, wird der Buchstabe t in zwei verschiedenen Weisen verwendet, nämlich einmal als Operator, der aus einem Terminus einen Terminus bildet, und zum anderen als Operator, der aus einer Aussage einen Terminus bildet.

Wir definieren zunächst den Operator t, der aus einer Aussage einen Terminus bildet, und geben dann Definitionen einiger anderer Operatoren an, die ebenfalls aus einer Aussage einen Terminus bilden.

D1. 1) $E(tA)$ (bzw. ttA ist nicht leer) genau dann, wenn das sprachliche Gebilde A eine Aussage ist;
2) $\sim(tA \rightleftharpoons A)$;
3) der Terminus tA darf nur durch einen anderen Namen der Aussage A ersetzt werden.

Eine Verwechslung der beiden in *D1* und *TR1* des Abschnitts 7 definierten Operatoren t schließen wir dadurch aus, daß wir festsetzen, daß im weiteren immer das richtige Argument (Terminus oder Aussage) gewählt wird.
Definitionsgemäß ist tA ein individueller Terminus.

Im folgenden definieren wir die terminibildenden Operatoren l, s, e, $\downarrow$ und $\uparrow$, die alle aus einer Aussage einen Terminus bilden.

D2. 1) $E(lA)$ (bzw. tlA ist nicht leer) genau dann, wenn tA eine Aussage ist;
2) $tlA \rightleftharpoons tlB$ genau dann, wenn $A \dashv\vdash B$.

D3. 1) $E(sA)$ (bzw. tsA ist nicht leer) genau dann, wenn tA eine Aussage ist;
2) $tsA \rightleftharpoons tsB$ genau dann, wenn $tlA \rightleftharpoons tlB$ oder $A \wedge C \dashv\vdash B \wedge C$, wobei C wahr ist und die Form $ta \rightleftharpoons tb$ hat oder eine Konjunktion von wahren Aussagen der Form $ta \rightleftharpoons tb$ ist.

D4. 1) $E(eA)$ (bzw. teA ist nicht leer) genau dann, wenn tA eine Aussage ist;
2) $teA \rightleftharpoons teB$ genau dann, wenn $A \equiv B$ wahr ist.

D5. 1) $E(\downarrow A)$ (bzw. $t \downarrow A$ ist nicht leer) genau dann, wenn A (A gilt, tA wahr ist);
2) $t \downarrow A \rightleftharpoons t \downarrow B$ genau dann, wenn $tsA \rightleftharpoons tsB$.

D6. 1) $E(\uparrow A)$ (bzw. $t \uparrow A$ ist nicht leer) genau dann, wenn $\sim A$ ($\sim A$ gilt, $t{\sim}A$ wahr ist);
2) $t \uparrow A \rightleftharpoons t \uparrow B$ genau dann, wenn $tsA \rightleftharpoons tsB$.

Die in *D2-D6* definierten Operatoren ermöglichen es, *daß*-Konstruktionen (*daß*-Ausdrücke) der natürlichen Sprache zu analysieren.

In tA, sA, eA, $\downarrow A$ und $\uparrow A$ kommt A nicht als Aussage, sondern nur als graphischer Teil vor.

Lesevorschläge für die Termini tA, lA, sA, eA, $\downarrow A$ und $\uparrow A$:

1) tA - die Aussage A,
2) lA - das, was tA bedeutet,
3) sA - der Sachverhalt A,
4) eA - der Wahrheitswert von A,
5) $\downarrow A$ - die Tatsache, daß A; die Tatsache A;
6) $\uparrow A$ - die Untatsache A. Diesen schönen Terminus habe ich von E. Mally (1971) übernommen.

Maßgebend für die Verwendung von tA, lA, sA, eA, $\downarrow A$ und $\uparrow A$ sind jedoch nur die in *D1-D6* getroffenen Festlegungen und nicht irgendwelche psychischen Assoziationen des Lesers, die bei der vorgeschlagenen Lesart entstehen.

In den Definitionen *D2*, *D3*, *D5* und *D6* ist noch offengelassen, welchen Typ der logischen Folgebeziehung wir wählen. Wählen wir die klassische Folgebeziehung, so bezeichnen wir die Definitionen als *D2a*, *D3a* usw., wählen wir die strenge Folgebeziehung, so bezeichnen wir sie als *D2b* usw., und wählen wir die strikte Folgebeziehung, so bezeichnen wir sie als *D2c* usw.

Mit Hilfe der definierten terminibildenden Operatoren ist eine detailliertere Analyse epistemischer Kontexte möglich, als sie bisher in der Literatur vorliegt. Sie haben aber auch Anwendungsmöglichkeiten bei der logischen Analyse modaler und anderer *intensional* genannter Kontexte (vgl. Wessel 1995a).

14.10 Verallgemeinerung und Einschränkung von Termini

Wichtige Operationen zur Einführung neuer Termini sind die Verallgemeinerung und die Einschränkung von Termini.

Unter einer *Verallgemeinerung* von Termini versteht man folgende Operation. Gegeben seien die Termini $a_1, \ldots, a_n$, die entweder alle Subjekt- oder alle Prädikattermini sind. Diese Termini verallgemeinern bedeutet dann, einen solchen Terminus b einzuführen, daß alle Termini $a_1, \ldots, a_n$ der Bedeutung nach b einschließen, d. h., daß gilt: $(ta_1 \rightharpoonup tb) \wedge \ldots \wedge (ta_n \rightharpoonup tb)$.

Nehmen wir beispielsweise an, wir hätten die Termini „Apfel“, „Birne“, „Pflaume“ usw. und der Terminus „Frucht“ wäre in unserer Sprache noch nicht eingeführt, dann könnten wir ihn mit Hilfe einer Verallgemeinerung durch folgende Festsetzungen einführen: „Ein Apfel ist eine Frucht“, „Eine Birne ist eine Frucht“, „Eine Pflaume ist eine Frucht“ usw.

Unter einer *Einschränkung* von Termini versteht man folgende Operation. Angenommen, ein Terminus a sei gegeben. Ihn einschränken bedeutet dann, einen solchen Terminus b einzuführen, daß b bedeutungsmäßig a einschließt, während nicht gilt, daß a bedeutungsmäßig b einschließt, d. h., daß gilt: $(tb \rightharpoonup ta) \wedge \sim(ta \rightharpoonup tb)$.

Nehmen wir an, wir hätten den Terminus „Elementarteilchen“ und der Terminus „Elektron“ wäre in unserer Sprache noch nicht eingeführt, dann könnten wir ihn durch folgende Festsetzung einführen: „Ein Elektron ist ein Elementarteilchen, aber nicht jedes Elementarteilchen ist ein Elektron.“ Eine Verallgemeinerung bedeutet, einen neuen Gattungsterminus zu bilden, und mit einer Einschränkung wird ein neuer Artterminus eingeführt.

Wir haben die Operationen der Verallgemeinerung und Einschränkung ganz allgemein beschrieben. Wenn in der Wissenschaft und Philosophie verallgemeinert oder eingeschränkt wird, so geschieht dies auf Grund bestimmter Ähnlichkeiten oder Merkmale der Gegenstände $a, a_1, \ldots, a_n$ oder nach bestimmten Zwecken, denen diese Gegenstände dienen usw. Das ändert aber nichts am logischen Charakter der hier beschriebenen Operationen.

14.11 Definition von Termini

Analysen, Explikationen und Definitionen von Termini spielen eine wichtige Rolle beim Aufbau und bei der Bearbeitung einer Terminologie. Wir geben hier nur an, was man unter diesen Operationen versteht. Beginnen wir mit der Definition, der wichtigsten der drei genannten Operationen. Wir geben dabei keine Einführung in die Definitionstheorie, sondern beschränken uns auf eine kurze Beschreibung der logisch einfachsten Definitionen. Eine Definition ist eine Festsetzung, nach der ein neuer Terminus a, der bis zu dieser Festsetzung kein Terminus war, mit Hilfe von anderen, bereits eingeführten Termini $b_1, \ldots, b_n$ und dem Prädikat des Bedeutungseinschlusses (der Bedeutungsgleichheit) in die Sprache eingeführt wird. Das Schema für eine solche Definition läßt sich folgendermaßen formulieren: „Wir sehen a als einen Terminus an, der dem Terminus b bedeutungsgleich ist“, wobei b ein zusammengesetzter Terminus ist, der aus den bekannten Termini $b_1, \ldots, b_n$ und bekannten logischen Operatoren aufgebaut ist. Symbolisch schreiben wir dies in folgender Form: $ta \rightleftharpoons_{Def} tb$ oder $a \rightleftharpoons_{Def} b$. Den neu eingeführten Terminus a nennt man *Definiendum* und den Terminus b *Definiens*.

Nehmen wir das Beispiel wieder auf, mit dem die Operation der Einschränkung erklärt wurde. Angenommen, der Subjektterminus „Elementarteilchen“ (b) sei bekannt, und für Subjekttermini dieses Typs seien die Prädikattermini „leicht“ (P) (Ruhemasse $m_0 = 0,9108 \cdot 10^{-27} g$) und „negative Elementarladung“ (Q) ($1,602 \cdot 10^{-19}$ Coulomb) bestimmt, dann läßt sich der Terminus „Elektron“ (a) folgendermaßen definieren:

„Elektron“ $\rightleftharpoons_{Def}$ „Elementarteilchen, das leicht ist und eine negative Elementarladung besitzt“ oder symbolisch $ta \rightleftharpoons_{Def} t(b \downarrow P \wedge Q)$, wobei $b \downarrow P \wedge Q$ gelesen wird „b mit der Eigenschaft $P \wedge Q$“.

Nach der traditionellen Definitionslehre sollte jede Definition so aufgebaut werden, daß man den neu einzuführenden Terminus a durch Angabe der „nächsthöheren“ Gattung b und des artbildenden Unterschiedes P definiert. Das Schema solcher Definitionen kann man so schreiben: $ta \rightleftharpoons_{Def} t(b \downarrow P)$. Das ist aber nur ein Spezialfall von Definitionen. Wir sahen schon an unserem Beispiel, in dem das Definiens eine ähnliche Struktur hat, daß für P ein zusammengesetzter Terminus stand. Das Definiens kann aber auch eine ganz andere Struktur haben. Betrachten wir als Erläuterung noch einmal das Beispiel, das wir zur Erklärung der Operation der Verallgemeinerung verwendet haben. Die Termini $a_1, \ldots, a_n$ seien entsprechend „Apfel“, „Birne“ usw., kurz alle bekannten Fruchtarten, und der Terminus „Frucht“ (b) sei noch nicht eingeführt. Wenn wir außer der bereits beschriebenen Verallgemeinerung auch noch sagen wollen, daß nur $a_1, \ldots, a_n$ Früchte sind, erhalten wir eine Definition des Terminus „Frucht“ mit folgender Struktur: $ta \rightleftharpoons_{Def} t(a_1 \vee \ldots \vee a_n)$.

Aus der Definition des Terminus „Definition“ folgen einige Theoreme, die man in der traditionellen Logik als Forderungen an eine Definition stellte (als Definitionsregeln aufstellte). Wir nennen nur das wichtigste: In einer Definition $ta \rightleftharpoons_{Def} tb$ kommt in b weder der Terminus a noch ein mit Hilfe des Terminus a definierter Terminus c vor, da ja a vor dem Akzeptieren der Definition kein Terminus war, während b nur bekannte Termini und logische Operatoren enthalten darf (Zirkelfreiheitsprinzip). Dieses Prinzip gilt in analoger Form auch für Definitionen, die Variablen enthalten.

Es gibt Definitionen, die folgende Form haben: $tA \rightleftharpoons_{Def} tB$, wo A und B Aussagen sind, d. h., bei diesen Definitionen wird eine ganze Aussage als bedeutungsgleich mit einer anderen eingeführt. Solche Definitionen betrachten wir im weiteren anhand von konkreten Beispielen und schreiben sie in der Form: $A \equiv_{Def} B$.

Es sei noch auf die Unterscheidung von Nominal- und sogenannten Realdefinitionen hingewiesen. Nach der traditionellen Auffassung, die auch heute manchmal noch vertreten wird, werden mit Hilfe von Nominaldefinitionen neue Termini eingeführt, während die sogenannten Realdefinitionen die Gegenstände selbst oder gar das Wesen der Gegenstände definieren sollen. Hier liegt eine Verwechslung verschiedener logischer Formen vor. Bei den sprachlichen Gebilden, die in diesem Sinne als Realdefinitionen angesehen werden, handelt es sich offensichtlich um Aussagen, die bestimmte Gegenstände charakterisieren. Und die Bedeutung aller in diesen Aussagen vorkommenden Termini muß vor der Formulierung dieser Aussage bekannt sein. Es handelt sich hier also offenbar nicht um Definitionen. Unter dem Gesichtspunkt der modernen Logik läßt sich der traditionellen Unterscheidung von Nominal- und Realdefinitionen aber folgender vernünftige neue Sinn geben. Alle Definitionen sind Nominaldefinitionen, d. h., mit Hilfe jeder Definition wird ein neuer Terminus eingeführt, der vor dem Akzeptieren dieser Definition kein Terminus war. Angenommen, es sei eine Definition $a \rightleftharpoons_{Def} b$ getroffen. Aus einer solchen Definition folgt - selbst wenn sie den logischen Normen gemäß korrekt gebildet ist - im allgemeinen nicht die Behauptung „a existiert“. Insbesondere folgt dies nicht, wenn man es mit empirischen und nicht mit abstrakten Gegenständen zu tun hat. Man kann nun eine Nominaldefinition und die entsprechende begründete Existenzbehauptung als *Realdefini-*

tion bezeichnen. Die Untersuchung von Realdefinitionen in diesem Sinn übersteigt dann aber die Kompetenz der Logik, da die entsprechenden Existenzbehauptungen mit außerlogischen Mitteln nachgewiesen werden müssen.

Da in philosophischen und wissenschaftlichen Texten die verwendeten Termini meist nicht durch präzise Definitionen eingeführt werden, haben für die logische Bearbeitung einer Terminologie die Analyse und die Explikation von Termini eine wichtige Funktion.

14.12 Analyse und Explikation von Termini

Unter der *Analyse* eines Terminus (Begriffsanalyse) versteht man die faktische Feststellung, in welchen verschiedenen Bedeutungen ein Wort verwendet wird. Bekanntlich sind viele Wörter der Umgangssprache, der Wissenschaftssprache und der Sprache der Philosophie mehrdeutig, viele Prädikate werden für Subjekte verschiedenen Typs unterschiedlich verwendet usw. Insofern bildet eine Analyse des faktischen Gebrauchs von Termini eine wichtige Voraussetzung für ihre weitere logische Bearbeitung.

Unter einer *Explikation* von Termini versteht man folgende Operation. Durch eine Analyse sei der faktische Gebrauch eines Terminus a festgestellt. Dieser Gebrauch von a sei aber für bestimmte Zwecke in der Wissenschaft oder Philosophie zu unbestimmt. Für diese Zwecke legt man dann durch Regeln den Gebrauch eines neuen Terminus a' fest, der in mancher Hinsicht dem Gebrauch von a ähnlich ist, sich aber in anderer Hinsicht von diesem unterscheidet. Den Terminus a nennt man dabei *Explikans* und den Terminus a' *Explikandum*. Es ist offensichtlich, daß auf Grund des Charakters einer Explikation Explikans und Explikandum nicht bedeutungsgleich sind. Weiter ist offensichtlich, daß verschiedene Explikationen ein und desselben Terminus möglich sind. Am Ende einer Explikation steht meist die Definition eines neuen Terminus. Das Explikandum kann aber auch durch die Operationen der Verallgemeinerung, der Einschränkung u. a. eingeführt werden.

14.13 Definition von Prädikaten

Prädikate besitzen eine Besonderheit. Um auf irgendeine Weise anzugeben, welches Merkmal ein gegebenes Prädikat ausdrückt, müssen Gegenstände a aufgewiesen werden, die dieses Merkmal besitzen. Merkmale sind immer Merkmale von Gegenständen und existieren nicht gesondert und unabhängig von diesen. Um beispielsweise das durch das Wort „rot“ ausgedrückte Merkmal aufzuweisen, muß man Gegenstände mit einer roten Farbe zeigen. Wenn also ein Prädikat P durch eine Definition in den Gebrauch eingeführt werden soll, so muß man nicht P für sich, sondern Termini vom Typ $a \downarrow P$, $\downarrow (a \leftarrow P)$, $\downarrow A$ usw. definieren.

Prädikate werden für eine mehr oder weniger umfassende Menge von Subjekten definiert und nicht immer für beliebige Subjekte. Nehmen wir das Prädikat „ehrlich“. Es ist für Menschen (und eventuell für Haustiere) definiert, während es für Opern, Integrale, Metalle usw. nicht definiert ist. Der Ausdruck „ehrliches Kupfer“ ist also kein Terminus, da seine Bedeutung nicht definiert ist.

Betrachten wir weiter das Wort „einfach“. Es ist als Prädikat für Aussagen definiert, der Ausdruck „einfache Aussage“ ist also ein Terminus. Dasselbe Wort wird aber auch zusammen mit anderen Subjekten gebraucht, und falls es möglich ist, die entsprechenden Ausdrücke zu definieren, so erhält man ganz andere Definitionen. So wird dieses Wort als Bestandteil des Terminus „einfacher Mensch“ anders definiert als in den Termini „einfache Aussage“, „einfacher Terminus“, „einfache Geschichte“, „einfache Mahlzeit“ usw. Allgemein kann ein und dasselbe

Prädikat in Abhängigkeit davon verschieden definiert werden, mit welchen Subjekten es in zusammengesetzten Termini verknüpft wird.

Angenommen, man habe die Definitionen $a \downarrow P \rightleftharpoons_{Def} c$, und $b \downarrow P \rightleftharpoons_{Def} d$, wo P definiert wird. P wird für a und b verschieden definiert. Das bedeutet aber nicht, daß $\sim(P \rightleftharpoons P)$, sondern nur: wenn $\sim(a \rightleftharpoons b)$, so $\sim(a \downarrow P \rightleftharpoons b \downarrow P)$.

Ein Ignorieren der betrachteten Eigenschaften von Prädikaten führt mitunter zu ernsthaften Schwierigkeiten und Verwirrungen. Insbesondere hängen die endlosen philosophischen Streite über die Wahrheit damit zusammen, daß das Wort „wahr" nicht als Prädikat, sondern als Subjekt betrachtet wird, und dabei wird nicht berücksichtigt, daß es nur für einige angegebene Subjekte und für verschiedene Subjekte verschieden definiert wird. Den Terminus „wahr" für Aussagen definieren bedeutet, die Ausdrücke t (tA ist wahr) zu definieren, wobei A eine Formel ist. In Abhängigkeit von den Unterschieden im Aufbau von A erhält man dabei verschiedene Definitionen (für das Prädikat „wahr" schreiben wir v):

$t(tA \leftarrow v) \rightleftharpoons_{Def} tA$, wenn A eine einfache Aussage ist.
$t(t(A \wedge B) \leftarrow v) \rightleftharpoons_{Def} t((tA \leftarrow v) \wedge (tB \leftarrow v))$
$t(t(A \vee B) \leftarrow v) \rightleftharpoons_{Def} t((tA \leftarrow v) \vee (tB \leftarrow v))$
$t(t(\sim A) \leftarrow v) \rightleftharpoons_{Def} t(\sim(tA \leftarrow v))$.

Solche Definitionen sind ein wichtiger Bestandteil der logischen Semantik. Diese Definitionen des Prädikates „wahr" für Aussagen legen natürlich nicht die Bedeutung dieses Prädikates in Wendungen wie „wahrer Mensch", „wahre Liebe", „wahre Religion" oder „wahres Kunstwerk" fest.

In der nichttraditionellen Prädikationstheorie gelten im allgemeinen folgende Beziehungen nicht:

$P(x) \equiv Q(x) \vdash \neg P(x) \equiv \neg Q(x)$
$\neg P(x) \equiv \neg Q(x) \vdash P(x) \equiv Q(x)$.

Deshalb muß bei der Definition von Prädikaten im allgemeinen nicht nur das Zusprechen eines Prädikates, sondern auch das Absprechen definiert werden.

Beim oben definierten Wahrheitsprädikat fallen innere und äußere Negation zusammen, deshalb konnten wir uns mit der Definition des Zusprechens begnügen.

Betrachten wir als weiteres Beispiel das Prädikat „existieren". Das Existenzprädikat wird in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. Neben der empirischen oder realen Existenz drückt es auch abstrakte, logische, mathematische, mythische, poetische, religiöse usw. Existenz aus. Grundlegend ist dabei die empirische Existenz. Alle anderen Verwendungsweisen des Existenzprädikates beruhen in dieser oder jener Weise allein auf sprachlichen Regeln, die für bestimmte Zwecke auf Grund menschlicher Entscheidungen aufgestellt und akzeptiert werden. Diese Existenz auf Grund akzeptierter Sprachregeln läßt sich letztlich auch auf empirische Existenz zurückführen, da die betreffenden Sprachregeln explizit oder implizit in der empirischen Sprachpraxis gegeben sind.

Wenden wir uns nun der empirischen Existenz zu. Da „existieren" ein Prädikat ist, muß man auch alle Konsequenzen beachten, die sich aus dieser Tatsache ergeben. Deshalb kann man beispielsweise nicht sinnvoll fragen „Was ist Existenz?" und auch keine Definition der Form „Existenz ist ..." erwarten. Vielmehr muß die Bedeutung des Prädikates E für Subjekttermini verschiedenen Typs unterschiedlich bestimmt werden. Wir haben hier eine ähnliche Situation wie seinerzeit bei der Wahrheitsproblematik. Auch hier versuchte man die Frage „Was ist Wahrheit?" zu beantworten, ohne zu beachten, daß „wahr" ein Prädikat ist. Die Wahrheitsproblematik konnte in der logischen Semantik vor allem von A. Tarski durch eine induktive Definition des Prädikates „wahr" befriedigend gelöst werden. Eine analoge Definition benötigen wir auch für das Prädikat „existiert". Ein entscheidender Unterschied zwischen der Wahrheits- und der Existenzproblematik besteht darin, daß sich das Prädikat „wahr" allein mit logischen Mitteln definieren läßt, während das beim Existenzprädikat nicht möglich ist.

Die mit den jeweiligen Subjekttermini bezeichneten Gegenstände existieren oder existieren nicht zu einer bestimmten Zeit, an einem bestimmten Ort, d. h. mit irgendwelchen Koordinaten. Bei der Betrachtung des Prädikates E setzen wir voraus, daß alle in einem Ausdruck vorkommenden Aussagen die gleichen Koordinaten haben, schreiben sie aber der Einfachheit halber nicht.

Für das Existenzprädikat E hatten wir als logisches Axiom die Formel $\sim\neg E(a)$ gesetzt, da keine Aussage der Form $\neg E(a)$ wahr ist. Deshalb können wir uns auch bei der Definition des Existenzprädikates auf den Fall des Zusprechens beschränken.

Wie bereits gesagt, kann das Prädikat E nicht allein im Rahmen der Logik bestimmt werden. Für einfache Verwendungsfälle wird der Terminus E nicht definiert, sondern nur dessen Bedeutung erläutert. Bei diesen Verwendungsfällen handelt es sich um Aussagen der Form $E(a)$ und $\sim E(a)$, in denen a ein einfacher singulärer Subjektterminus ist. Dann soll a ein empirisches Individuum bezeichnen, und die Frage, ob ein solches Individuum existiert oder nicht, wird letztlich mit Hilfe des menschlichen Wahrnehmungsapparates durch unmittelbare Beobachtung oder durch Beobachtung seiner Spuren, Wirkungen usw. entschieden. Für einfache generelle Subjekttermini a wird definiert „a existiert genau dann, wenn wenigstens ein Individuum existiert, das a genannt wird": $E(a) \equiv_{Def} \exists b((b \rightharpoonup a) \wedge E(b))$, wobei b ein singulärer Subjektterminus ist.

Für Subjekttermini der Form $a \downarrow A$, in denen a in A vorkommt, wird E wie folgt definiert:

$$E(a \downarrow A) \equiv_{Def} \exists a(E(a) \wedge A).$$

Für zusammengesetzte Subjekttermini der Form $\sim a$, $(a_1, \ldots, a_n)$, $(a_1, \wedge \ldots \wedge, a_n)$ und $(a_1, \vee \ldots \vee, a_n)$ definieren wir das Prädikat E folgendermaßen:

$$E(\sim a) \equiv_{Def} E(g) \downarrow \sim S(g, ta),$$
$$E(a_1, \ldots a_n) \equiv_{Def} E(a_1) \wedge \ldots \wedge E(a_n),$$
$$E(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \equiv_{Def} E(g) \downarrow (S(g, ta_1) \wedge \ldots \wedge S(g, ta_n)),$$
$$E(a_1 \vee \ldots \vee a_n) \equiv_{Def} E(g) \downarrow (S(g, ta_1) \vee \ldots \vee S(g, ta_n)).$$

Analoge Definitionen lassen sich für andere zusammengesetzte Subjekttermini angeben.

Wenn X eine Aussage, ein Prädikatterminus, ein Relationsterminus, kurz gesagt kein Subjektterminus ist, so ist die Frage, ob X existiert, sinnlos, da die möglichen Antworten $E(X)$ und $\sim E(X)$ gemäß den Regeln der Syntax gar keine Aussagen sind. Um hier sinnvoll die Existenzfrage stellen zu können, müssen aus X zunächst Subjekttermini gebildet werden. Dazu haben wir zwei Möglichkeiten. Zum einen können wir den Subjektterminus tX (entsprechend gelesen als „die Aussage X", „der Prädikatterminus X", „der Relationsterminus X" usw.) und zum anderen den Terminus sX (entsprechend gelesen als „ein (der) Sachverhalt, daß X", „ein mit X bezeichnetes Merkmal", „eine mit X bezeichnete Relation" usw.) bilden. Für Termini der Form tX ist das Existenzproblem trivial, da $E(tX)$ gilt, wenn X entsprechend eine Aussage, ein Prädikatterminus, ein Relationsterminus usw. ist.

Wir definieren jetzt das Prädikat E für singuläre Subjekttermini der Form sA, wo A eine empirische Aussage ist:

$$E(sA) \equiv_{Def} A.$$

Für generelle Termini der Form sA wird E wie für alle anderen generellen Subjekttermini definiert.

Wenn P ein Prädikatterminus ist, so definieren wir E für Subjekttermini der Form sP folgendermaßen:

$$E(sP) \equiv_{Def} \exists a(E(a) \land P(a)).$$

Wenn R ein n-stelliger Relationsterminus ist, so definieren wir E für Termini der Form sR wie folgt:

$$E(sR) \equiv_{Def} \exists a_1 \ldots \exists a_n(E(a_1) \land \ldots \land E(a_n) \land R(a_1, \ldots, a_n)).$$

Das Definitionssystem läßt sich für solche empirischen Gegenstände wie Anhäufungen, Veränderungen, Entwicklungen, Strukturen und Zusammenhänge erweitern. Auch für die Existenz von Raum und Zeit lassen sich im Rahmen dieses Definitionssystems exakte Definitionen angeben.

Übungen:

1. Die Individuenvariablen x, y mögen als Wertbereich die Menge der Menschen haben. Wir wählen folgende Bezeichnungen:
   $M(x)$: x ist männlichen Geschlechts,
   $F(x)$: x ist weiblichen Geschlechts,
   $J(x, y)$: x ist jünger als y,
   $I(x, y)$: x ist identisch mit y,
   $K(x, y)$: x ist ein Kind von y,
   $G(x, y)$: x ist ein Gatte von y.
   Definieren Sie folgende Prädikate mit Hilfe der angegebenen:
   1. x ist älter als y;
   2. x ist mit y gleichaltrig;
   3. x ist Mutter von y;
   4. x ist Vater von y;
   5. x ist Großmutter väterlicherseits von y;
   6. x und y sind Brüder;
   7. x und y sind Schwestern;
   8. x und y sind Geschwister;
   9. x ist Junggeselle;
   10. x ist ein uneheliches Kind;
   11. x ist ein Cousin von y;
   12. x ist ein Neffe von y!

2. F. Engels beschreibt (in: Werke, Bd. 22) einen Fall von Gruppenehe:
   „Der Giljak nennt Vater nicht bloß seinen leiblichen Vater, sondern auch alle Brüder seines Vaters; die Frauen dieser Brüder ebenso wie die Schwestern seiner Mutter nennt er allesamt seine Mütter; die Kinder all dieser ‚Väter' und ‚Mütter' nennt er seine Brüder und Schwestern.
   Jeder Giljak hat Gattenanrecht auf die Frauen seiner Brüder und auf die Schwestern seiner Frauen."
   Definieren Sie die Verwandtschaftsworte der Giljaks mit Hilfe unserer üblichen!
   Lassen sich unsere Verwandtschaftsbegriffe mit Hilfe von denen der Giljaks definieren?

14.14 Definition der Identität und der Verschiedenheit

Definition der **Identität**:
D1. $i_1 = i_2 \equiv_{Def} S(i_1, ti_2)$.

Definition der **Verschiedenheit**:
D2. $\neg(i_1 = i_2) \equiv_{Def} E(i_1) \wedge E(i_2) \wedge \sim(i_1 = i_2)$.

Für die Identität setzen wir folgendes Axiom:
A1. $\vdash i_1 = i_2 \supset ti_1 \rightleftharpoons ti_2$.
Die Umkehrung von *A1* gilt nicht.

Aus *A1* und dem Ersetzbarkeitsprinzip für bedeutungsgleiche Termini (*EPB*) erhalten wir das Ersetzbarkeitsprinzip für Identitäten (*EPI*):

$$\frac{\begin{matrix} i_1 = i_2 \\ A \end{matrix}}{A[i_1/i_2]}$$

Beim Beweis der folgenden Theoreme verwenden wir neben den Regeln der Aussagenlogik (*AL*), der nichttraditionellen Prädikationstheorie (*NTP*) und der Quantorenlogik (*QL*) die folgenden Axiome für das Prädikat S aus diesem Kapitel (*SL*):

S1. $\vdash E(a) \supset S(a, ta)$
S2. $\vdash S(ta, tta)$
S3. $E(a) \wedge \sim S(a, tb) \vdash \neg S(a, tb)$
S4. $\sim S(ta, tb) \vdash \neg S(ta, tb)$
S5. $\vdash S(a, tb) \wedge S(b, tc) \supset S(a, tc)$
S6. $\vdash S(i_1, ti_2) \supset S(i_2, ti_1)$.

Außerdem benutzen wir folgende Axiome der Existenzlogik (*EL*):
E1. $\vdash \sim\neg E(i)$
E2. $\vdash P(i) \vee \neg P(i) \supset E(i)$
E3. $\vdash P(i) \wedge \neg P(i) \supset \sim E(i)$.

Einige Theoreme:

T1. $\vdash E(i) \equiv S(i, ti)$ (*E2*, *S1*)
T2. $\vdash P(i) \vee \neg P(i) \supset S(i, ti)$ (*E2*, *T1*)
T3. $\vdash \sim S(i, ti) \supset \forall P ?P(i)$ (*T2*, *QL*)
T4. $\vdash i_1 = i_2 \equiv S(i_1, ti_2)$ (*D1*)
T5. $\vdash i_1 = i_2 \equiv S(i_2, ti_1)$ (*T4*, *S6*)
T6. $\vdash \sim\neg S(i_1, ti_2) \supset \sim E(i_1) \vee S(i_1, ti_2)$ (*S3*, *AL*)
T7. $\vdash \sim\neg S(ti_1, ti_2) \supset S(ti_1, ti_2)$ (*S4*, *AL*)
T8. $\vdash P(i) \vee \neg P(i) \supset i = i$ (*D1*, *T1*, *T2*, *S1*)
Die Umkehrung von *T8* gilt nicht.

T9. $\vdash \sim(i = i) \supset ?P(i)$ (*T8*, *AL*)
T10. $\vdash E(i) \equiv i = i$ (*D1*, *T1*)
T11. $\vdash i_1 = i_2 \supset i_2 = i_1$ (*T4*, *T5*)
T12. $\vdash i_1 = i_2 \wedge i_2 = i_3 \supset i_1 = i_3$ (*D1*, *S5*, *EPI*)
T13. $\vdash i_1 = i_2 \supset (P(i_1) \equiv P(i_2))$ (*EPI*)
T14. $\vdash i_1 = i_2 \supset (\neg P(i_1) \equiv \neg P(i_2))$ (*EPI*)

T15. $\vdash i_1 = i_2 \supset (?P(i_1) \equiv ?P(i_2))$ (*EPI*)

T16. $\vdash i_1 = i_2 \supset (P(i_1) \equiv P(i_2)) \wedge (\neg P(i_1) \equiv \neg P(i_2)) \wedge (?P(i_1) \equiv ?P(i_2))$ (*EPI*)

Die Umkehrungen von *T13-T16* gelten nicht.

T17. $\vdash \sim(i_1 = i_2) \equiv \sim S(i_1, ti_2) \vee \sim S(i_1, ti_1)$ (*D1*, *AL*)

T18. $\vdash \neg(i_1 = i_2) \equiv \neg(i_2 = i_1)$ (*D2*, *T11*)

T19. $\vdash \neg(i = i) \supset E(i)$ (*D2*)

T20. $\vdash \sim(i_1 = i_2) \supset \sim(i_2 = i_1)$ (*T11*, *AL*)

T21. $\vdash \sim E(i) \supset \sim\neg(i = i)$ (*T19*, *AL*)

T22. $\vdash i_1 = i_2 \supset E(i_1)$ (*D1*, *T1*)

T23. $\vdash i_1 = i_2 \supset E(i_2)$ (*D1*, *T1*, *T11*)

T24. $\vdash i_1 = i_2 \supset S(i_1, ti_2)$ (*D1*)

T25. $\vdash i_1 = i_2 \supset S(i_1, ti_1)$ (*D1*)

T26. $\vdash i_1 = i_2 \supset S(i_2, ti_1)$ (*D1*, *T11*)

In den weiteren Theoremen benutzen wir die im Abschnitt 4 des elften Kapitels eingeführten Termini und Symbole (*D1* 4.11.-*D4* 4.11.)

T27. $\vdash i_1 = i_2 \supset \neg(i_1 \parallel i_2)$

1. $i_1 = i_2$ (A. d. B.)
2. $S(i_1, ti_2)$ (1., *D1*)
3. $S(i_1, ti_1)$ (1., *D1*)
4. $E(i_1)$ (1., *S1*)
5. $E(i_2)$ (1., 4., *SPI*)
6. $\forall P(P(i_1) \equiv P(i_1))$ (*QL*)
7. $\forall P(P(i_1) \equiv P(i_2))$ (6., 1., *SPI*)
8. $\sim E(i_1) \vee \sim E(i_2) \vee \forall P(P(i_1) \equiv P(i_2))$ (7., *AL*)
9. $\sim(i_1 \parallel i_2)$ (8., *T3* 4.11)
10. $E(i_1) \wedge E(i_2) \wedge \sim(i_1 \parallel i_2)$ (4., 5., 9.)
11. $\neg(i_1 \parallel i_2)$ (10., *T12* 4.11)

T28. $\vdash i_1 = i_2 \supset \neg(i_1 \mid i_2)$ (*D1*, *QL*, *T23* 4.11, *T28* 4.11)

T29. $\vdash i_1 = i_2 \supset \sim(i_1 \parallel i_2)$ (*T27*, *NTP*)

T30. $\vdash i_1 = i_2 \supset \sim(i_1 \mid i_2)$ (*T28*, *NTP*)

T31. $\vdash \neg(i_1 \parallel i_2) \supset i_1 = i_2$

1. $\neg(i_1 \parallel i_2)$ (A. d. B.)
2. $E(i_1)$ (1., *T12* 4.11)
3. $E(i_2)$ (1., *T12* 4.11)
4. $\sim(i_1 \parallel i_2)$ (1., *T12* 4.11)
5. $\sim E(i_1) \vee \sim E(i_2) \vee \forall P(P(i_1) \equiv P(i_2))$ (4., *T3* 4.11)
6. $\forall P(P(i_1) \equiv P(i_2))$ (5., 2., 3., *AL*)
7. $P(i_1) \equiv P(i_2)$ (6., *B*$\forall$)
8. $S(i_1, ti_1)$ (2., *S1*)
9. $S(i_2, ti_1)$ (7., 8., *QL*)
10. $S(i_1, ti_2)$ (9., *S6*)
11. $S(i_1, ti_2) \wedge S(i_1, ti_1)$ (8., 10)
12. $i_1 = i_2$ (11, *D1*)

T32. $\vdash i_1 = i_2 \equiv \neg(i_1 \parallel i_2)$ (*T27*, *T31*)
(Identität des streng Ununterscheidbaren)

T33. $\vdash \neg(i_1 = i_2) \supset i_1 \parallel i_2$

1. $\neg(i_1 = i_2)$ (A. d. B.)
2. $E(i_1)$ (1., *D2*)
3. $E(i_2)$ (1., *D2*)
4. $\sim(i_1 = i_2)$ (1., *D2*)
5. $i_1 = i_1$ (2., *T10*)
6. $\exists P(P(i_1) \wedge \sim P(i_2) \vee \sim P(i_1) \wedge P(i_2))$ (4., 5., *QL*)
7. $E(i_1) \wedge E(i_2) \wedge \exists P(P(i_1) \wedge \sim P(i_2) \vee \sim P(i_1) \wedge P(i_2))$ (2., 3., 6.)
8. $i_1 \parallel i_2$ (7., *T1* 4.11)

T34. $\vdash \neg(i_1 = i_2) \supset E(i_1)$ (*D2*)
T35. $\vdash \neg(i_1 = i_2) \supset E(i_2)$ (*D2*)
T36. $\vdash \neg(i_1 = i_2) \supset \neg S(i_1, ti_2)$ (*T33*, *T35*, *S3*)
T37. $\vdash \neg(i_1 = i_2) \supset \neg S(i_2, ti_1)$ (*T36*, *D1*, *D2*, *S4*)
T38. $\vdash ?(i_1 \mid i_2) \supset \sim E(i_1) \vee \sim E(i_2)$ (*T29* 4.11, *NTP*)
T39. $\vdash ?(i_1 \parallel i_2) \supset \sim E(i_1) \vee \sim E(i_2)$ (*T13* 4.11, *NTP*)
T40. $\vdash ?(i_1 = i_2) \supset \sim E(i_1) \vee \sim E(i_2)$ (*D2*, *NTP*)
T41. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset (i_1 \mid i_2) \vee \neg(i_1 \mid i_2)$ (*T38*)
T42. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset (i_1 \parallel i_2) \vee \neg(i_1 \parallel i_2)$ (*T39*)
T43. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset (i_1 = i_2) \vee \neg(i_1 = i_2)$ (*T40*)
T44. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset \sim ?(i_1 \mid i_2)$ (*T41*)
T45. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset \sim ?(i_1 \parallel i_2)$ (*T42*)
T46. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset \sim ?(i_1 = i_2)$ (*T43*)
T47. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset (\sim(i_1 \mid i_2) \equiv \neg(i_1 \mid i_2))$ (*T44*, *NTP*)
T48. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset (\sim(i_1 \parallel i_2) \equiv \neg(i_1 \parallel i_2))$ (*T45*, *NTP*)
T49. $\vdash E(i_1) \wedge E(i_2) \supset (\sim(i_1 = i_2) \equiv \neg(i_1 = i_2))$ (*D2*, *NTP*)
T50. $P(i) \supset (i = i)$ (*T10*, *E2*)
T51. $\neg P(i) \supset (i = i)$ (*T10*, *E2*)
T52. $\sim\neg(i = i)$ (*D2*, *T10*)

14.15 Sinn von Termini

Wir haben ganz bewußt die Frage nach dem Sinn der Termini bis zum Ende dieses Kapitels aufgehoben, weil wir zeigen wollten, daß man in der Terminitheorie ganz ohne den Ausdruck „Sinn“ auskommen kann, der viele endlose und unfruchtbare Diskussionen hervorgerufen hat. Trotzdem sehen wir es als nützlich an, diesen Ausdruck zu betrachten, da das Problem der Unterscheidung von Sinn und Bedeutung der Termini doch auf diese oder jene Weise die Aufmerksamkeit auf sich zieht und weil diese Unterscheidung vielleicht sogar nützlich sein kann (unter der Bedingung von ausreichend strengen Definitionen).

Die Unterscheidung von Bedeutung und Sinn der Termini ist nur für zusammengesetzte Termini angebracht, da einfache Termini gewissermaßen Elementarteilchen der Sprache sind, die nicht weiter in Teile zerlegbar sind.

Ähnlich wie es in bezug auf die Termini „Bedeutung“, „Wahrheit“, „Falschheit“ usw. sinnlos ist, die Frage zu stellen „Was ist Bedeutung?“, „Was ist Wahrheit?“ usw., da diese Termini

Prädikate und keine Subjekte sind, ist es auch sinnlos, die Frage zu stellen „Was ist der Sinn von Termini?“. Hier ist es sogar sinnlos, die Frage zu stellen, was der Sinn eines Terminus als Merkmal eines Terminus ist, denn er ist (wie auch die Bedeutung) nichts, was man bei einer Beobachtung der Termini als solcher entdecken könnte, sondern eher eine Fähigkeit (eine Eigenschaft) desjenigen, der Termini verwendet (der es mit ihnen in dieser oder jener Weise zu tun hat). Deshalb müssen wir hier an die Definition etwas ungewöhnlich herangehen.

D1. Wir nehmen an, daß einem Wissenschaftler (d. h. demjenigen, der es mit Termini zu tun hat, der Termini verwendet) der Sinn eines einfachen Terminus bekannt ist genau dann, wenn ihm die Bedeutung dieses Terminus bekannt ist. Wir nehmen weiter an, daß einem Wissenschaftler der Sinn eines zusammengesetzten Terminus bekannt ist genau dann, wenn ihm die Bedeutung aller in ihm vorkommenden Termini und die Eigenschaften aller in ihm vorkommenden logischen Operatoren bekannt sind.

Sind uns z. B. die Bedeutung der Termini „Zahl“ und „ohne Rest durch 2 teilbar“ sowie die Eigenschaften des Operators „welche“ bekannt, so ist uns der Sinn des Terminus „Zahl, welche ohne Rest durch 2 teilbar ist“ bekannt.

Weiter setzen wir folgendes Axiom:

A1. Wenn einem Wissenschaftler der Sinn eines Terminus bekannt ist, so ist ihm seine Bedeutung bekannt.

Dieses Axiom ist nicht überflüssig. Es gestattet uns, die Feststellung des Sinnes eines Terminus als eines der Verfahren zur Feststellung seiner Bedeutung zu betrachten. Nehmen wir z. B. den Terminus „Quadrat, welches rund ist“. Sind uns die Bedeutungen der Termini „Quadrat“ und „rund“ sowie die Eigenschaften des Operators „welches“ bekannt, so ist uns auch der Sinn dieses Terminus bekannt. Auf Grund des Axioms *A1* kennen wir jetzt die Bedeutung dieses Terminus: Er soll runde Quadrate bezeichnen. Die Bedeutung dieses Terminus kann man auf keinerlei andere Weise feststellen, denn solche Gegenstände existieren den Definitionen der betreffenden Termini gemäß nicht.

Die Umkehrung von *A1* kann man aus folgendem Grund nicht akzeptieren. Angenommen, es sei ein zusammengesetzter Terminus a gegeben, der aus den Termini b und c sowie dem Operator α besteht. Wir können dann die Bedeutung von a kennen, ohne die Bedeutung von b oder c (oder von beiden) zu kennen. In diesem Fall kennen wir aber nicht den Sinn von a, wenn wir ihn als zusammengesetzten Terminus nehmen. Wenn wir hingegen mit a als einfachen Terminus operieren, so ist uns sein Sinn gemäß *D1* bekannt.

Die Sinngleichheit der Termini a und b schreiben wir mit einem Symbol der Form $a \rightleftarrows b$.

Wir setzen folgende Axiome:

A2. Wenn a und b einfache Termini sind, so $\vdash (a \rightleftharpoons b) \to (a \rightleftarrows b)$ (d. h., bedeutungsgleiche Termini sind auch sinngleich).

A3. $\vdash (a \rightleftarrows b) \to (c \rightleftarrows d)$, wobei der Terminus d aus dem Terminus c durch Ersetzen von null oder mehr (nicht unbedingt aller) Vorkommen von a in c durch b gebildet wird.

D2. Zwei Termini sind nur auf Grund von *A2* und *A3* sinngleich.

A4. $\vdash (a \rightleftarrows b) \wedge (b \rightleftarrows c) \to (a \rightleftarrows c)$

A5. $\vdash (a \rightleftarrows b) \to (a \rightleftharpoons b)$ (d. h., sinngleiche Termini sind auch bedeutungsgleich).

Die Umkehrung von *A5* gilt nicht. Beispielsweise sind die Termini „Rhombus“ und „gleichseitiges Viereck“ bedeutungsgleich, aber nicht sinngleich, wenn der zweite als zusammengesetzter Terminus betrachtet wird.

Die Frage, ob man diesen oder jenen Terminus als einfachen oder als zusammengesetzten betrachtet, spielt eine wichtige Rolle, weil die logische Gliederung der Sprache nicht immer (in der Regel nicht) mit der linguistischen zusammenfällt. Betrachten wir etwa die Ausdrücke „Abendstern“ und „Morgenstern“. Man kann sie als zusammengesetzte Termini ansehen, die aus den Termini „Stern“, „Morgen“ und „Abend“ gebildet sind. Wenn die Termini „Morgen“ und „Abend“ bedeutungsverschieden sind, so sind die betrachteten Ausdrücke ihrem Sinn nach verschieden. Man kann diese Termini aber auch als verschiedene Bezeichnungen ein und desselben Gegenstandes ansehen, d. h. als einfache Termini, die bedeutungsgleich sind. Dann sind sie auch sinngleich. Im ersten und zweiten Fall werden diese Ausdrücke verschieden verwendet, d. h., sie sind verschiedene sprachliche Gebilde. Schließlich treffen wir folgende Definition und setzen folgende Axiome für Aussagen.

D3. Der Sinn einer Aussage ist einem Wissenschaftler bekannt genau dann, wenn ihm die Bedeutung aller in der Aussage vorkommenden Termini und die Eigenschaften aller in dieser Aussage vorkommenden logischen Operatoren bekannt sind.

A6. $\vdash (A \rightleftharpoons B) \rightarrow (C \rightleftharpoons D)$, wobei die Aussage D aus der Aussage C durch Ersetzen von null oder mehr (nicht unbedingt aller) Vorkommen eines Terminus (oder einer Aussage) A in C durch den Terminus (oder entsprechend auch die Aussage) B gebildet ist.

A7. $\vdash (A \rightleftharpoons B) \wedge (B \rightleftharpoons C) \rightarrow (A \rightleftharpoons C)$, wobei A, B und C Aussagen sind.

14.16 Eine Neufassung des Begriffs der Existenzbelastung

Der Grundgedanke unserer Neufassung des Begriffs der Existenzbelastung besteht darin, präzise zu sagen, in bezug auf welche Individuenvariablen und Individuenkonstanten eine Formel existentiell belastet ist. Anstelle der Symbole e und n verwenden wir deshalb die Symbole $ei_1 \ldots i_n$ und $ni_1 \ldots i_n$ $(n \geq 1)$, wobei $i_1, \ldots, i_n$ paarweise verschiedene Individuenvariablen oder Individuenkonstanten sind. Da wir es im weiteren auch mit Aussagenvariablen und Formelvariablen zu tun haben, bei denen nicht feststeht, welche Individuenvariablen und Individuenkonstanten in ihnen vorkommen können, führen wir $v, v_1, \ldots, v_n$ als Variablen für Folgen von paarweise verschiedenen Individuenvariablen und Individuenkonstanten ein.

Wir definieren jetzt den Terminus *elementare existentielle Charakteristik*.

D1. Elementare existentielle Charakteristik (eECh):
$ei_1 \ldots i_n$ und $ni_1 \ldots i_n$ sind elementare existentielle Charakteristika, wobei $i_1, \ldots, i_n$ $(n \geq 1)$ Individuenkonstanten, Individuenvariablen oder Variablen für Folgen von Individuenkonstanten und Individuenvariablen sind. Der Satz „Eine Formel A hat die Charakteristik $ei_1 \ldots i_n$“ bedeutet „Wenn die Formel A wahr ist, so ist sie bezüglich $i_1, \ldots, i_n$ existentiell belastet“. Der Satz „Eine Formel A hat die Charakteristik $ni_1 \ldots i_n$“ bedeutet „Wenn die Formel A wahr ist, so ist sie bezüglich $i_1, \ldots, i_n$ nicht existentiell belastet“.

Um die existentielle Belastung von zusammengesetzten Formeln präzise formulieren zu können, führen wir zwei terminibildende Operatoren ein, die aus zwei Prädikattermini einen zusammengesetzten Prädikatterminus bilden.

1) $f \bigtriangleup g$ - „jedes von f und g“ oder „f und g“
2) $f \bigtriangledown g$ - „mindestens eines von f und g“ oder „f oder g“.

Einige Eigenschaften dieser beiden Operatoren geben wir später an.

D2. Existentielle Charakteristik (ECh):

1. Elementare existentielle Charakteristika sind ECh.
2. Wenn α und β ECh sind, so auch $(\alpha \bigtriangleup \beta)$ und $(\alpha \bigtriangledown \beta)$.

$(\alpha \bigtriangleup \beta)(tA)$ bedeutet „Die Formel A hat jedes von α und β“ oder „Die Formel A hat α und β“.
$(\alpha \bigtriangledown \beta)(tA)$ bedeutet „Die Formel A hat mindestens eines von α und β“ oder „Die Formel A hat α oder β“.

Wir definieren nun eine Strichoperation für ECh.

D3. Wenn α eine ECh ist, so ist α' die ECh, die man aus α erhält, indem man simultan n durch e, e durch n, $\bigtriangleup$ durch $\bigtriangledown$ und $\bigtriangledown$ durch $\bigtriangleup$ ersetzt.
$\alpha' = \alpha\,\{n/e, e/n, \bigtriangleup/\bigtriangledown, \bigtriangledown/\bigtriangleup\}$

Wir geben nun Regeln an, nach denen beliebigen Formeln der klassischen Quantorentheorie mit nichttraditioneller Prädikationstheorie ECh zugeschrieben werden.

R0. In jeder Formel werden die gebundenen Individuenvariablen so umbenannt, daß erstens keine Individuenvariable in der Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommt und zweitens daß keine Individuenvariable in den Wirkungsbereichen verschiedener gleichnamiger Quantoren gebunden vorkommt.

R1.1. Prädikatformeln $P(i_1, \ldots, i_n)$ und $\neg P(i_1, \ldots, i_n)$, wobei $i_1, \ldots, i_n$ Individuenvariablen oder Individuenkonstanten sind, erhalten die ECh $ei_1 \ldots i_m$, wobei die $i_1, \ldots, i_m$ aus $i_1, \ldots, i_n$ dadurch gewonnen werden, daß mehrfache Vorkommen von Individuenvariablen oder Individuenkonstanten gestrichen werden.

R1.2. Aussagenvariablen erhalten die ECh ev und nv, wobei verschiedene Aussagenvariablen verschiedene ev_i und nv_i erhalten.

R1.3. Formelvariablen in Formelschemata werden wie Aussagenvariablen behandelt.

Bei der Formulierung der weiteren Regeln schreiben wir anstelle von „A hat die ECh α“ einfach „$A = \alpha$“.

R2. Wenn $A = \alpha$, so $\sim A = \alpha'$.

R3. Wenn $A = \alpha$ und $B = \beta$, so $A \wedge B = \alpha \bigtriangleup \beta$.

R4. Wenn $A = \alpha$ und $B = \beta$, so $A \vee B = \alpha \bigtriangledown \beta$.

R5. Wenn $A = \alpha$ und $B = \beta$, so $A \supset B = \alpha' \bigtriangledown \beta$.

R6. Wenn $A = \alpha$ und $B = \beta$, so $A \equiv B = (\alpha' \bigtriangledown \beta) \bigtriangleup (\alpha \bigtriangledown \beta')$.

R7. Wenn $A = \alpha$, so $\forall i A = \alpha$ und $\exists i A = \alpha$.

Die Regel *R6* könnte auch wie folgt formuliert werden:

R6′. Wenn $A = \alpha$ und $B = \beta$, so $A \equiv B = (\alpha' \bigtriangleup \beta') \bigtriangledown (\alpha \bigtriangledown \beta)$.

Einige Eigenschaften der terminibildenden Operatoren $'$, $\bigtriangleup$ und $\bigtriangledown$:

T1. $\alpha'' \rightleftharpoons \alpha$

T2. $\alpha \bigtriangleup \alpha \rightleftharpoons \alpha$

T3. $\alpha \bigtriangledown \alpha \rightleftharpoons \alpha$

T4. $\alpha \bigtriangleup \beta \rightleftharpoons \beta \bigtriangleup \alpha$

T5. $\alpha \bigtriangledown \beta \rightleftharpoons \beta \bigtriangledown \alpha$

T6. $\alpha \bigtriangleup (\beta \bigtriangleup \gamma) \rightleftharpoons (\alpha \bigtriangleup \beta) \bigtriangleup \gamma$

T7. $\alpha \bigtriangledown (\beta \bigtriangledown \gamma) \rightleftharpoons (\alpha \bigtriangledown \beta) \bigtriangledown \gamma$

T8. $(\alpha \bigtriangledown \beta)' \rightleftharpoons \alpha' \bigtriangleup \beta'$

T9. $(\alpha \bigtriangleup \beta)' \rightleftharpoons \alpha' \bigtriangledown \beta'$

T10. $(\alpha \bigtriangledown \beta) \bigtriangleup \gamma \rightleftharpoons (\alpha \bigtriangleup \gamma) \bigtriangledown (\beta \bigtriangleup \gamma)$

T11. $(\alpha \bigtriangleup \beta) \bigtriangledown \gamma \rightleftharpoons (\alpha \bigtriangledown \gamma) \bigtriangleup (\beta \bigtriangledown \gamma)$

T12. $(\alpha \bigtriangledown \beta) \bigtriangleup (\gamma \bigtriangledown \delta) \rightleftharpoons (\alpha \bigtriangleup \gamma) \bigtriangledown (\alpha \bigtriangleup \delta) \bigtriangledown (\beta \bigtriangleup \gamma) \bigtriangledown (\beta \bigtriangleup \delta)$

T13. $(\alpha \bigtriangleup \beta) \bigtriangledown (\gamma \bigtriangleup \delta) \rightleftharpoons (\alpha \bigtriangledown \gamma) \bigtriangleup (\alpha \bigtriangledown \delta) \bigtriangleup (\beta \bigtriangledown \gamma) \bigtriangleup (\beta \bigtriangledown \delta)$
T14. $\alpha \rightleftharpoons \alpha \bigtriangleup (\beta \bigtriangledown \beta')$
T15. $\alpha \rightleftharpoons \alpha \bigtriangledown (\beta \bigtriangleup \beta')$.

D4. **Existentielle Charakteristik in adjunktiver Termnormalform** nennen wir eine existentielle Charakteristik der Form $\alpha_1 \bigtriangledown \alpha_2 \bigtriangledown \ldots \bigtriangledown \alpha_n$ $(n \geq 1)$, wobei alle α_i die Form $\beta_1 \bigtriangleup \beta_2 \bigtriangleup \ldots \bigtriangleup \beta_m$ $(m \geq 1)$ haben und alle β_i $(i = 1, \ldots, m)$ elementare existentielle Charakteristika sind.

MT1. Jede existentielle Charakteristik läßt sich in eine ihr bedeutungsgleiche existentielle Charakteristik in adjunktiver Termnormalform umformen.

Beweis: Induktiv mit Hilfe von *T1 - T15.*

Aus *MT1* folgt:

MT2. Für jede Formel der klassischen Quantorentheorie mit nichttraditioneller Prädikationstheorie läßt sich ihre existentielle Charakteristik in adjunktiver Termnormalform angeben.

D5. Eine Formel der klassischen Quantorentheorie mit nichttraditioneller Prädikationstheorie ist existentiell nicht belastet genau dann, wenn ihre existentielle Charakteristik in adjunktiver Termnormalform $\alpha_1 \bigtriangledown \alpha_2 \bigtriangledown \ldots \bigtriangledown \alpha_n$ mindestens ein α_i der Form $\beta_1 \bigtriangleup \beta_2 \bigtriangleup \ldots \bigtriangleup \beta_m$ $(m \geq 1)$ enthält, in dem alle elementaren existentiellen Charakteristika $\beta_1, \ldots, \beta_m$ n-Charakteristika sind.

MT3. Alle Theoreme (Tautologien) der klassischen Quantorentheorie mit nichttraditioneller Prädikationstheorie sind existentiell nicht belastet.

Beweis: Wir betrachten folgendes vollständige Axiomensystem der klassischen Quantorentheorie mit nichttraditioneller Prädikationstheorie:

A1. $A \supset (B \supset A)$
A2. $A \supset (B \supset C) \supset (A \supset B \supset (A \supset C))$
A3. $\sim A \supset \sim B \supset (B \supset A)$
A4. $f(a) \supset \sim\neg f(a)$, wobei f eine n-stellige Prädikatenvariable ist und a eine Gruppe von n Individuenvariablen oder Individuenkonstanten.
A5. $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall iB)$, wobei i nicht frei in A vorkommt.
A6. $\forall iA \supset A\{i/j\}$, wobei i frei für j in A ist.

R1. Aus A und $A \supset B$ erhält man B.
R2. Wenn $\vdash A$, so $\vdash \forall iA$.

Für den aussagenlogischen Teil dieses Systems ergibt sich aus der Theorie der ausgezeichneten Normalformen, daß alle Theoreme (Tautologien) nicht existentiell belastet sind, denn die ausgezeichnete adjunktive Normalform einer Tautologie enthält alle möglichen elementaren Konjunktionen und damit immer eine mit nur n-Charakteristika.

Für *A4* ergibt sich nach unseren Regeln die ECh na. Für *A5* und *A6* läßt sich leicht in einem indirekten Beweis zeigen, daß sie keine ev-Charakteristik haben können. Wenn die Voraussetzungen der Schlußregeln eine nv-Charakteristik haben, so auch die Folgerungen.

15. Kapitel
Modale Prädikate

15.1 Modalitäten

Unter *Modalitäten im engeren Sinne* (oder *alethischen Modalitäten*) versteht man die Wörter „möglich“, „notwendig“, „unmöglich“, „zufällig“, „nicht zufällig“, „wirklich“ und von ihnen abgeleitete Wörter. Dabei unterscheidet man zwischen den *logischen* und *faktischen* (*ontologischen, empirischen, physischen, mellontischen, kausalen* usw.) *alethischen Modalitäten.* Als *Modalitäten im weiteren Sinne* sieht man außer den bereits angeführten noch die Wörter „beweisbar“, „widerlegbar“, „unentscheidbar“, „entscheidbar“, „verifizierbar“, „falsifizierbar“, „überprüfbar“, „unüberprüfbar“ (*epistemische Modalitäten*) sowie die Wörter „geboten“, („obligatorisch“), „verboten“ und „erlaubt“ (*deontische Modalitäten*) an. Manchmal nennt man auch etwas willkürlich Wertungsprädikate wie „gut“, „schlecht“, „besser“, „gleichwertig“, „schlechter“ *axiologische Modalitäten* und Zeittermini wie „immer“, „manchmal“, „niemals“, „früher“, „später“, „gleichzeitig“ *zeitliche Modalitäten* (Ivin 1973, Iwin 1967).

Wir betrachten hier die alethischen, epistemischen, logischen und deontischen Modalitäten. Bei den sogenannten axiologischen und zeitlichen Modalitäten handelt es sich unseres Erachtens nicht um Modalitäten, da die betreffenden Termini auf ganz andere Art in den Sprachgebrauch eingeführt werden als die übrigen Modalitäten (Iwin 1975, Wessel 1976).

Die verschiedenen in der modernen Logik untersuchten Modalitäten lassen sich übersichtlich folgendermaßen darstellen:

alethische Modalitäten		deontische Modalitäten
faktische alethische Modalitäten	logische alethische Modalitäten	
faktisch notwendig faktisch zufällig faktisch unmöglich	logisch notwendig logisch zufällig logisch unmöglich	geboten (obligatorisch) freigestellt (normativ indifferent) verboten
faktisch möglich	logisch möglich	erlaubt

epistemische Modalitäten			
epistemische Wissensmodalitäten			epistemische Überzeugungsmodalitäten
theoretische epistemische Modalitäten	logische epistemische Modalitäten	empirische epistemische Modalitäten	
beweisbar unentscheidbar widerlegbar	logisch beweisbar logisch unentscheidbar logisch widerlegbar	verifizierbar unüberprüfbar falsifizierbar	akzeptiert (geglaubt) bezweifelt verworfen
verträglich	logisch verträglich		zulässig

Wir geben auch noch einen schematischen Überblick über die sogenannten axiologischen und zeitlichen Modalitäten, obwohl es sich bei ihnen unseres Erachtens nicht um Modalitäten handelt:

axiologische Modalitäten		zeitliche Modalitäten	
absolute	relative	absolute	relative
gut axiologisch indifferent schlecht	besser gleichwertig schlechter	immer nur manchmal niemals	früher gleichzeitig später
		(manchmal)	

Zuweilen spricht man auch noch von sogenannten *existentiellen Modalitäten* (v. Wright 1951):

existentielle Modalitäten
universal existiert leer

Unseres Erachtens handelt es sich auch bei diesen Termini nicht um Modalitäten.

Modale Termini werden in den empirischen Wissenschaften und in der Philosophie häufig verwendet. Aussagen, die modale Termini enthalten, nennen wir *modale Aussagen*. Wir führen einige Beispiele für modale Ausagen an: „Es ist möglich, daß ich dich morgen besuche“; „Alle Mutationen sind zufällig“; „Die Oktoberrevolution vollzog sich mit historischer Notwendigkeit“; „Dieser Verkehrsunfall war nicht notwendig“; „Die gleichzeitige Existenz eines Sachverhaltes und des ihm entgegengesetzten Sachverhaltes ist unmöglich“; „Eine gerade Zahl ist notwendigerweise durch 2 teilbar“.

Viele faktisch verwendete modale Aussagen lassen sich durch bedeutungsgleiche Aussagen ohne Modalitäten ersetzen. Insbesondere gilt dies für viele mathematische Aussagen, in denen alethische Modalitäten vorkommen. Unser letzter Beispielsatz etwa besagt nur, daß jede gerade Zahl durch 2 teilbar ist, bzw. daß sich aus der Definition einer geraden Zahl ergibt, daß sie durch 2 teilbar ist. Da die alethischen Modalitäten in der Mathematik überflüssig sind, wurde die Untersuchung ihrer logischen Eigenschaften bei der Herausbildung der modernen mathematischen Logik zunächst vernachlässigt. Typisch in dieser Hinsicht ist etwa die Auffassung G. Freges, der in seiner „Begriffsschrift“ schreibt: „Das apodiktische Urteil unterscheidet sich vom assertorischen dadurch, daß das Bestehen allgemeiner Urteile angedeutet wird, aus denen der Satz geschlossen werden kann, während bei den assertorischen eine solche Andeutung fehlt. Wenn ich einen Satz als notwendig bezeichne, so gebe ich dadurch einen Wink über meine Urteilsgründe. Da aber hierdurch der begriffliche Inhalt des Urteils nicht berührt wird, so hat die Form des apodiktischen Urteils für uns keine Bedeutung.
Wenn ein Satz als möglich hingestellt wird, so enthält sich der Sprechende entweder des Urteils, indem er andeutet, daß ihm keine Gesetze bekannt seien, aus denen die Verneinung folgen würde; oder er sagt, daß die Verneinung des Satzes in ihrer Allgemeinheit falsch ist. Im letzteren Falle haben wir ein partikulär bejahendes Urteil nach der gewöhnlichen Bezeichnung. ‚Es ist möglich, daß die Erde einmal mit einem anderen Weltkörper zusammenstößt‘ ist ein Beispiel für den ersten und ‚eine Erkältung kann den Tod zur Folge haben‘ ist eins für den zweiten Fall.“ (Berka/Kreiser 1971, S. 54 f.)

15.2 Zur Situation in der Modallogik

C. I. Lewis (Lewis/Langford 1959) versuchte, mit Hilfe von modalen Logiken das Problem der logischen Folgebeziehung befriedigend zu lösen. Wenn ihm dies auch nicht gelungen ist, so weckten seine Arbeiten doch das Interesse vieler Logiker an den Modalitäten. Heute gibt es eine

Vielfalt von konkurrierenden Systemen der modalen Logik (vgl. Feys 1965, Hughes/Cresswell 1978, Chellas 1980, Ruzsa 1981). Von Einigkeit kann überhaupt keine Rede sein. Meist werden die Eigenschaften und Wechselbeziehungen der Modalitäten axiomatisch beschrieben, ohne daß gesagt würde, was die Modalitäten eigentlich bedeuten sollen. Wir wissen dann etwa: Wenn etwas notwendig ist, so ist es auch möglich und nicht zufällig. Was die Worte „notwendig", „möglich" und „zufällig" aber bedeuten, das wissen wir nicht. Es wurden auch Semantiken für modallogische Systeme ausgearbeitet und die Vollständigkeit gewisser Modalkalküle bezüglich dieser Interpretation bewiesen (Kripke 1959, Schütte 1963), doch zu einer Klärung dessen, was die Modalitäten eigentlich bedeuten, konnte damit nicht beigetragen werden. Dem Wesen nach handelt es sich bei diesen semantischen Interpretationen und den Vollständigkeitsbeweisen um nichts anderes als um eine Übersetzung der zunächst rein syntaktisch gegebenen Modalkalküle in die Sprache der Mengenlehre und um den schließlichen Nachweis der Korrektheit dieser Übersetzung.

Für den Einzelwissenschaftler bietet sich in der gegenwärtigen Modallogik folgendes Bild. In seiner Wissenschaft verwendet er modale Termini, vor allem faktische Modalitäten. In den meisten Modallogiken werden hingegen die logischen Eigenschaften faktischer Modalitäten überhaupt nicht betrachtet, man begnügt sich mit den logischen Modalitäten. Doch auch in bezug auf die logischen Modalitäten wird dem Einzelwissenschaftler keine Hilfe geleistet, da er über keine Kriterien verfügt, nach denen er aus der Vielfalt der modallogischen Systeme ein für seine Ziele passendes auswählen könnte. Der Hauptmangel aller dieser Systeme besteht darin, daß keine explizite Definition der modalen Termini gegeben wird. Wir behandeln in diesem Kapitel nicht die verschiedenen Systeme der Modallogik, sondern beschäftigen uns mit einer Explikation modaler Termini. Eine sehr gute Einführung in den heutigen Entwicklungsstand der modalen Logik und eine Darstellung der wichtigsten Systeme der modalen Logik findet der Leser in (Hughes/Cresswell 1978).

15.3 Deutungsversuche faktischer Modalitäten und ihre Mängel

R. Carnap schlägt folgende Definition faktischer Modalitäten vor: Eine Aussage ist faktisch notwendig (in seiner Terminologie: kausal wahr) genau dann, wenn sie logisch aus der Klasse aller Grundgesetze folgt. Grundgesetze definiert er dabei als Behauptungen, die die logische Form von Gesetzesaussagen haben und wahr sind (Carnap 1966). Diese Auffassung der faktischen Modalitäten unterscheidet sich von der H. Reichenbachs (Reichenbach 1954) nur dadurch, daß dieser an die Grundgesetze (ursprüngliche nomologische Sätze) die strengere Forderung stellt, ihre Wahrheit müsse feststellbar sein. Eine ähnliche Auffassung vertreten andere Autoren (Ivin 1973, Serebrjannikov 1974). Aus der Literatur ist auch bekannt, daß die Verwendung modaler Aussagen vor allem für Prognosen (Aussagen über zukünftige Ereignisse) von Bedeutung ist. Aussagen über zukünftige Ereignisse kann man nicht unmittelbar durch Beobachtung überprüfen. Man kann nicht ohne weiteres feststellen, ob sie wahr sind oder nicht, da die Ereignisse, von denen die Rede ist, noch nicht existieren. Prognosen stellt man auf, indem man aus unserem gegenwärtigen Wissen auf das Auftreten oder Nichtauftreten zukünftiger Ereignisse schließt.

Es sei A eine beliebige empirische Aussage und s der terminibildende Operator „der Sachverhalt, daß ...", der aus einer Aussage einen Sachverhaltsterminus bildet. Man sagt dann, ein zukünftiges Ereignis sA ist notwendig, wenn aus dem gegenwärtigen Wissen A logisch folgt, und ein zukünftiges Ereignis sA ist unmöglich, wenn aus dem gegenwärtigen Wissen $\sim A$ logisch folgt. Legen wir die Carnapsche Auffassung der faktischen Modalitäten zugrunde, so kommen wir zu dem Ergebnis, daß kein individuelles Ereignis notwendig ist, ganz gleich, ob es sich um ein gegenwärtiges, zukünftiges oder vergangenes Ereignis handelt. Gesetze haben nach dieser

Auffassung die logische Form einer formalen Implikation (obwohl nicht alle wahren formalen Implikationen Gesetze darstellen) $(\forall x)(P(x) \supset Q(x))$. Als Folgerungen allein aus Formeln dieser Form erhalten wir niemals Formeln der Form $Q(a)$, wo a eine Individuenkonstante ist, d. h. keine Aussagen über individuelle empirische Ereignisse. Die Carnapsche Auffassung der faktischen Modalitäten bricht zu stark mit dem im Alltag und in der Wissenschaft üblichen Sprachgebrauch und kann deshalb nicht akzeptiert werden.

Eine andere Deutung der Modalitäten schlägt P. Lorenzen vor (Lorenzen 1955, 1987, Lorenzen/Schwemmer 1973). Zur Erläuterung seiner Auffassung der Modalitäten stellen wir uns folgende Situation vor. Eine bestimmte Menschengruppe hat ein bestimmtes System von Aussagen W als wahr akzeptiert. Von diesen Menschen werden dann auch alle Aussagen als wahr anerkannt, die logisch aus den Aussagen von W folgen. Für eine modalfreie Aussage A läßt sich der Terminus „notwendig bezüglich W“ wie folgt einführen: Eine Aussage A ist notwendig bezüglich W genau dann, wenn A logisch aus den Aussagen von W folgt. Wennn wir für „notwendig bezüglich W“ das Symbol N_w benutzen, können wir diese Definition wie folgt schreiben: $N_wA \equiv_{Def} (W \vdash A)$.

Die anderen Modalitäten werden wie üblich definiert. Während Lorenzen in seinen inhaltlichen Ausgangsüberlegungen den Gebrauch von Modalitäten nur für Zukunftsaussagen als sinnvoll betrachtet, ergibt sich aus seiner Definition aber, daß alles, was wir wissen, bezüglich dieses Wissens notwendig ist. Wenn wir wissen, daß eine Erbsenschote fünf Erbsen und daß sie Eiweiß enthält, so sind nach der Auffassung von Lorenzen beide Aussagen notwendig, während man nach dem üblichen Sprachgebrauch nur die zweite als notwendig ansehen würde. War Carnaps Auffassung der Modalitäten zu eng, so ist die von Lorenzen offenbar zu weit. Außerdem führt sie zu der „fatalistischen“ Konsequenz: Alles, was wir wissen, ist notwendig. Um solche Konsequenzen zu vermeiden, schlagen wir eine andere Deutung der faktischen Modalitäten vor. Doch zunächst wollen wir uns die logische Struktur einfacher modaler Aussagen verdeutlichen.

15.4 Die logische Struktur einfacher modaler Aussagen

Schon ein flüchtiger Blick in die Literatur zur modalen Logik genügt, um die unterschiedlichen Verwendungsweisen der Modalitäten zu verdeutlichen. Die Modalitäten werden als Operatoren, als Prädikattermini und als Subjekttermini (z. B. „die Möglichkeit“) verwendet. Werden sie als Operatoren verwendet, werden wiederum verschiedenartige Argumente dieser Operatoren zugelassen. Bei den einen Autoren treten als Argumente modaler Operatoren Aussagen auf, bei anderen Termini. Ist das letztere der Fall, so werden wiederum entweder beliebige Termini oder aber nur bestimmte Arten von Termini (z. B. Sachverhaltstermini) als Argumente zugelassen. Die gleiche Vielfalt haben wir bei einer Verwendung der Modalitäten als Prädikate. Eine Aufgabe der Logik besteht darin, in dieses Durcheinander Ordnung zu bringen, zu versuchen, möglichst viele dieser unterschiedlichen Verwendungsweisen der Modalitäten methodisch zu rechtfertigen und andere als unkorrekt nachzuweisen und zu verwerfen. Wir beschränken uns hier auf eine Verwendung der Modalitäten als Prädikate.

Betrachten wir zunächst die (faktischen und logischen) alethischen Modalitäten. Die alethischen Modalitäten N, M usw. sind Prädikate, und als Subjekte in modalen Aussagen mit diesen Prädikaten können nur Sachverhaltstermini auftreten. Wenn A eine Aussage ist, so erhalten wir mit Hilfe des terminibildenden Operators s („der Sachverhalt, daß ...“) Subjekttermini der Form sA („der Sachverhalt, daß A“). Wenn Q ein beliebiges alethisches modales Prädikat ist, so haben einfache modale Aussagen folgende Form: $Q(sA)$.

In der Umgangssprache und in den Wissenschaftssprachen werden zwar auch strukturell einfache Sachverhaltstermini wie „Autounfall“, „Zusammenstoß“, „Niederlage“, „Geburt“, „Tod“,

„Eheschließung", „Elfmetertor" usw. verwendet. Wenn a ein einfacher Sachverhaltsterminus ist, werden auch modale Aussagen der Form $Q(a)$ gebildet. Es ist aber leicht einzusehen, daß solche Sachverhaltstermini a nur als Abkürzung von Termini der Form sA eingeführt werden.

Einfache modale Aussagen mit den epistemischen Modalitäten „beweisbar", „widerlegbar" usw. haben eine andere logische Struktur. Die Modalitäten treten in ihnen zwar auch als Prädikate auf, sie sind aber nur auf Subjekte eines anderen Typs anwendbar. Wenn A wieder eine Aussage ist und t ein terminibildender Operator, der aus einer Aussage als Argument einen Namen dieser Aussage bildet (gewöhnlich verwendet man Anführungsstriche als Symbol für diesen Operator), so sind Termini der Form tA (gelesen als „die Aussage A") Subjekte in epistemischen modalen Aussagen. Ist Q ein beliebiges epistemisches modales Prädikat, so haben einfache modale Aussagen mit diesem Prädikat die Form $Q(tA)$.

15.5 Modalitäten und Wahrheitswerte

In der Geschichte der Philosophie und der Logik wurde dadurch große Verwirrung gestiftet, daß man die Modalitäten entweder direkt als eine Art von Wahrheitswerten betrachtete oder sie aber analog wie Wahrheitswerte behandelte. Diese Begriffsverwirrung verhinderte lange Zeit eine vernünftige Begründung der modalen Logik, und dieser Zustand ist auch gegenwärtig noch keineswegs überwunden. So führte etwa J. Łukasiewicz in seiner dreiwertigen Logik einen Wahrheitswert „möglich" ein, R. Carnap identifizierte logische Wahrheit und logische Notwendigkeit, P. Lorenzen gebraucht „möglich" und „möglicherweise wahr" synonym usw. Wahrheitswerte sind, wenn sie nicht bloß als ungedeutete technische Hilfsmittel der Logik verwendet werden, spezielle logische Prädikate, die Aussagen zu- bzw. abgesprochen werden. Wenn V ein beliebiger Wahrheitswert ist, so haben Aussagen mit diesem Prädikat folgende logische Form $V(tA)$.

Wenn v der Wahrheitswert „wahr" ist, so wird er nach folgendem Definitionsschema eingeführt: $v(tA) \equiv_{Def} A$. Hieraus ergibt sich die Bisubjunktion $v(tA) \equiv A$.

Der Unterschied zwischen alethischen Modalitäten und Wahrheitswerten ist offensichtlich, da alethische Modalitäten nur mit Subjekten der Form sA und Wahrheitswerte nur mit Subjekten der Form tA zu Aussagen verknüpft werden. Der Unterschied von Wahrheitswerten und epistemischen Modalitäten, die beide Subjekten gleicher Form zugeschrieben werden, wird deutlich, wenn wir die Schemata zur Einführung der Wahrheitswerte mit den später angegebenen Schemata zur Einführung epistemischer Modalitäten vergleichen.

15.6 Definitionsschemata zur Einführung faktischer Modalitäten

Wir verwenden folgende Symbolik: W sei ein bestimmtes Wissen, über das eine Menschengruppe verfügt. Unter Wissen verstehen wir dabei eine Aussage (eine Aussagengesamtheit, eine Konjunktion von Aussagen), über die diese Menschengruppe abrufbereit verfügt (d. h., die die Menschen dieser Gruppe im Gedächtnis gespeichert haben und auf Verlangen sagen oder schreiben können, die in Nachschlagewerken, auf Tonbändern aufgezeichnet ist usw.) und die außerdem wahr ist. Wir unterscheiden Wissen also vom vermeintlichen Wissen, vom Glauben oder von Überzeugungen, die bloß als wahr angenommen werden. Die Frage, wie man Wissen von Glauben und Überzeugungen unterscheiden kann, lassen wir hier offen, da sie für die folgende Problematik nicht wesentlich ist. Das Wissen W möge aus einem theoretischen Teil G (Verlaufsgesetze oder allgemein wissenschaftliche Gesetze, darunter logische Gesetze) und einem rein empirischen Teil R (Situationsbeschreibungen, Randbedingungen) bestehen, es möge W die Konjunktion $G \wedge R$ sein. Hierbei wird nicht vorausgesetzt, daß es ein allgemeines logisches Verfahren gibt, das es gestattet, Gesetzeswissen von rein empirischen Situationsbeschreibungen zu unterscheiden, sondern es wird nur vorausgesetzt, daß das in jedem konkreten Falle irgendwie möglich ist. Da W wahr ist, ist es insbesondere logisch widerspruchsfrei, d. h., für eine beliebige Aussage A gilt $\sim(W \vdash A \wedge \sim A)$, ebenso gelten $\sim(G \vdash A \wedge \sim A)$ und $\sim(R \vdash A \wedge \sim A)$. Für die Notwendigkeit N eines Ereignisses sA bezüglich des Wissens W wählen wir folgendes Definitionsschema:

D1. $N_w sA \equiv_{Def} (G \wedge R \rightarrow A) \wedge \sim(R \rightarrow A)$,
$\neg N_w sA \equiv_{Def} \sim(G \wedge R \rightarrow A) \vee (R \rightarrow A)$, wobei G, W und R konstante Aussagen darstellen.

Wir setzen dabei voraus, daß alle in den Definitionsschemata vorkomenden Konditionalaussagen aus Aussagen über die logische Folgebeziehung gewonnen werden. Die Definition *D1* wie auch die folgenden Definitionen der anderen Modalitäten sind so gewählt, daß für modale Prädikate innere und äußere Negation äquivalent sind. Es ist offensichtlich, daß man verschiedene Definitionsschemata der modalen Prädikate erhält, je nachdem, welche Folgebeziehung man zugrunde legt. Die Möglichkeit eines Ereignisses sA wird hier wie üblich definiert:

D2. $M_w sA \equiv_{Def} \sim N_w s{\sim}A$,
$\neg M_w sA \equiv_{Def} N_w s{\sim}A$.

Es lassen sich verschiedene Zufälligkeiten eines Ereginisses definieren. Wir betrachten die folgenden:

D3. $C^1_w sA \equiv_{Def} \sim N_w sA$,
$\neg C^1_w sA \equiv_{Def} N_w sA$,

D4. $C^2_w sA \equiv_{Def} A \wedge M_w s{\sim}A$,
$\neg C^2_w sA \equiv_{Def} \sim A \vee N_w sA$,

D5. $C^3_w sA \equiv_{Def} M_w sA \wedge M_w s{\sim}A$,
$\neg C^3_w sA \equiv_{Def} \sim M_w sA \vee N_w sA$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir im weiteren den Index w bei den Modalitäten weg. Wir setzen voraus, daß in einer Formel (oder einem Beweis) bei allen faktischen Modalitäten immer der gleiche Index w steht. Weiter schreiben wir anstelle von sA überall a.

Bei den Definitionsschemata zur Einführung der faktischen Modalitäten handelt es sich nicht um Definitionen, da sie die außerlogischen Konstanten W, G und R enthalten, die nicht näher bestimmt sind. Es ist nicht Aufgabe der Logik, diese Konstanten zu präzisieren; vielmehr wird in jedem Wissensbereich (in jeder Einzelwissenschaft) gesondert festgelegt, was als W, G und R gewählt wird. Für die Logik ist nur wichtig, welche Beziehungen bei beliebigen W, G und R gelten.

Aus den angegebenen Definitionen ergeben sich als Folgerungen u. a. folgende Theoreme:

T1. $Na \supset Ma$,

T2. $Na \supset A$,

T3. $A \supset Ma$.

Die Formeln $Ma \supset A$, $A \supset Na$, $Ma \supset Na$ sind hingegen keine Theoreme.

T4. $\sim Ma \equiv N{\sim}a$,

T5. $Na \equiv \sim C^1 a$,

T6. $\sim A \vee Na \equiv \sim C^2 a$,

T7. $N{\sim}a \vee Na \equiv \sim C^3 a$.

Eine der Aufgaben der modalen Logik besteht darin, Regeln für solche Fälle aufzustellen, in denen sich die Modalitäten auf zusammengesetzte Sachverhaltstermini beziehen. Wir setzen die klassische Logik voraus, und es gilt:

T8. $Na \equiv N{\sim}{\sim}a$,
T9. $Ma \equiv M{\sim}{\sim}a$,

analog auch für alle übrigen Modalitäten. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß bei unserer Deutung der Modalitäten gilt:

T10. $Na \wedge Nb \supset N(a \wedge b)$.

Von einigen Autoren wird auch die Umkehrung dieses Theorems $N(a \wedge b) \supset Na \wedge Nb$ akzeptiert. Diese Formel ist bei unserer Deutung der Modalitäten kein Theorem. Aus *T10* gewinnt man leicht:

T11. $M(a \vee b) \supset Ma \vee Mb$.

Die Formel $N(a \vee b) \supset Na \vee Nb$, die von einigen Autoren als Theorem der Modallogik akzeptiert, von anderen verworfen wird, ist bei unserer Deutung kein Theorem. Hieraus ergibt sich, daß die Formel $Ma \wedge Mb \supset M(a \wedge b)$ kein Theorem ist.

15.7 Definitionsschemata zur Einführung epistemischer Modalitäten

Wir unterscheiden zwischen theoretischen und empirischen epistemischen Wissensmodalitäten. Als *theoretische epistemische Modalitäten* sehen wir die Prädikate „beweisbar“, „unbeweisbar“, „widerlegbar“, „unwiderlegbar“, „entscheidbar“ und „unentscheidbar“ an, während wir die Prädikate „verifizierbar“, „nichtverifizierbar“, „falsifizierbar“, „nichtfalsifizierbar“, „überprüfbar“ und „unüberprüfbar“ als *empirische epistemische Modalitäten* bezeichnen. Als Subjekte in epistemischen modalen Aussagen treten stets Subjekte der Form tA auf.

Aus dem Schema zur Einführung faktischer Modalitäten erhalten wir ein Schema zur Einführung von theoretischen epistemischen Modalitäten, wenn W nicht in G und R unterteilt ist, d. h., mit Hilfe der theoretischen epistemischen Modalitäten wird charakterisiert, ob aus einem gegebenen Wissen W (meist in Form eines Axiomensystems angegeben) eine Aussage A beweisbar, widerlegbar usw. ist. Wir schlagen folgende Definitionsschemata vor:

D1. „tA ist beweisbar bezüglich W“: $B_w tA \equiv_{Def} (W \vdash A)$;
D2. „tA ist unbeweisbar bezüglich W“: ${\sim}B_w tA \equiv_{Def} {\sim}(W \vdash A)$;
D3. „tA ist widerlegbar bezüglich W“: $Wi_w tA \equiv_{Def} (W \vdash {\sim}A)$;
D4. „tA ist unwiderlegbar bezüglich W“: ${\sim}Wi_w tA \equiv_{Def} {\sim}(W \vdash {\sim}A)$;
D5. „tA ist unentscheidbar bezüglich W“: $U_w tA \equiv_{Def} {\sim}(W \vdash A) \wedge {\sim}(W \vdash {\sim}A)$;
D6. „tA ist entscheidbar bezüglich W“: ${\sim}U_w tA \equiv_{Def} (W \vdash A) \vee (W \vdash {\sim}A)$.

In der Logik theoretischer epistemischer Modalitäten werden wiederum die logischen Beziehungen zwischen den modalen Prädikaten untersucht, die bei beliebigem W gelten. Eine solche Logik wurde beispielsweise von P. Lorenzen (Lorenzen 1955) aufgebaut, allerdings mit dem Anspruch eines allgemeinen Modalkalküls.

Da W als wahr angenommen wird, gilt offenbar folgende Beziehung zwischen der Beweisbarkeit und der Wahrheit einer Aussage: $BtA \supset v(tA)$, während die umgekehrte Subjunktion im allgemeinen nicht gilt.

Aus dem Schema zur Einführung der faktischen Modalitäten erhalten wir ein Schema zur Einführung der empirischen epistemischen Modalitäten, wenn G leer ist. Als Wissen werden hier also nur reine Situationsbeschreibungen und logische Regeln betrachtet. Wir erhalten dann folgende Definitionsschemata:

D7. „tA ist verifizierbar bezüglich R“: $Ve_rtA \equiv_{Def} (R \vdash A)$;
D8. „tA ist nicht verifizierbar bezüglich R“: $\sim Ve_rtA \equiv_{Def} \sim(R \vdash A)$;
D9. „tA ist falsifizierbar bezüglich R“: $Fa_rtA \equiv_{Def} (R \vdash \sim A)$;
D10. „tA ist nicht falsifizierbar bezüglich R“: $\sim Fa_rtA \equiv_{Def} \sim(R \vdash \sim A)$;
D11. „tA ist überprüfbar bezüglich R“: $\ddot{U}_rtA \equiv_{Def} (R \vdash A) \vee (R \vdash \sim A)$;
D12. „tA ist unüberprüfbar bezüglich R“: $\sim \ddot{U}_rtA \equiv_{Def} \sim(R \vdash A) \wedge \sim(R \vdash \sim A)$.

Epistemische Überzeugungsmodalitäten betrachten wir hier nicht.

15.8 Definitionsschemata zur Einführung logischer Modalitäten

Aus dem Schema zur Einführung faktischer alethischer Modalitäten erhält man die logischen alethischen Modalitäten auf folgende Weise: In dem Definitionsschema für die faktische Notwendigkeit wird R gestrichen und G durch L ersetzt, wobei L die Gesetze (Theoreme, Tautologien, Regeln) der akzeptierten Logik sind, d. h., nur die Gesetze der Logik werden als Wissen, aus dem geschlossen wird, zugelassen. Wir erhalten dann zunächst folgende Definition der logischen alethischen Notwendigkeit:

D1. $N_lsA \equiv_{Def} (L \vdash A)$.

Da L jedoch als Logik akzeptiert ist, läßt sich diese Definition auch folgendermaßen schreiben:

D1′. $N_lsA \equiv_{Def} \vdash A$.

Die logische alethische Möglichkeit wird entsprechend definiert als:

D2. $M_lsA \equiv_{Def} \sim N_ls\sim A$,

oder anders geschrieben:

D2′. $M_lsA \equiv_{Def} \sim(\vdash \sim A)$.

Die logische alethische Zufälligkeit definieren wir folgendermaßen:

D3. $C_lsA \equiv_{Def} \sim N_lsA$.

Aus den Definitionen ergeben sich u. a. folgende Theoreme (anstelle von sA schreiben wir wieder a):

T1. $N_la \supset A$
T2. $\sim A \supset \sim N_la$
T3. $N_l\sim a \supset \sim M_la$
T4. $A \supset M_la$
T5. $N_la \equiv \sim C_la$.

Da beim Aufbau jeder Wissenschaft eine Logik L vorausgesetzt und akezptiert wird, gelten auf Grund der gewählten Definitionen folgende Beziehungen zwischen logischen und faktischen alethischen Modalitäten (die Indizes bei faktischen Modalitäten lassen wir wieder weg):

T6. $N_la \supset Na$ (was logisch notwendig ist, ist auch faktisch notwendig)
T7. $Ma \supset M_la$ (was faktisch möglich ist, ist auch logisch möglich)
T8. $\sim Na \supset \sim N_la$ (was faktisch nicht notwendig ist, ist auch logisch nicht notwendig)
T9. $\sim M_la \supset \sim Ma$. (was logisch unmöglich ist, ist auch faktisch unmöglich).

Die letzten vier Theoreme zeigen, daß die logischen alethischen Modalitäten Grenzen für die faktischen Modalitäten festlegen.

Von philosophischer Seite wird mitunter die Gültigkeit der Theoreme *T6-T9* bestritten. Insbesondere wird der Satz verworfen, daß etwas logisch Unmögliches auch faktisch unmöglich sei. Die philosophischen Bedenken gegen diesen Satz beruhen auf der Vermutung, daß in dieser These die Logik bestimmen würde, wie die Wirklichkeit zu sein habe. Diese Bedenken wären begründet, wenn man die logischen Modalitäten als ontologisch bedingt ansehen würde. Aus den oben angegebenen Definitionsschemata der logischen Modalitäten ist aber ersichtlich, daß dies bei unserer Auffassung nicht der Fall ist. Beispielsweise ist sA logisch unmöglich, wenn die Aussage $\sim A$ logisch wahr ist. Die logischen Modalitäten ergeben sich also allein aus sprachlichen Festsetzungen. Dies bedeutet nicht, daß die logischen Modalitäten ein für allemal gegeben sind, denn die Logik entwickelt sich wie alle anderen Wissenschaften. *T9* besagt nur: Wenn man eine Sprache und eine Logik akzeptiert, so ergeben sich allein aus dieser Tatsache einige Sätze A, für die gilt $\sim M_l sA$, und für diese Sätze gilt dann auch $\sim MsA$. *T9* behauptet nicht, daß die gewählte Sprache und ihre Logik ein für allemal feststehen.

Aus den Definitionsschemata zur Einführung theoretischer epistemischer Modalitäten erhält man Schemata für die logischen epistemischen Modalitäten, wenn man W durch L ersetzt:

D4. $B_l tA \equiv_{Def} \vdash A$;
D5. $\sim B_l tA \equiv_{Def} \sim(\vdash A)$;
D6. $Wi_l tA \equiv_{Def} (\vdash \sim A)$;
D7. $\sim Wi_l tA \equiv_{Def} \sim(\vdash \sim A)$;
D8. $U_l tA \equiv_{Def} \sim(\vdash A) \wedge \sim(\vdash \sim A)$;
D9. $\sim U_l tA \equiv_{Def} (\vdash A) \vee (\vdash \sim A)$.

Wir sehen, daß die Behauptungen der logischen Beweisbarkeit, der logischen Notwendigkeit und der logischen Wahrheit einer Aussage (bzw. der durch die Aussage beschriebenen Sachlage) einerseits, sowie die der logischen Widerlegbarkeit, der logischen Unmöglichkeit und der logischen Falschheit andererseits äquivalent sind. Trotzdem müssen diese verschiedenen Behauptungen sehr wohl unterschieden werden, in deren mangelnder Unterscheidung einer der Gründe für die fehlerhafte Deutung der Modalitäten als Wahrheitswerte liegt.

15.9 Analyse einiger Paradoxien mit Modalitäten

Um einige Schwierigkeiten in seiner Bedeutungstheorie zu lösen, unterschied G. Frege zwischen einem geraden (gewöhnlichen) und einem ungeraden Vorkommen eines Wortes in einem Satz (Frege 1962). Wir erklären an einem Beispiel diese Unterscheidung. Wenn wir in dem wahren Satz „Stendhal schrieb den Roman ‚Rot und Schwarz‘ “ den Namen „Stendhal“ durch den bedeutungsgleichen „Henry Beyle“ ersetzen, erhalten wir den Satz „Henry Beyle schrieb den Roman ‚Rot und Schwarz‘ “, der gleichfalls wahr ist. Nehmen wir hingegen die gleiche Ersetzung in dem als wahr angenommenen Satz „Lieschen Müller weiß, daß Stendhal den Roman ‚Rot und Schwarz‘ schrieb“ vor, so muß der gewonnene Satz „Lieschen Müller weiß, daß Henry Beyle den Roman ‚Rot und Schwarz‘ schrieb“ durchaus nicht wahr sein, da ja Lieschen Müller möglicherweise nicht weiß, daß Stendhal und Henry Beyle ein und dieselbe Person sind. Allgemein kann man sagen, ein Terminus a kommt in einer Aussage A gerade vor genau dann, wenn sich der Wahrheitswert der Aussage A nicht ändert, falls man in ihr den Terminus a durch einen beliebigen bedeutungsgleichen Terminus b ersetzt, und er kommt ungerade vor, wenn er vorkommt und nicht gerade vorkommt. Eben dieses Kriterium schlug Frege zur Abgrenzung zwischen geraden und ungeraden Vorkommen von Termini in Aussagen vor. Die meisten Vorkommen von Termini in Sätzen sind gerade. Ungerade Vorkommen von Termini hängen mit solchen Wendungen zusammen wie „weiß, daß“, „glaubt, daß“, „bezweifelt, daß“, „ist überrascht, daß“

und, wie wir sehen werden, auch mit modalen Termini. Kontexte, die ungerade Vorkommen von Termini enthalten, nennt man häufig auch *intensionale Kontexte*. Solche Kontexte bereiten den Logikern immer Schwierigkeiten, da für sie die Extensionalitätsregel (Ersetzbarkeitsregel), der gemäß beliebige Termini (beliebige Aussagen) durch bedeutungsgleiche in beliebigen Aussagen ohne Änderung von deren Wahrheitswert ersetzt werden können, scheinbar nur eingeschränkt gilt. Unseres Erachtens hilft die Unterscheidung von extensionalen und intensionalen Kontexten bei der Lösung der anstehen Probleme nicht weiter. Allein der Hinweis daraiuf, daß es sich um intensionale Kontexte handelt, nutzt gar nichts.

Überall, wo man in der Logik auf sogenannten Intensionen oder „inhaltliche" Fragen verweist, ist das nur ein Anzeichen dafür, daß die behandelten Probleme noch nicht auf logischer Ebene gelöst sind. Statt zu einer Lösung beizutragen, verleitet die sogenannte Intensionalität manchen Logiker sogar dazu, sich von dem jeweiligen Problem abzuwenden und für nicht zuständig zu erklären. So bezweifelt etwa W. Stegmüller überhaupt die Möglichkeit einer modalen Logik, da modale Kontexte intensionalen Charakter hätten (Stegmüller 1969). Auch G. Klaus behauptet, für die Untersuchung der Modalitäten sei die (formale) Logik nicht zuständig, sondern diese würden, wie andere sogenannte intensionale Beziehungen, den Gegenstand einer dialektischen Logik bilden (Klaus 1964). Auch solch ein Vorgehen trägt natürlich nicht zur Klärung der Modalitäten bei, denn im Rahmen der vorgeschlagenen dialektischen Logik bestünde natürlich die gleiche Problematik.

Allgemein läßt sich zu den sogenannten intensionalen Kontexten folgendes sagen: Man muß zwischen dem Vorkommen von Termini und Aussagen in sprachlichen Ausdrücken als Termini und Aussagen und als bloß physische Dinge (Laute, Linien) unterscheiden. Beispielsweise kommt die Aussage A in den Aussagen $\sim A$ und $A \wedge B$ als Aussage vor, während sie in den Ausdrücken „die Aussage A" (symbolisch tA) und „der Sachverhalt, daß A" (symbolisch sA) bloß als physisches Ding, das die Form A hat, vorkommt. Deshalb muß in jedem Bereich der Logik genau definiert werden, was als ein Vorkommen eines Terminus oder einer Aussage anzusehen ist, und es genügt nicht, ein Vorkommen eines Terminus oder einer Aussage A in einem sprachlichen Ausdruck B als graphischen Teil von B zu definieren. Dies kann nämlich manchmal zu Mißverständnissen führen. Aus der Aussage „Lieschen Müller sagt die Aussage A" und aus $A \equiv B$ folgt beispielsweise nicht „Lieschen Müller sagt die Aussage B", weil A in der ersten Aussage nicht als Aussage, sondern nur als graphischer Teil vorkommt. Die Aussage „Lieschen Müller sagt die Aussage A" hat die logische Struktur $S(a, tA)$, wobei S das zweistellige Prädikat „das erste sagt das zweite" ist, während a (Lieschen Müller) und tA (die Aussage A) die logischen Subjekte dieser Aussage sind. A kommt aber in tA nicht als Aussage, sondern nur als graphischer Teil vor. Wird dies nicht beachtet, so können Paradoxe entstehen. Dort, wo G. Frege von sogenannten ungeraden Vorkommen spricht, handelt es sich in Wirklichkeit also nicht um Vorkommen als Termini oder als Aussagen, sondern nur um Vorkommen als graphischer Teil. Das gilt sowohl für Wendungen, wie „a weiß, daß A", „a glaubt, daß A", „a bezweifelt, daß A" usw. als auch für modale Aussagen. Man kann deshalb nicht sagen, daß die Extensionalitätsregel hier nur eingeschränkt gilt, denn sie ist hier überhaupt nicht anwendbar. Nach der Extensionalitätsregel können nur Vorkommen von sprachlichen Gebilden als Termini bzw. als Aussagen durch bedeutungsgleiche ersetzt werden, jedoch nicht beliebige graphische Teile.

Das Mißverständnis einer eingeschränkten Gültigkeit der Extensionalitätsregel für sogenannte intensionale Kontexte ergibt sich aus folgendem Umstand: Für einige der in Frage stehenden zweistelligen Prädikate in sogenannten intensionalen Kontexten gelten auf Grund ihrer Definitionen logische Regeln, die der Extensionalitätsregel sehr ähnlich sind und die es, eventuell unter bestimmten zusätzlichen Bedingungen, gestatten, auch bloße Vorkommen von graphischen Teilen durch bestimmte Termini und Aussagen zu ersetzen. Die Gültigkeit solcher zusätzlicher Regeln muß für jedes der in Frage stehenden Prädikate gesondert untersucht werden, in allgemeiner Form läßt sich hier nichts Verbindliches sagen. Das wird schon deutlich, wenn wir die Wendung „a sagt die Aussage A“ untersuchen. Diese Wendung wird in zwei grundsätzlich verschiedenen Bedeutungen verwendet. Bei der einen Verwendungsart kommt es genau auf die Wort- und Buchstabenfolge dessen an, was a sagt. Offensichtlich kann A in diesem Falle durch keinerlei bedeutungsgleiche Aussagen ersetzt werden (in der Umgangssprache Verwendung der direkten Rede). Bei der anderen Verwendungsart von „a sagt die Aussage A“ kommt es nicht auf die Wortfolge von A an, sondern auf die Information, die a mit der Aussage A gibt. In diesem Falle kann für A durchaus eine bedeutungsgleiche Aussage B gesetzt werden (in der Umgangssprache entspricht dem die Wiedergabe durch indirekte Rede).

Wir wenden uns jetzt wieder den Modalitäten zu und betrachten einige von W. v. O. Quine erörterten Paradoxien, die sich bei einem unvorsichtigen Gebrauch von Modalitäten ergeben (Quine 1961). Zunächst stellen wir die Quinesche Argumentation dar und analysieren die Problematik dann unter dem Gesichtspunkt unserer Deutung der Modalitäten. Quine geht von folgenden wahren Beispielsätzen aus:

(1) Es ist notwendig, daß 9 größer als 7 ist.
(2) Es ist notwendig: Wenn es auf dem Abendstern Leben gibt, so gibt es auf dem Abendstern Leben.
(3) Es ist möglich, daß die Zahl der Planeten kleiner als 7 ist.

Weiter setzt er voraus, daß die Termini „die Zahl der Planeten“ und „9“ sowie „Abendstern“ und „Morgenstern“ jeweils bedeutungsgleich sind und daß die Ersetzbarkeitsregel für bedeutungsgleiche Ausdrücke gilt. Genauer gesagt verwendet Quine nicht die Beziehung der Bedeutungsgleichheit von Termini $\rightleftharpoons$ und die Ersetzbarkeitsregel für bedeutungsgleiche Termini, sondern die Identitätssätze „Abendstern = Morgenstern“ und „die Zahl der Planeten = 9“ und die Ersetzbarkeitsregel für Identitäten. Unsere Formulierung mit der Bedeutungsgleichheit ist allgemeiner. Unsere Argumentation gilt aber auch für Identitäten. Er unterscheidet dabei nicht zwischen einem Vorkommen als Terminus und als bloß graphischen Teil. Nimmt man in den Sätzen 1-3 die entsprechenden Ersetzungen vor, so erhält man die folgenden drei nach Quines Ansicht falschen Sätze:

(4) Es ist notwendig, daß die Zahl der Planeten größer als 7 ist.
(5) Es ist notwendig: Wenn es auf dem Abendstern Leben gibt, so gibt es auf dem Morgenstern Leben.
(6) Es ist möglich, daß 9 kleiner als 7 ist.

Quine und im Anschluß an ihn auch W. Stegmüller deuten alle in den Beispielsätzen vorkommenden Modalitäten als logische Modalitäten. Deshalb spricht Stegmüller dann auch von einer besonderen Bedeutung der Kopula „ist“ (ohne diese allerdings anzugeben) und zweifelt an der Möglichkeit einer Modallogik.

Zur logischen Analyse der Beispielsätze verwenden wir neben den bereits eingeführten folgende Abkürzungen und Symbole: $>$ für „größer als“, $<$ für „kleiner als“, a für „Abendstern“, b für „Morgenstern“, c für „Zahl der Planeten“, P für „auf ... gibt es Leben“ und $\rightleftharpoons$ für die Beziehung der Bedeutungsgleichheit von Termini. Die in den Aussagen von Quine vorkommenden Modalitäten können sowohl als alethische als auch als epistemische Modalitäten gedeutet werden. Ob es sich dabei um logische Modalitäten handelt oder nicht, lassen wir hier noch offen. Die Sätze 1-3 haben dann in unserer Symbolik folgende Form:

(1)	$Ns(9 > 7)$	(1′)	$Bt(9 > 7)$
(2)	$Ns(P(a) \rightarrow P(a))$	(2′)	$Bt(P(a) \rightarrow P(a))$
(3)	$Ms(c < 7)$	(3′)	$\sim Wit(c < 7)$.

Hieraus erschließt Quine mit Hilfe von (a) $ta \rightleftharpoons tb$ und (b) $tc \rightleftharpoons t9$ die Sätze 4-6:

(4)	$Ns(c > 7)$	(4′)	$Bt(c > 7)$
(5)	$Ns(P(a) \rightarrow P(b))$	(5′)	$Bt(P(a) \rightarrow P(b))$
(6)	$Ms(9 < 7)$	(6′)	$\sim Wit(9 < 7)$.

Sehen wir uns Quines Voraussetzungen etwas näher an. Die Sätze 1, 2, 1′ und 2′ sind unproblematisch und können akzeptiert werden. Anders sieht es mit den Vermutungen 3, 3′ sowie den Beziehungen (a) $ta \rightleftharpoons tb$ (bzw. $a = b$) und (b) $tc \rightleftharpoons t9$ (bzw. $c = 9$) aus. Wenn tc ein individueller Subjektterminus ist (ein rigid designator), so ist offensichtlich die Aussage $Ms(c < 7)$ (bzw. $\sim Wit(c < 7)$) falsch. Wenn tc ein allgemeiner Terminus ist, so ist die Aussage $Ms(c < 7)$ ($\sim Wit(c < 7)$) wahr, aber die Aussage $tc \rightleftharpoons t9$ ist falsch. Um zu 6 bzw. 6′ zu gelangen, schließt Quine auf jeden Fall aus einer falschen Prämisse.

Ähnlich verhält es sich mit dem scheinbaren Paradox der Termini „Abendstern“ und „Morgenstern“. Man kann diese Termini als logisch einfache analysieren, die bedeutungsgleich sind, d. h., es gilt dann $ta \rightleftharpoons tb$ (bzw. $a = b$). Dann enthält Quines Paradox aber nichts Paradoxes. Man kann die beiden Termini aber auch als logisch zusammengesetzt und nicht bedeutungsgleich analysieren, d. h., es gilt dann $\sim(ta \rightleftharpoons tb)$ (bzw. $\sim(a = b)$). In diesem Falle ist aber eine von Quines Voraussetzungen falsch. In Wessel 1977 und in früheren Auflagen dieses Buches hatte ich Quine dafür kritisiert, daß er bei der Konstruktion seiner Paradoxe Teile von Ausdrücken ersetzt, die nicht als Termini, sondern nur als graphische Teile vorkommen. Dieser Einwand ist berechtigt, denn die Ersetzbarkeitsregel für bedeutungsgleiche Termini lautet:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ ta \rightleftharpoons tb \end{array}}{A\,[a/b]}\,,$$

wobei das Symbol $A\,[a/b]$ einen beliebigen Ausdruck darstellt, den man aus A durch Ersetzen von null oder mehr Vorkommen von a als Terminus in A durch b erhält. In den Beispielen von Quine wird aber ein Ausdruck ersetzt, der nicht als Terminus, sondern bloß als graphischer Teil eines zusammengesetzten Terminus vorkommt. Der Einwand hat aber wenig Gewicht, da sich für modale Kontexte zusätzliche Ersetzbarkeitsregeln beweisen lassen, wenn man unsere Definitionen der Modalitäten akzeptiert. So läßt sich beispielsweise die folgende Ersetzbarkeitsregel für theoretische epistemische Modalitäten beweisen:

$$\frac{\begin{array}{c} B_w tA \\ ta \rightleftharpoons tb \end{array}}{B_w tA\,[a/b]}$$

Beweis:

1.	$B_w tA$	A. d. B.
2.	$ta \rightleftharpoons tb$	A. d. B.
3.	W	A. d. B.
4.	$W \vdash A$	(1., *Def.*)
5.	$\vdash A$	(3., 4.)
6.	$\vdash A\,[a/b]$	(2., 5.)
7.	$W \vdash A\,[a/b]$	(3., 6.)
8.	$B_w tA\,[a/b]$	(7., *Def.*)

Analog läßt sich folgende Ersetzbarkeitsregel für bedeutungsgleiche Aussagen beweisen:

$$\frac{\begin{array}{c} B_w tA \\ tB \rightleftharpoons tC \end{array}}{B_w tA\,[B/C]}\;.$$

Für faktisch alethische Modalitäten gilt die folgende Ersetzbarkeitsregel für bedeutungsgleiche Termini:

$$\frac{\begin{array}{c} N_w sA \\ ta \rightleftharpoons tb \end{array}}{N_w sA\,[a/b]}$$

Beweis:

1.	$G \wedge R$	A. d. B.
2.	$G \wedge R \rightarrow A$	A. d. B.
3.	$\sim(R \rightarrow A)$	A. d. B.
4.	$ta \rightleftharpoons tb$	A. d. B.
5.	$G \wedge R \rightarrow A\,[a/b]$	(2., 4., *ER*)
6.	$\sim(R \rightarrow A\,[a/b])$	(3., 4., *ER*)
7.	$(G \wedge R \rightarrow A\,[a/b]) \wedge (R \rightarrow A\,[a/b])$	(5., 6.)
8.	$N_w sA\,[a/b]$	(7., *Def.*)

Analog läßt sich die folgende Regel für bedeutungsgleiche Aussagen beweisen:

$$\frac{\begin{array}{c} N_w sA \\ tB \rightleftharpoons tC \end{array}}{N_w sA\,[B/C]}$$

Auch für einige andere von Quine angeführten sogenannten intensionalen Kontexte lassen sich analog zusätzliche Ersetzungsregeln formulieren und beweisen.

16. Kapitel
Wissenschaftslogik

16.1 Allgemeine Charakteristik der Wissenschaftslogik

In den letzten Jahrzehnten hat sich der Untersuchungsbereich der Logik wesentlich erweitert. Waren es bis zu Beginn unseres Jahrhunderts vor allem die Interessen der Mathematik, die die Entwicklung der Logik förderten, so wendet sich die Aufmerksamkeit der Logiker gegenwärtig immer stärker logischen Problemen der Wissenschaft überhaupt, insbesondere der empirischen Wissenschaften und der Philosophie, zu. Neben einer gewissen Modifikation der traditionellen Bereiche der Logik zeigt sich dies vor allem in der Ausarbeitung einer allgemeinen Terminitheorie, aber auch an der logischen Bearbeitung vieler spezieller Termini, die in verschiedenen empirischen Wissenschaften und in der Philosophie verwendet werden. Das Ergebnis dieser logischen Untersuchungen ist eine Reihe neuer Bereiche der Logik. So werden etwa die modalen Termini „möglich", „notwendig", „zufällig", usw. in der modalen Logik, die Wertungsprädikate „gut", „schlecht", „besser", usw. in der Wertungslogik, die Termini „früher", „später", „gleichzeitig" in der Zeitlogik, das Existenzprädikat in der existentiellen Logik und die logischen Eigenschaften der Termini „Ursache", „Wirkung" in der Logik von Kausalaussagen charakterisiert. Die Aufzählung ließe sich noch fortsetzen. Man faßt alle diese Untersuchungen unter die Sammelbezeichnung *Wissenschaftslogik* zusammen, die sich in mancher Hinsicht von den traditionellen Bereichen der mathematischen Logik (der klassischen Aussagen- und Quantorenlogik) unterscheidet. Ihre Untersuchungen führen nicht immer zum Aufbau von logischen Kalkülen, sondern manchmal nur zur Einführung einzelner Definitionen und Behauptungen, zur Präzisierung der Bedeutung bestimmter sprachlicher Ausdrücke, zur Formulierung der Anwendungsbedingungen bestimmter Kalküle usw. Wir können hier die Ergebnisse der Wissenschaftslogik nicht systematisch darstellen, sondern wählen nur einige Probleme aus, die aber den Charakter wissenschaftslogischer Untersuchungen ausreichend verdeutlichen. Ausführlichere Darstellungen finden Sie in Sinowjew/Wessel 1975, Sinowjew (Zinov'ev) 1975, 1983a, 1983b, Wessel 1972, Wessel 1977, Tavanec 1960, 1964, 1965, 1972, 1973, 1977, Scheffler 1994.

16.2 Logische Typen von Gegenständen

Termini, die Gegenstände bezeichnen, lassen sich in *Typen* einteilen, nämlich in Termini, die Individuen, die Klassen von Individuen, die Veränderungen und Entwicklungen von Gegenständen, die räumliche und zeitliche Strukturen, die funktionale Abhängigkeiten, die Kausalzusammenhänge usw. bezeichnen. Entsprechend unterscheidet man auch Typen von Gegenständen, was in der Sprache in der Verwendung von Wörtern wie „Individuum", „Klasse", „Veränderung", „Entwicklung", „Zusammenhang", „Struktur" usw. seinen Ausdruck findet. Der erwähnte Unterschied der Termini zeigt sich darin, daß sie nach verschiedenen logischen Regeln in den Gebrauch eingeführt werden und daß das Operieren mit ihnen in der Sprachpraxis nach verschiedenen logischen Regeln reguliert wird. So haben etwa die Ausdrücke „Das Individuum a ist in der Klasse b eingeschlossen" und „Ein Ereignis a ist eine Ursache eines Ereignisses b" zwar die ähnliche logische Struktur $P(a, b)$ (d. h., sie sind beide Aussagen mit einem zweistelligen Prädikat und mit zwei Subjekten), doch besitzen sie verschiedene logische Eigenschaften, die dadurch bedingt sind, daß der erste die Ausdrücke „Individuum" und „Klasse", der zweite aber die Ausdrücke „Ereignis" und „Ursache" enthält. Es gibt eine ganze Reihe von sprachlichen

Ausdrücken, die einen verschiedenen Sinn in Abhängigkeit davon haben, mit Gegenständen welchen logischen Typs man sie assoziiert. So hat etwa das Wort „existiert“ in Ausdrücken „a existiert“ einen verschiedenen Sinn in Abhängigkeit davon, ob a ein individueller oder allgemeiner Terminus, ein Terminus einer Klasse oder eines Individuums usw. ist. Im weiteren betrachten wir einige grundlegende logische Typen von Gegenständen (entsprechend von Termini) und die Bedingungen, unter denen ihnen Merkmale (entsprechend Prädikate) zugeschrieben werden, d. h. die Bedingungen ihrer Prädikation.

16.3 Individuen

Der Ausdruck „a ist ein Individuum“ ist mit dem Ausdruck „‚a‘ ist ein individueller Terminus“ sinngleich. Der Terminus „Individuum“ wird als Verallgemeinerung solcher Termini eingeführt und als Verallgemeinerung individueller Termini nach dem Schema: Wenn a ein individueller Terminis ist, so $a \rightharpoonup$„Individuum“ (d. h., a ist ein Individuum).

Jedes Individuum ist ein Gegenstand. Doch - wir wiederholen - der Terminus „Individuum“ wird als Hinweis darauf verwendet, daß ein gewisser Terminus a, mit dem zusammen dieses Wort gebraucht wird, ein individueller Terminus ist.

Individuen besitzen Eigenschaften, die sich in der Sprache der Logik fixieren lassen. So gilt: Wenn „a“ ein individueller Terminus ist (d. h., wenn a ein Individuum ist), so $P(a) \vdash \forall a P(a)$, $\exists a P(a) \vdash P(a)$. Allgemeine Termini besitzen diese Eigenschaft nicht. Empirische Individuen haben außerdem besondere Eigenschaften, die in der Definition des Ausdrucks „empirisches Individuum“ selbst berücksichtigt werden. Wenn etwa ein empirisches Individuum a zu einer bestimmten Zeit auftrat (entstand), so hat es vor dieser Zeit niemals existiert. Dabei ist dies keine ontologische Annahme, sondern ein Teil einer impliziten Definition des Ausdrucks „empirisches Individuum“ selbst, der vollkommen der intuitiven Auffassung der Individualität als Nichtwiederholbarkeit entspricht.

16.4 Klassen und Anhäufungen

Der Mengen- oder Klassenbegriff (die Termini „Menge“ und „Klasse“ verwenden wir synonym) ist einer der Grundbegriffe der klassischen Mathematik und Logik. Auch in der methodologischen und philosophischen Literatur wird der Mengengriff immer häufiger verwendet. Eingeführt und systematisch untersucht wurde dieser Begriff von G. Cantor, dem Begründer der mathematischen Mengentheorie. Er definiert eine Menge folgendermaßen: „Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen“ (Cantor 1966, S. 282).

Ähnliche Definitionen finden wir auch in modernen Büchern zur Mengenlehre und Klassenlogik. So wird etwa definiert: Das Wort ‚Menge‘ bedeutet eine Zusammenfassung bestimmter Objekte zu einem Ganzen. Als Beispiel für eine Menge wird ein Korb Äpfel angeführt. Über diese Menge ließe sich dann aussagen, daß sie schwer sei, daß die Äpfel untereinander verschieden sind, daß ihre Gesamtzahl 97 ist. In elementaren Standardwerken der Mathematik finden wir Sätze wie: Die Gesamtheit der auf einem Parkplatz abgestellten Fahrzeuge ist eine Menge. Die Gesamtheit der in einem Zimmer anwesenden Personen ist eine Menge.

Alle diese Bestimmungen von Mengen sind keine Definitionen im strengen Sinne des Wortes. Aus ihnen lassen sich keine Folgerungen ableiten, und sie entsprechen auch nicht dem praktischen Vorgehen des Mathematikers bei der Bildung von Mengen. Außerdem werden hier Mengen fälschlicherweise stets mit Anhäufungen (Gegenstandsgesamtheiten) identifiziert.

Nach der heute in der mathematischen Grundlagenforschung üblichen Auffassung sind Klassen keine konkreten, sondern abstrakte Objekte, und gebildet werden sie nicht durch Zusammenfassung, sondern durch Abstraktion aus äquivalenten einstelligen Aussagenfunktionen. Wenn für zwei Aussagefunktionen $P(s)$ und $Q(s)$ gilt: $\forall s(P(s) \equiv Q(s))$, so wird mit Hilfe der zwischen ihnen bestehenden Äquivalenzrelation bezüglich der Variablen s eine Abstraktion durchgeführt. Diese Abstraktion bedeutet, daß wir uns in unseren Aussagen über Aussagefunktionen auf solche beschränken, die für alle Aussagefunktionen, zwischen denen die genannte Äquivalenzrelation bezüglich der Variablen s besteht, in gleicher Weise gelten. Die durch diese Abstraktion gewonnenen abstrakten Objekte, die nichts anderes als eine eingeschränkte Redeweise über Aussagefunktionen darstellen, bezeichnen wir mit $\in_s P(s)$. Für diese Abstrakta gilt:

$$(\in_s P(s) = \in_s Q(s)) \equiv \forall s(P(s) \equiv Q(s)).$$

Auch endliche Mengen, die gewöhnlich durch ein Verzeichnis ihrer Elemente (durch Zusammenfassung zu einem Ganzen) angegeben werden, lassen sich als Abstrakta von Aussagefunktionen darstellen. So kann etwa die Menge $\{a, b\}$, die aus den Elementen a und b besteht, als Abstraktum der Aussagefunktion $s = a \vee s = b$ definiert werden, d. h. als $\in_s (s = a \vee s = b)$. Die Elementrelation $\in$ läßt sich für eine Klasse $K = \in_s P(s)$ definieren durch $x \in K \equiv_{Def} P(x)$.

Aus einer unerfüllbaren Aussagefunktion (z. B. $\sim(s = s)$) erhält man durch Abstraktion die leere Klasse $(\in_s \sim(s = s))$, die als abstraktes Objekt existiert, da es unerfüllbare Aussagefunktionen gibt. Aus einer allgemeingültigen Aussagefunktion (z. B. $s = s$) erhält man durch Abstraktion die universale Klasse $(\in_s (s = s))$, und auch diese existiert, da es allgemeingültige Aussagefunktionen gibt. Ist man sich auch in der mathematischen Grundlagenforschung im wesentlichen darüber einig, wie man Klassen bildet und mit ihnen operiert, so wird in der Philosophie der Mathematik ein heftiger Streit darum geführt, was Klassen (Mengen) denn nun eigentlich sind und in welchem Sinne sie existieren. Je nachdem, was unter einer Klasse verstanden wird, lassen sich verschiedene Richtungen in der Philosophie der Mathematik unterscheiden. Dem Wesen nach handelt es sich dabei um eine Fortsetzung des mittelalterlichen Universalienstreites auf moderner Ebene. So wie man im Mittelalter zwischen Realisten, Nominalisten und Konzeptualisten unterscheiden kann, so lassen sich heute die Richtungen in der Philosophie der Mathematik als Platonismus (Neorealismus), Neonominalismus und Neokonzeptualismus klassifizieren. Diese Unterscheidung ergibt sich aus der unterschiedlichen Antwort auf die Frage, ob und in welchem Sinne Klassen existieren. Die Platoniker sind der Ansicht, daß für eine beliebige korrekt formulierte Bedingung (Aussagefunktion) eine Klasse genau derjenigen Gegenstände existiert, die diese Bedingung erfüllen. Solchen Mengen wird eine selbständige Existenz neben der Existenz der Elemente der Klassen zugeschrieben. Da diese Klassenauffassung zu Antinomien führt, werden gewisse Einschränkungen des Klassenbegriffs beispielsweise in Form der Typentheorie vorgenommen. Einige konsequente Platoniker gehen dabei so weit, daß sie die Einteilung der Klassen in Typen nicht nur als ein Mittel ansehen, um die Antinomien der Mengenlehre zu vermeiden, sondern dieser Typenhierarchie eine wirkliche Existenz zuschreiben. Der Neorealismus tritt in verschiedenen gemäßigten und extremen Formen auf und ist die vorherrschende Richtung in der Philosophie der Mathematik (A. Church, K. Gödel, R. Carnap seit seinen Arbeiten zur logischen Semantik), da er die größte Freiheit beim Operieren mit Klassen gewährleistet. Philosophisch ist er allerdings nicht zu rechtfertigen. Die Nominalisten (N. Goodman, W. v. O. Quine, L. Henkin) treten gegen den Platonismus auf und nehmen an, daß die Klassen als abstrakte Objekte nicht gesondert existieren und daß Gegenstand der Mathematik nur konkrete, sinnlich wahrnehmbare Gegenstände sein können. Alles, was ist, ist eine Person oder ein Objekt, behauptete beispielsweise T. Kotarbiński. Der polnische Logiker

L. Chwistek versuchte die Widerspruchsfreiheit der Mathematik dadurch zu beweisen, daß er ihre Aussagen als Aussagen über physische Objekte interpretierte. Für die Nominalisten sind Aussagen über Klassen (und allgemein über abstrakte Objekte) nur abgekürzte Ausdrucksweisen, in denen über konkrete Objekte gesprochen wird. Auch die Klassenauffassung von P. Lorenzen kann man als gemäßigten Nominalismus ansehen. Der ebenfalls nominalistisch orientierte Logiker St. Leśniewski verwarf die Mengenlehre und baute als Konkurrenzunternehmen seine Mereologie auf, die als eine Theorie konkreter Gegenstandsgesamtheiten oder als Teil-Ganzes-Theorie aufgefaßt werden kann. In dieser Theorie gibt es beispielsweise keine leeren Gegenstandsgesamtheiten (Leśniewski 1929, Słupecki 1959).

Die Neokonzeptualisten unterscheiden zwischen Konstruktionen und Entdeckungen. Bei Klassen handelt es sich um Konstruktionen. Eine Klasse existiert genau dann, wenn man sie aus bereits konstruierten Klassen oder aus intuitiv offensichtlich existenten Klassen konstruieren kann. Es werden also keine Klassen akzeptiert, die sich nicht konstruktiv charakterisieren lassen. Hauptvertreter dieser Richtung sind die Intuitionisten und Konstruktivisten. Wir können die angegebenen philosophischen Richtungen hier nicht näher charakterisieren, sondern machen nur einige Bemerkungen, die in gewisser Hinsicht die Vertreter aller Richtungen betreffen (ausgenommen die strengen Nominalisten, die die Mengenlehre ganz verwerfen). *Erstens* ist die in den meisten philosophischen Disputen aufgeworfene Frage „Was ist eine Klasse?“ falsch gestellt, und man kann keine verbindliche Antwort darauf erwarten. Zirkelfrei läßt sich, wie wir sehen werden, das Wort „Klasse“ zunächst nur als logischer Operator in die Wissenschaftssprache einführen. Unter dieser Voraussetzung wird deutlich, daß die Frage „Was ist eine Klasse?“ genauso sinnlos ist wie die Frage „Was ist ein Nichts?“. Sinnvoll kann man nur angeben, wie die Klassentermini gebildet werden und wie man mit ihnen operiert. *Zweitens* ist die dargestellte Auffassung von Klassen als Abstraktionen aus einstelligen Aussagefunktionen zirkulär. Bei der Darstellung der klassischen Quantorenlogik hatten wir gesehen, daß diese fest vorgegebene, wenn auch beliebige Individuenbereiche (Individuenmengen, Klassen von Individuen) voraussetzt und die Unbestimmtheit für Prädikate ausschließt. Beim Aufbau der klassischen Quantorenlogik wird bei der Definition einer Aussagefunktion schon vom Klassenbegriff Gebrauch gemacht. Den mit Hilfe des Klassenbegriffs eingeführten Begriff der Aussagefunktion benutzt man dann wiederum, um den Begriff der Klasse einzuführen. *Drittens* wird aus dem Gesagten deutlich, daß der Klassenbegriff und die Klassenlogik in dieser Auffassung eigentlich überflüssig sind, da es sich bei ihnen bloß um andere Darstellungen des Begriffs der Aussagefunktion und der klassischen Quantorenlogik handelt.

Unseres Erachtens muß man zwischen einem logischen Operator „Klasse“ und einem Terminus „Klasse“ unterscheiden (Sinowjew/Wessel 1975). Der logische Operator „Klasse“, der mit dem Symbol K dargestellt wird, dient zur Bildung von ursprünglichen Klassentermini, die dabei nach folgender Terminibildungsregel aufgebaut werden: Wenn a ein Subjektterminus ist, so ist Ka ein Subjektterminus. Ka ist ein individueller Terminus, und die mit ihm bezeichneten Gegenstände sind ursprüngliche Klassen. Diese existieren, wenn wir ihre Termini bilden. Wenn wir beispielsweise den Terminus „die Klasse der Amazonen“ bilden, so existiert diese Klasse, obwohl natürlich keine Amazonen existieren und die betreffende ursprüngliche Klasse leer ist. Der Terminus „Klasse“ wird nach der folgenden Verallgemeinerungsregel für Termini ursprünglicher Klassen in den Gebrauch eingeführt. Wenn tA ein Klassenterminus ist, so ist A eine Klasse.

Eine wichtige Relation in der Klassenlogik ist die des Einschlusses eines Individuums a in eine Klasse A (symbolisch: $a \in A$). Diese Relation wird auch *Elementrelation* genannt, und a nennt man ein Element der Klasse A. Die Elementrelation ist irreflexiv, asymmetrisch und intransitiv.

Eine andere wichtige Relation der Klassenlogik ist die des Einschlusses einer Klasse in einer Klasse (Inklusionsbeziehung). Eine Klasse A ist in einer Klasse B genau dann enthalten (symbolisch: $A \subset B$), wenn jedes Element der Klasse A ein Element der Klasse B ist. Die Inklusionsbeziehung ist reflexiv, nicht symmetrisch und transitiv. Ist eine Klasse A in einer Klasse B enthalten und außerdem die Klasse B in einer Klasse A, so sind die beiden Klassen A und B identisch.

In der Klassenlogik werden meist zwei spezielle Klassen eingeführt, nämlich die Nullklasse (oder leere Klasse) und die Allklasse (oder universale Klasse). Die Nullklasse enthält kein Element und ist selbst in allen Klassen enthalten. Die Allklasse enthält alle in Frage kommenden Objekte als Elemente.

Aus gegebenen Klassentermini A und B lassen sich durch bestimmte logische Operationen andere Klassentermini bilden. Durch die Operation der Addition (oder Vereinigung) von zwei Klassen A und B erhält man die Vereinigungsklasse oder Summe dieser beiden Klassen (symbolisch: $A \cup B$), die genau diejenigen Elemente enthält, die mindestens einer der beiden Klassen A und B angehören. Durch die Operation der Multiplikation (oder des Durchschnitts) von zwei Klassen A und B erhält man die Durchschnittsklasse oder das Produkt dieser beiden Klassen (symbolisch: $A \cap B$), die genau diejenigen Elemente enthält, die beiden Klassen A und B angehören. Eine weitere Operation ist die der Komplementbildung einer Klasse. Das Komplement einer Klasse A (oder die Komplementärklasse von A, symbolisch: $\overline{A}$) enthält alle die Elemente, die nicht Element der Klasse A sind.

Wir sagten bereits, daß St. Leśniewski die Klassenlogik (Mengenlehre) verwarf und an ihre Stelle seine Mereologie als Theorie konkreter Gegenstandsgesamtheiten setzen wollte. Unseres Erachtens besteht kein Grund, die Klassenlogik zu verwerfen. Man muß nur zwischen Klassentermini und Termini von Gegenstandsgesamtheiten (Anhäufungen, Kollektionen usw.) unterscheiden und die für diese verschiedenen Terminitypen unterschiedlichen logischen Regeln aufstellen. Obwohl bereits G. Frege auf den Unterschied zwischen Mengen (Klassen) und Anhäufungen (Kollektionen) aufmerksam machte, wurde dieser Unterscheidung in der Logik ungenügend Beachtung geschenkt. Durch die Interessen der Mathematik bedingt, wurde vor allem die logische Klassentheorie (Mengenlehre) entwickelt. Zu einer logischen Theorie von Anhäufungstermini gibt es viel weniger Literatur, und ihre Ausarbeitung ist in mancher Hinsicht noch eine Sache der Zukunft. Wir wollen hier nur auf einige intuitiv offensichtliche Unterschiede zwischen Klassen und Anhäufungen aufmerksam machen. Eine Anhäufung besteht aus ihren Teilen (Elementen), und wenn keine Teile existieren, so existiert auch keine Anhäufung. Es gibt also keine leeren Anhäufungen, während die leere Klasse existiert. Eine nur aus einem Teil bestehende Anhäufung ist mit diesem Teil identisch, während es zwischen Einermengen und ihren Elementen streng zu unterscheiden gilt. In Anhäufungen besteht eine Teil-Ganzes-Beziehung, die transitiv ist. Ein Ast, der Teil eines Baumes ist, welcher wiederum Teil eines Waldes ist, ist auch Teil dieses Waldes. Die Elementrelation für Klassen ist hingegen nicht transitiv. Auf die Frage, wieviel Teile eine konkrete Anhäufung hat, ist im allgemeinen keine eindeutige Antwort möglich, während bei einer Menge die Zahl ihrer Elemente eindeutig bestimmt ist. Es ist sinnlos, nach den Raum- und Zeitkoordinaten, nach dem Gewicht, der Geschwindigkeit, nach einer Veränderung, Entwicklung usw. von Mengen oder Klassen zu fragen, während all diese Fragen für empirische Anhäufungen durchaus sinnvoll sind. Wir haben hier diese Unterschiede zwischen Mengen (Klassen) und Anhäufungen angeführt, weil diese beiden logisch grundsätzlich verschiedenen Begriffsbildungen in der logisch-philosophischen Literatur sehr oft durcheinandergeworfen werden. So sind die beiden folgenden Zitate nur verständlich, wenn man diese Begriffsverwirrung mitmacht: „In der griechischen Sagenwelt spielt der Begriff der Amazonen eine große Rolle. Kein Mensch behauptet jedoch, daß es eine Klasse von Lebewesen gibt, die diesem Begriff entspricht." (Klaus 1964, S. 171) „Die Extension eines Begriffs ist die gedankliche Widerspiegelung derjenigen Klasse von Gegenständen, deren invarianten Merkmale durch die Intension dieses Begriffs widergespiegelt werden." (Klaus 1964, S. 178)

Noch schlimmer wird die Verwirrung, wenn man etwa den Klassenbegriff in den Sozialwissenschaften oder den Artbegriff der Biologie als Klassenbegriff im logischen Sinne auffaßt. Aus dieser zuletzt genannten Verwechslung wird aber manchmal wieder vollkommen unbegründet der Schluß gezogen, für solche Begriffsbildungen sei eben die Logik nicht zuständig, da es sich ja offensichtlich nicht um logische Klassenbegriffe handelt. Dieser Schluß wäre begründet, wenn die Logik nur Regeln zur Bildung von Klassentermini zur Verfügung stellen würde. Da dies nicht der Fall ist, zeugt dieser Trugschluß von der mangelnden Kenntnis der Logik bei denjenigen, die ihn vollziehen.

Wir unterscheiden wieder wie bei Klassen zwischen einem Anhäufungsoperator Σ und dem Terminus „Anhäufung". Regeln zum Operieren mit Anhäufungstermini geben wir hier nicht an. Einige solcher Regeln werden wir später an konkreten Beispielen kennenlernen. In diesem Abschnitt kam es uns vor allem darauf an, den fundamentalen Unterschied zwischen Klassen- und Anhäufungstermini zu verdeutlichen, da seine Nichtbeachtung in der Philosophie manche Verwirrung stiftet.

16.5 Relationen

Ebenso, wie man in der logisch-methodologischen Literatur Klassen meist als Abstraktionen aus einstelligen Aussagefunktionen auffaßt, so versteht man Relationen als Abstraktionen aus zwei- und mehrstelligen Aussagefunktionen. Alle im vorigen Abschnitt bezüglich dieser Klassenauffassung geäußerten kritischen Bemerkungen beziehen sich also auch auf die eben genannte Auffassung von Relationen. Wir verstehen hier unter Relationsaussagen Aussagen mit zwei- und mehrstelligen Prädikaten folgender Art: „a ist größer als b", „a ist besser als b und c", „a befindet sich nicht zwischen b und c", „a ist wertgleich mit b" usw. Solche Aussagen stellen wir durch Symbole der Form $a\alpha Rb$ dar, wobei α das Vorhandensein oder Fehlen der inneren Negation $\neg$ oder des Unbestimmtheitszeichens ? ist, a und b Subjekttermini sind (b kann ein n-Tupel von zwei oder mehr Subjekttermini sein) und R ein Teil des Prädikates von Aussagen der eben angeführten Art ist. Während in unserer ersten Beispielaussage „a ist größer als b" das vollständige Prädikat lautet „das Erste ist größer als das Zweite", ist R in diesem Beispiel die Wendung „ist größer als".

Für unsere weitere Darstellung sind vor allem zwei Arten von Relationsaussagen wichtig, nämlich *Vergleichsaussagen* und *Ordnungsaussagen*. Wir verdeutlichen hier nur die logische Struktur solcher Aussagen, ohne ein Regelsystem zum Operieren mit ihnen anzugeben (vgl. Sinowjew/Wessel 1975). In beiden Aussagearten kommen die Relationen „untertrifft", „übertrifft" und „gleich" vor, die wir entsprechend durch $<$, $>$ und $=$ symbolisieren. Zwischen ihnen besteht ein wesentlicher Unterschied. In *Vergleichsaussagen* werden zwei Gegenstände a und b bezüglich eines bestimmten Merkmals P auf eine bestimmte Art und Weise verglichen, und im Ergebnis dieser Operation werden Aussagen folgenden Typs aufgestellt: „a übertrifft b bezüglich des Merkmals P", „a untertrifft b bezüglich des Merkmals P" und „a ist gleich b bezüglich des Merkmals P" sowie deren innere Negationen und unbestimmte Formen. Wir schreiben solche Aussagen durch Symbole der Form: $a <_P b$, $a >_P b$, $a =_P b$, $a\neg >_P b$ usw. Wir vereinbaren, daß der Index P hier sowohl das Merkmal, bezüglich dessen verglichen wird, als auch die Art und Weise, wie verglichen wird, angibt.

Mit Hilfe von *Ordnungsaussagen* wird eine Ordnung von Gegenständen, insbesondere etwa ihre gegenseitige räumliche und zeitliche Lage, angegeben. In Ordnungsaussagen wird die Ordnung von (mindestens) zwei Gegenständen a und b bezüglich eines dritten Gegenstandes c (dem Bezugspunkt der Ordnung) auf eine bestimmte Art und Weise (Verfahren zur Feststellung einer Ordnung) fixiert. Wenn wir den Bezugspunkt der Ordnung und das Verfahren zur Feststellung einer Ordnung zusammen als α symbolisieren, so lassen sich Ordnungsaussagen mit Hilfe der Relationen des Übertreffens, des Untertreffens und der Gleichheit ähnlich wie Vergleichsaussagen formulieren. Wir stellen also Ordnungsaussagen durch Symbole folgender Art dar: $a >_\alpha b$, $a <_\alpha b$, $a =_\alpha b$, $a\neg >_\alpha b$, $a? >_\alpha b$ usw. Wesentlich bei der hier dargestellten Auffassung ist, daß bei Vergleichsaussagen das Merkmal, bezüglich dessen verglichen wird, und die Art und Weise des Vergleichs und bei Ordnungsaussagen der Bezugspunkt der Ordnung und das Verfahren zur Feststellung der Ordnung in den Aussagen selber fixiert werden. Nur in dieser Form sind Vergleichs- und Ordnungsaussagen eindeutig.

16.6 Abstraktion

Der Terminus „Abstraktion“ wird in der wissenschaftlichen und philosophischen Literatur sehr häufig und in recht unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. Das Bedeutungsspektrum dieses Terminus reicht dabei vom negativen Wertungsprädikat bis zum methodologisch streng gefaßten Abstraktionsbegriff. Wir werden diese verschiedenen Verwendungsweisen hier nicht analysieren, sondern nur einige Bemerkungen zu dem in der Logik und in der mathematischen Grundlagenforschung vorherrschenden Abstraktionsbegriff machen. Die Vertreter der mathematischen Grundlagenforschung sind sich fast alle darin einig, wie die Abstraktionstechnik zu handhaben sei. Es besteht aber zwischen den Vertretern der klassischen mengentheoretisch orientierten Mathematik und denen der konstruktiven (operativen) Mathematik keine Einmütigkeit bei der philosophischen Deutung der Abstraktion. Wir wollen die beiden Standpunkte kurz charakterisieren. Beide Auffassungen der Abstraktion setzen die (traditionelle) Relationslogik voraus. Eine Relation R nennt man dabei eine *Äquivalenzrelation* (oder eine *abstrakte Gleichheit* oder eine *Relation vom Typ der Gleichheit*) genau dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. R ist reflexiv, d. h. $\forall a R(a,a)$,
2. R ist symmetrisch, d. h. $\forall a \forall b(R(a,b) \supset R(b,a))$,
3. R ist transitiv, d. h. $\forall a \forall b \forall c(R(a,b) \wedge R(b,c) \supset R(a,c))$.

Ist nun ein nichtleerer Gegenstandsbereich (eine nichtleere Individuenmenge) gegeben und läßt sich in diesem Bereich eine Äquivalenzrelation R definieren, so kann eine Abstraktion durchgeführt werden. Wir veranschaulichen uns das zunächst an einem Beispiel. Gegeben sei ein Bereich von Waren. In diesem Bereich läßt sich eine Relation der Wertgleichheit definieren, die offenbar die drei angegebenen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation besitzt. Die Wertgleichheit zweier Waren läßt sich meist feststellen, etwa durch Preisvergleich. Es sei jedoch schon hier hervorgehoben, daß bei den meisten außermathematischen Abstraktionen Momente der Idealisierung enthalten sind, da eine praktische Feststellung einer Gleichheitsrelation zwischen zwei Objekten a und b nicht immer möglich ist. In unserem Beispiel setzen wir voraus, daß die Wendung „die Waren a und b sind wertgleich“ verständlich ist. Geht man von dieser Wendung zu dem Ausdruck „die Waren a und b haben den gleichen Wert“ über, so hat man mit der Einführung des Abstraktums „Wert“ eine Abstraktion vollzogen. Bis zu diesem Punkt sind sich die Vertreter der klassischen und der konstruktiven Richtung in der mathematischen Grundlagenforschung einig. Meinungsverschiedenheiten treten erst auf, wenn es zu klären gilt, was eine solche Abstraktion eigentlich bedeuten soll.

Gewöhnlich wird das auf B. Russell zurückgehende Abstraktionsprinzip zugrundegelegt: Wenn wir über ein Merkmal verfügen, auf Grund dessen zwischen Paaren von Elementen einer

Menge M eine Äquivalenzrelation aufgestellt werden kann, so wird die Menge M durch diese Relation eindeutig in paarweise disjunkte Teilmengen zerlegt. Wir sehen uns diese mengentheoretische Auffassung der Abstraktion an unserer Relation „wertgleich" etwas näher an. Auf Grund des Abstraktionsprinzips wird die Menge aller Waren, die einer gegebenen Ware a wertgleich sind, „Wert der Ware a" genannt. Werte sind nach dieser Auffassung also Mengen von Waren. Da die Beziehung der Wertgleichheit reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, läßt sich jetzt leicht beweisen, daß jede Ware zu einer und nur einer solchen Menge gehört, zwei wertgleiche Waren zur selben Menge und zwei Waren, die nicht wertgleich sind, zu verschiedenen Mengen gehören. Hieraus ergibt sich die Äquivalenz der beiden Wendungen „die Ware a und b sind wertgleich" und „die Waren a und b haben denselben Wert".

Diese mengentheoretische Auffassung der Abstraktion hat den Vorzug, daß sie alle Schwierigkeiten bei der praktischen Feststellung der Wertgleichheit zweier Waren a und b (und allgemein bei der Feststellung einer Äquivalenzrelation zweier konkreter Gegenstände) vermeidet (verdrängt). Sie führt aber dazu, daß neben den konkreten, sinnlich wahrnehmbaren Waren noch die Existenz von Werten, d. h. die Existenz von neuen, sogenannten abstrakten Objekten postuliert wird, ohne allerdings das Prädikat der Existenz für Mengen oder allgemein für abstrakte Objekte einzuführen. Einerseits existieren die konkreten Waren, andererseits sollen daneben noch zueinander disjunkte Mengen von gleichwertigen Waren in demselben Sinne existieren. Analog verhält es sich bei allen anderen Abstraktionen, wenn man die abstrakten Objekte als Mengen von konkreten Objekten auffaßt. Wie die Existenz dieser abstrakten Objekte im Falle unendlicher Mengen aufzufassen und nachzuweisen ist, bleibt bei der mengentheoretischen Begründung eine offene Frage, wenn man nicht zwischen formaler und empirischer Existenz unterscheidet.

Die operative Auffassung der Abstraktion von P. Lorenzen vermeidet einige mit dem klassischen Standpunkt verbundene Schwierigkeiten. Auch hier geht man von einem nichtleeren Objektbereich aus, in dem eine Äquivalenzrelation festgelegt ist. Die Abstraktion wird aber so gedeutet, daß man auch weiterhin nur über die gegebenen konkreten Objekte spricht, sich aber bei den Aussagen über diese Objekte auf solche beschränkt, die mit der festgelegten Äquivalenzrelation verträglich sind. Anders gesagt, in der Abstraktion beschränkt man sich auf Aussagen, die invariant bezüglich der entsprechenden Äquivalenzrelation sind. Im Bereich der Waren mit der Äquivalenzrelation „wertgleich" bedeutet das folgendes: Wir sprechen weiter nur über konkrete Waren, beschränken uns aber in unseren Aussagen auf solche, die wahr (bzw. falsch) bleiben, wenn wir in solch einer Aussage für den Namen einer Ware a den Namen einer ihr wertgleichen Ware b einsetzen. Wir treffen also, wenn wir in unserem Beispiel abstrahieren, nur Aussagen, die invariant bezüglich der Wertgleichheit sind. Wie wir sehen, ist es hier nicht nötig, neben den konkreten Objekten noch abstrakte Objekte als Mengen von konkreten Objekten zu postulieren. Ist man sich aber einmal über die Abstraktion als Beschränkung in der Redeweise im klaren, so kann man natürlich auch den Terminus „abstraktes Objekt" ohne Bedenken verwenden. Im Unterschied zur klassischen Auffassung der Abstraktion muß die operative Auffassung allerdings mit den Schwierigkeiten bei der praktischen Feststellung einer Äquivalenzrelation zwischen konkreten Objekten fertig werden. Die skizzierten Auffassungen führen jedoch zu Schwierigkeiten bei außermathematischen Abstraktionen. Außerdem sind beide Auffassungen zirkulär, denn den Relationsbegriff und den Klassenbegriff führt man mit Hilfe des Abstraktionsbegriffs und den Abstraktionsbegriff mit Hilfe des Klassenbegriffs und des Relationsbegriffs ein. Bei Abstraktionen außerhalb der Mathematik wird die eigentliche Abstraktion oder Idealisierung bereits vor dem hier beschriebenen Abstraktionsverfahren vollzogen. Sie besteht darin, daß man aus einer empirischen Gegenstandsgesamtheit eine Individuenmenge macht und eine reine Äquivalenzrelation postuliert, die empirisch meist nicht nachweisbar ist. Unbestimmtheiten werden generell ausgeschlossen. Aus der Ökonomie wissen wir beispielsweise, daß die Waren nicht genau nach ihrem Wert ausgetauscht werden. Die Wertgleichheit ist also eine abstrakte Beziehung, die aber trotzdem ihren Sinn hat, weil der empirische Austausch ihr in etwa entspricht.

Die operative Auffassung der Abstraktion ist keine logische Operation. Betrachten wir als Beispiel die operative Klassendefinition aus Abschnitt 4 dieses Kapitels. Dort werden Klassen und Klassengleichheit wie folgt definiert:

$$(\in_s P(s) = \in_s Q(s)) \equiv_{Def} \forall s(P(s) \equiv Q(s)).$$

Diese Definition durch Abstraktion ist nicht korrekt, da in der entsprechenden Bisubjunktion die linke Seite existentiell belastet ist und die rechte Seite nicht. Damit ist die ganze Bisubjunktion existentiell belastet. Es handelt sich, wie schon Hermann Weyl (Weyl 1966, S. 22/23) richtig bemerkte, um eine schöpferische Definition, die neue abstrakte Objekte schafft. Diese Schwierigkeit läßt sich vermeiden, wenn man anstatt der Identität im Definiendum nur Bedeutungsgleichheit der Termini setzt:

$$(t \in_s P(s) \rightleftharpoons t \in_s Q(s)) \equiv_{Def} \forall s(P(s) \equiv Q(s)).$$

So wird eine Definition durch Abstraktion eine bloße façon de parler.

Wir unterscheiden in folgender Weise zwischen *empirischen* und *abstrakten* Gegenständen: Empirische Gegenstände sind die uns mit Hilfe unserer Sinneswahrnehmungen mittelbar oder unmittelbar gegebenen Gegenstände, während abstrakte (oder fiktive) Gegenstände nicht empirisch existieren, sonderen mit Hilfe von definitorischen Festsetzungen postuliert werden. Abstrakten Gegenständen werden dabei solche Eigenschaften abgesprochen (zugeschrieben), ohne die (mit denen) empirische Gegenstände nicht existieren. Abstrakte Gegenstände werden postuliert, um im gegebenen Wissensbereich Theorien aufzustellen und die deduktiven Möglichkeiten zu erweitern. Ihre Postulierung hat nur dann einen Sinn, wenn sie (in gewissen Grenzen) als empirische Gegenstände interpretiert werden können.

16.7 Zustände

Angenommen, A sei die Aussage $\alpha P(a_1, \ldots, a_n)$, wobei $n \geq 1$, während α das Vorhandensein oder Fehlen von Quantoren, Negationen und Unbestimmtheitsoperatoren in dieser oder jener zulässigen Kombination bedeutet. In diesem Fall ist der Ausdruck „der Zustand, daß A“ ein Zustandsterminus. Der Kürze halber verwenden wir das Symbol sA. Der mit dem Terminus sA bezeichnete Gegenstand ist ein *Zustand*. Die Existenz von Zuständen wird definiert durch:

A1. $E(sA) \dashv\vdash A.$

A2. $\sim E(sA) \dashv\vdash \sim A,$

d. h., sA existiert (existiert nicht) genau dann, wenn A wahr (nicht wahr) ist.

16.8 Veränderungstermini

In der Geschichte der Philosophie gibt es Versuche, Veränderungstermini mit Hilfe der Wörter „Sein“ und „Nichts“ einzuführen. Am bekanntesten ist der Versuch Hegels, den Terminus „Werden“ mit Hilfe der Wörter „Sein“ und „Nichts“ zu bestimmen. Diese Versuche sind jedoch zum Scheitern verurteilt, denn ohne jeden Rückgriff auf das empirisch Gegebene lassen sich Veränderungstermini nicht einführen. Ähnlich wie das Existenzprädikat lassen sich auch

Veränderungstermini nicht rein logisch einführen. In der Logik wird vielmehr vorausgesetzt, daß das Veränderungsprädikat „das Erste verändert sich zu dem Zweiten“ (symbolisch: „... $\Rightarrow$ ...“) für einfache Verwendungsfälle bereits bekannt ist. Unter dieser Voraussetzung wird dann in der Logik die Bedeutung dieses Prädikates für kompliziertere Verwendungsweisen definiert, es werden von ihm abgeleitete Termini gebildet und die logischen Beziehungen zu anderen Prädikaten festgelegt. Insbesondere werden Zeittermini mit Hilfe des Veränderungsprädikates definiert.

Zur Erläuterung einfacher Verwendungsfälle des Veränderungsprädikates stellen wir uns eine Menschengruppe vor, die noch nicht über dieses Prädikat verfügt, und überlegen, wie sie es einführen könnte. Diese Gruppe wird zunächst an einer Reihe von Beispielen den Gebrauch des Zeitindikators „jetzt“ festlegen oder erlernen. Es werden die Ereignisse in ihrer unmittelbaren Gegenwart beobachtet („unmittelbare Gegenwart“ ist hier noch kein spezieller Zeitterminus; sie umfaßt vielmehr das, was sich unmittelbar vor den Augen dieser Gruppe abspielt; man könnte diesen Terminus auch in einer Philosophie verwenden, die wie einige indische Lehren über keine ausgearbeiteten Zeittermini verfügen und nur die Gegenwart als „ewige Dauer“ kennen). Die Gegenwart in diesem Sinne wird jetzt in Augenblicke (wörtlich, nicht metaphorisch) unterteilt: Jetzt rennt das Reh (A). Jetzt schießt der Bogenschütze (B). Jetzt wird das Reh vom Pfeil getroffen (C). Jetzt bricht es zusammen (D). Neben dem Gebrauch des Zeitindikators „jetzt“ läßt sich an einer solchen Ereignisfolge auch der Gebrauch der zeitlichen Relationen „früher“, „später“, „gleichzeitig“ erlernen. Das Ereignis A ist früher als das Ereignis B, das Ereignis C ist später als das Ereignis A usw. Für die Zeitrelation „früher“, „später“ und „gleichzeitig“ gelten alle Regeln der Logik der Ordnung, denn sie sind nur Spezialfälle der Ordnungsrelationen „untertrifft in der Ordnung“, „übertrifft in der Ordnung“ und „ist gleich in der Ordnung“. Wesentlich ist, daß in Aussagen über die zeitliche Lage zweier Ereignisse stets deren Lage bezüglich eines dritten Ereignisses nach einem bestimmten Verfahren zur Feststellung der Ordnung ermittelt wird. Logisch korrekt müssen solche Aussagen also folgendermaßen formuliert werden: „Das Ereignis A ist früher als das (später als das, gleichzeitig mit dem) Ereignis B bezüglich des Ereignisses C nach dem Feststellungsverfahren α.“ Wir wollen hier die logischen Probleme von Zeitaussagen nicht weiter erörtern, sondern nur noch angeben, wie sich mit Hilfe der Wörter „jetzt“, „früher“, „später“ und „gleichzeitig“ solche Zeittermini wie „gegenwärtig“, „vergangen“ und „zukünftig“ einführen lassen. Der Terminus „gegenwärtig“ läßt sich definieren als „gleichzeitig mit jetzt“, der Terminus „vergangen“ als „früher als jetzt“ und der Terminus „zukünftig“ als „später als jetzt“. Bisher haben wir nur topologische Zeitrelationen zur Verfügung. Durch die Auswahl von relativ regulären, sich wiederholenden Ereignissen (Erddrehung, Umdrehung der Erde um die Sonne usw.) lassen sich auch metrische Zeitbestimmungen einführen. Wir haben hier kurz die Einführung von Zeittermini angedeutet, weil das Veränderungsprädikat verschieden eingeführt werden kann, nämlich einmal ohne Verwendung von Zeittermini und zum anderen mit Hilfe von Zeittermini (vgl. Wessel 1977). Wir betrachten nur den ersten Fall, weil er in logischer Hinsicht fundamentaler ist, obwohl Veränderungsaussagen mit Zeitangaben natürlich informativer sind.

Angenommen, sA sei der Zustand eines empirischen Gegenstands a zu der einen Zeit (zu dem einen „jetzt“) und sB der Zustand des gleichen Gegenstandes zu einer anderen Zeit danach (zu einem darauffolgenden „jetzt“; Zeittermini werden also gar nicht benötigt, obwohl sich mit ihnen die Situation besser beschreiben läßt). A und B sind hier empirische Aussagen, und s ist der Operator „der Zustand, daß ...“. Angenommen, die Zustände sA und sB schließen einander aus, d. h. $\vdash \sim(A \wedge B)$. Liegt eine solche Situation vor, so sagen wir, der Zustand sA hat sich zu dem Zustand sB verändert, und schreiben dies mit einem Symbol der Form $sA \Rightarrow sB$. Aussagen dieser Form bestehen aus den Subjekttermini sA und sB und dem zweistelligen Prädikat „das Erste verändert sich zu dem Zweiten“. Aus Aussagen der Form $sA \Rightarrow sB$, die das Veränderungsprädikat enthalten, lassen sich Subjekttermini für Veränderungen der Form $s(sA \Rightarrow sB)$ bilden. Oder mit anderen Worten: den Sachverhalt, daß sich sA zu sB verändert, nennen wir eine *Veränderung*. Spezialfälle von Veränderungen sind:

$s(s{\sim}E(a) \Rightarrow sE(a))$	- ein Entstehen von a,
$s(sE(a) \Rightarrow s{\sim}E(a))$	- ein Vergehen von a,
$s(s{\sim}A \Rightarrow sA)$	- ein Entstehen von sA,
$s(sA \Rightarrow s{\sim}A)$	- ein Vergehen von sA,
$s(sP(a) \Rightarrow s\neg P(a))$	- ein Verlust des Merkmals P,
$s(s\neg P(a) \Rightarrow sP(a))$	- ein Gewinn des Merkmals P.

Bei der Beschreibung von Veränderungen ist folgender Umstand zu berücksichtigen: Angenommen, es sei die Aussage $sA \Rightarrow sB$ getroffen, t^1 sei die Zeit, zu der sA fixiert, und t^2 sei die Zeit, zu der sB fixiert wird. In der Erfahrung treten dabei häufig Fälle auf, in denen zwischen t^1 und t^2 ein solches Zeitintervall t^3 existiert, in dem ${\sim}A \wedge {\sim}B$ gilt. Einen solchen Zustand $s({\sim}A \wedge {\sim}B)$ nennen wir einen *Übergangszustand*, während wir sA und sB *statische Zustände* nennen. Wenn A eine der Aussagen $P(a)$ oder $\neg P(a)$ ist, so ist $s({\sim}A \wedge {\sim}B)$ der Zustand $s?P(a)$. Das bekannte Paradox der Veränderung („Ein sich verändernder Körper besitzt eine Eigenschaft P und besitzt sie gleichzeitig nicht") entsteht auf Grund des logischen Fehlers, aus einer Beschreibung des Übergangszustandes der Form $({\sim}P(a) \wedge {\sim}\neg P(a))$ nach der ungültigen Regel ${\sim}\neg P(a) \vdash P(a)$ auf $({\sim}P(a) \wedge P(a))$ zu schließen.

Der rationelle Kern des Hegelschen Prinzips der dialektischen Identität läßt sich folgendermaßen explizieren. Angenommen, a_1 sei eine Bezeichnung des Gegenstandes a zur Zeit t^1, und a^2 sei eine Bezeichnung desselben Gegenstandes zur Zeit t^2. Das Prinzip der dialektischen Identität besagt dann: Wenn sich a_1 zu a_2 verändert hat, so gibt es eine Eigenschaft P derart, daß $P(a_1) \wedge P(a_2)$ gilt, und es gibt eine Eigenschaft Q derart, daß $Q(a_1) \wedge \neg Q(a_2)$ oder $\neg Q(a_1) \wedge Q(a_2)$ gilt.

Bisher betrachteten wir nur das zweistellige Prädikat der Veränderung $\Rightarrow$. Mit seiner Hilfe läßt sich ein einstelliges Prädikat der Veränderung („verändert sich", „hat sich verändert", symbolisch: $\Downarrow$) auf folgende Weise definieren: Vorausgesetzt, a existiert ($E(a)$), so gilt $\Downarrow(a)$ (a verändert sich) genau dann, wenn ein Prädikat P (verschieden von E) derart möglich ist, daß $P(a)$ zu einer Zeit wahr und zu einer anderen Zeit unwahr ist. Ein typisches Beispiel aus der Umgangssprache für Aussagen dieser Form ist: „Das Wasser ist bewegt." Aus diesem elementaren und problemlosen Beispiel wird deutlich, wie unbegründet die Entgegensetzung von Seins- und Werdenstermini ist.

Wir hatten gesehen, daß sich aus Aussagen mit dem Prädikat $\Rightarrow$ ($\Downarrow$) der Form $sA \Rightarrow sB$ ($\Downarrow(a)$) Subjekttermini der Form $s(sA \Rightarrow sB)$ (oder $s\Downarrow(a)$) bilden lassen. Für die mit diesen Subjekttermini bezeichneten Gegenstände - man nennt sie häufig *Ereignisse* - müssen nun die Bedingungen ihrer Prädikation angegeben werden. Alle Prädikate, die solchen Gegenständen zugesprochen werden, müssen im folgenden Sinne eingeführt werden: Entweder sie müssen speziell für Subjekttermini dieses Typs definiert werden, oder es muß nachgewiesen werden, daß man Prädikate, deren Bedeutung bereits festgelegt ist, mit Subjekttermini dieses Typs verknüpfen darf. So wird etwa eine Veränderung als *diskret* bezeichnet, wenn der Übergangszustand nicht berücksichtigt wird, und als *kontinuierlich*, wenn ein Übergangszustand berücksichtigt wird, der wiederum als eine Anhäufung von Veränderungen angesehen wird. Aus Definitionen der hier angedeuteten Art ergibt sich als Folgerung eine Reihe von Aussagen, die aus rein terminologischen Gründen gelten. Diese Definitionen und die aus ihnen gewonnenen Folgerungen kann man als *Logik der Veränderung* bezeichnen.

16.9 Entwicklungstermini

Wir formulieren zunächst einige intuitive Überlegungen, die gewöhnlich mit dem Terminus „Entwicklung“ verknüpft werden. Jede Entwicklung ist eine Veränderung, während nicht jede Veränderung eine Entwicklung ist. Jede Entwicklung ist eine zusammengesetzte Veränderung, die in eine Gesamtheit von einfachen Veränderungen aufgegliedert werden kann. Von Entwicklung zu sprechen, ist nur in bezug auf solche empirischen Gegenstände angebracht, die eine ausreichend lange Zeit in einem lokalisierten Raumbereich existieren. Die einfachen Veränderungen, die eine gegebene Entwicklung ausmachen, sind in Raum und Zeit geordnet. Zwischen ihnen besteht ein empirischer Zusammenhang. Der Gegenstand, dessen Entwicklung betrachtet wird, gliedert sich seinerseits in eine Gesamtheit von Gegenständen, die eine Raum-Zeit-Struktur bilden. Wenn von einer Entwicklung von Gegenständen gesprochen wird, so wird ein Vergleich ihrer Zustände zu verschiedenen Zeiten durchgeführt, oder aber ein Vergleich der Zustände verschiedener Repräsentanten von Klassen dieser Gegenstände zur gleichen Zeit, aber in verschiedenen Raumbereichen. Als Entwicklungskriterien werden bestimmte Merkmale der Gegenstände und ihrer Zustände ausgewählt. Ohne eine Auswahl solcher Kriterien ist es unmöglich festzustellen, ob sich eine Entwicklung vollzogen hat oder nicht.

Wie wir sehen, zeigt schon dieser flüchtige Überblick über die intuitiven Vorstellungen, die gewöhnlich mit einer Verwendung des Terminus „Entwicklung“ assoziiert werden, daß eine logische Explikation dieses Terminus einen umfangreichen logischen Apparat voraussetzt, den man in der modernen Logik gerade erst beginnt auszuarbeiten: eine Logik der Veränderung, eine Logik des Vergleichs und eine Logik der Ordnung, eine Logik von Raum-Zeit-Beziehungen, eine Logik von Anhäufungen, die von der Klassenlogik verschieden ist oder als ein besonderer Teil (als Zusatz) der letzteren aufgebaut wird, eine Logik von empirischen Zusammenhängen usw. Außerdem sind spezifische Ergänzungen erforderlich, die sich nur auf die Entwicklung beziehen und die der Idee nach eine Logik der Entwicklung bilden. In der Literatur wurden bereits verschiedene logische Systeme aufgebaut, die zu den oben angegebenen Bereichen der Logik gehören.

Wir führen den Operator „und deshalb“ („und aus diesem Grund“, „und wegen dieser Ursache“) ein und verwenden für ihn das Symbol &. Wenn wir hier die Logik von Zusammenhängen und ihren Bereich der Logik der Kausalität einmal als gegeben voraussetzen (vgl. Abschnitt 11 dieses Kapitels sowie Wessel 1977), so können wir den Ausdruck $A\&B$ („A und deshalb B“) als Abkürzung für $A \wedge B \wedge C$ definieren, wobei C der folgende Ausdruck ist: „Der Zustand B ist eine Folge davon, daß das Ereignis A sich vollzog.“ Offenbar gilt dann: $A\&B \vdash A \wedge B$.

Wir nehmen den Ausdruck „a erzeugt b unmittelbar“ (abgekürzt $\sqcap(a,b)$) als gegeben an und definieren das Prädikat „befindet sich in der Relation des Erzeugens“ (wir benutzen das Symbol $\sqcup$) auf folgende Weise:

1. $\sqcup(a,b) \dashv\vdash \exists c_n(\sqcap(a,c_1) \wedge \sqcap(c_1,c_2) \wedge \ldots \wedge \sqcap(c_n,b))$, wobei $a, b, c_1, \ldots, c_n$ Individuenvariablen sind.
2. $\sqcup(a,b) \dashv\vdash \forall c((c \in b) \supset \exists d(d \in a) \wedge \sqcup(d,c))$, wobei a und b Variablen für Anhäufungen, c und d Individuenvariablen und $\in$ die Elementbeziehung für Anhäufungen sind.

Weiter definieren wir das Prädikat der Veränderung für Anhäufungen:

$$(\sum a \Rightarrow \sum b) \dashv\vdash \exists c \exists d((c \in \sum a) \wedge (d \in \sum b) \wedge (c \Rightarrow d)).$$

Wir gehen jetzt unmittelbar zur Betrachtung von Entwicklungstermini über. Vor allem gilt es, eine Verwendung von Entwicklungstermini in folgenden beiden verschiedenen Bedeutungen zu unterscheiden: 1. im komparativen Sinne, wenn man von zwei oder mehr verschiedenen Individuen sagt, daß eines von ihnen mehr oder weniger entwickelt ist, als die anderen, oder genauso (gleich) entwickelt ist wie die anderen, daß ein Individuum in der Entwicklung gegenüber anderen zurückgeblieben ist usw.; 2. im genetischen Sinne, wenn man verschiedene Zustände ein und desselben Individuums in der Zeit vergleicht. Unserer Meinung nach läßt sich der erste Fall in logischer Hinsicht auf den zweiten in folgender Weise zurückführen. Angenommen, a sei der Zustand des einen Individuums und b der Zustand des anderen, die unter dem Gesichtspunkt der Entwicklung verglichen werden. Wenn aber der Vergleich gerade unter diesem Gesichtspunkt durchgeführt wird, so wird vorausgesetzt, daß dem Zustand a (oder b) des Individuums ein solcher Zustand desselben Individuums vorausging, der dem Zustand b (entsprechend a) des anderen Individuums analog ist. Wir können uns also im weiteren auf eine Betrachtung von Entwicklungstermini in der zweiten Verwendungsweise beschränken.

Weiter kann eine Entwicklung von Gegenständen eine Anhäufung von Veränderungen sein, die aus zwei und mehr Veränderungen besteht. Unter logischem Gesichtspunkt reicht es jedoch zunächst aus, den einfachsten Fall zu betrachten, nämlich die Veränderung eines Zustandes eines Gegenstandes a_1 zu einem anderen Zustand desselben Gegenstandes a_2, d. h. den Fall $a_1 \Rightarrow a_2$, denn alle Vergleichskriterien von Zuständen eines Gegenstandes treten schon in solch einer elementaren Form der Entwicklung auf.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß wir bei einer Analyse der Entwicklungsterminologie von vornherein folgenden Umstand berücksichtigen müssen: Es geht nicht darum, nur den Sinn des Wortes „Entwicklung" zu präzisieren, sondern es muß der Sinn einer ganzen Reihe von sprachlichen Ausdrücken (solchen wie „Vereinfachung", „Komplizierung", „Progreß", „Regreß", „Stagnation" usw.) festgelegt werden, in bezug auf die der Terminus „Entwicklung" nur teilweise als eine Verallgemeinerung auftritt, in größerem Maße jedoch die Rolle einer summarischen Bezeichnung dieses Zyklus von sprachlichen Erscheinungen spielt.

Angenommen, a_1 sei der Zustand eines Individuums a zur Zeit t^1 und a_2 der Zustand desselben Individuums zur Zeit t^2 nach t^1. Die Entwicklungstermini setzen zwei Bedingungen für ihre Verwendung voraus: 1. eine Analyse des Aufbaus der Zustände a_1 und a_2; 2. das Fixieren eines solchen Merkmals P des Individuums a, daß das Ergebnis des Vergleichs von a zur Zeit t^1 und zur Zeit t^2 bezüglich dieses Merkmals eine gewisse Funktion von $a_1 \Rightarrow a_2$ ist. Wir erklären ausführlicher, was wir hier meinen.

Den Aufbau des empirischen Individuums a zu ermitteln bedeutet, es als eine Struktur einer gewissen Anhäufung von empirischen Individuen und als ein System von Zusammenhängen dieser Individuen zu betrachten. Eine Veränderung des Aufbaus von a im Falle $a_1 \Rightarrow a_2$ kann eine Entstehung neuer Elemente in der Struktur a, eine Vernichtung von Elementen von a, eine Vernichtung der einen und ein Entstehen anderer Elemente, eine Herausbildung neuer Zusammenhänge, die Zerstörung der einen und eine Herausbildung anderer Zusammenhänge bedeuten (man kann hier alle möglichen Kombinationen aufzählen). Diese Veränderungen werden mit Hilfe der Termini „Komplizierung", „Vereinfachung", „Transformation", „Konsolidierung" usw. fixiert. All diese Termini sind zwar für eine Einführung der Entwicklungstermini erforderlich, sie sind selbst aber noch keine solchen Termini.

Wenn man von einer Entwicklung spricht, so meint man also nicht jede beliebige Veränderung von a, sondern nur eine solche, bei der $a_1 \Rightarrow a_2$ eine Veränderung des Aufbaus von a ist. Danach wird eine gewisse Gesamtheit von Merkmalen P ausgewählt, nach der ein Vergleich der Zustände a_1 und a_2 durchgeführt wird. Im Ergebnis dieses Vergleichs erhält man Aussagen des Typs $a_1 >_P a_2$, $a_1 <_P a_2$, $a_1 =_P a_2$. Die Merkmale P sind Entwicklungskriterien. In welchem Maße die Frage nach den Entwicklungskriterien im Rahmen der Logik untersucht werden kann, bleibt noch zu untersuchen. Wir lassen diese Frage hier offen.

Jetzt lassen sich symbolisch folgende drei Möglichkeiten formulieren:

1. $(a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_1 >_P a_2)$;
2. $(a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_1 <_P a_2)$;
3. $(a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_1 =_P a_2)$.

Im ersten Fall definiert die angeführte Formel den Ausdruck „Es vollzog sich ein Regreß von a bezüglich des Merkmals P im Zeitintervall $\langle t^1, t^2 \rangle$“, im zweiten Fall den Ausdruck „Es vollzog sich ein Progeß von a bezüglich des Merkmals P im Zeitintervall $\langle t^1, t^2 \rangle$“ und im dritten Fall „Es vollzog sich eine Stagnation von a bezüglich des Merkmals P im Zeitintervall $\langle t^1, t^2 \rangle$“.

In den angeführten Definitionen werden die Prädikate „Progreß“ (wir verwenden das Symbol R^{1P}), „Regreß“ (R^{2P}) und „Stagnation“ (R^{3P}) eingeführt. Diese Definitionen lassen sich symbolisch folgendermaßen schreiben:

$$R^{1P}(a) \dashv\vdash (a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_1 <_P a_2),$$
$$R^{2P}(a) \dashv\vdash (a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_1 >_P a_2),$$
$$R^{3P}(a) \dashv\vdash (a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_1 =_P a_2).$$

Die Prädikate R^{iP} sind einstellige Prädikate. Auf ähnliche Weise lassen sich die zweistelligen Entwicklungsprädikate T^{1P} („... entwickelt sich progressiv zu ... bezüglich P“), T^{2P} („... entwickelt sich regressiv zu ... bezüglich P“) und T^{3P} („... entwickelt sich stagnierend zu ... bezüglich P“) definieren:

$$T^{1P}(a, b) \dashv\vdash (a \Rightarrow b)\&(b <_P a),$$
$$T^{2P}(a, b) \dashv\vdash (a \Rightarrow b)\&(a >_P b),$$
$$T^{3P}(a, b) \dashv\vdash (a \Rightarrow b)\&(a =_P b).$$

In den angeführten Definitionen kann man anstelle von $\dashv\vdash$ auch den Operator $\leftrightarrow$ verwenden. Weiter können die Ausdrücke „a entwickelt sich progressiv“, „a entwickelt sich regressiv“ und „a stagniert“ als Abkürzungen der folgenden Ausdrücke eingeführt werden:

$$\exists a_1 \exists a_2 \exists P((a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_2 >_P a_1)),$$
$$\exists a_1 \exists a_2 \exists P((a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_1 >_P a_2)),$$
$$\exists a_1 \exists a_2 \exists P((a_1 \Rightarrow a_2)\&(a_1 =_P a_2)),$$

wobei a_1 und a_2 Variablen für Zustände von a zu verschiedenen Zeiten sind, während P jetzt eine Variable für Merkmale ist, im Unterschied zum vorherigen Gebrauch, als P ein konstantes Merkmal darstellte.

Außerdem gibt es noch eine weitere Richtung für die logische Analyse der betrachteten Terminologie. Wir führen beispielsweise das Prädikat der Evolution für Anhäufungen von Individuen ein (wir verwenden das Symbol D; der Ausdruck $D(\sum a, \sum b)$ wird gelesen als „Die Anhäufung a evolutionierte zur Anhäufung b“): $D(\sum a, \sum b) \dashv\vdash (\sum a \Rightarrow \sum b) \wedge \forall b \exists a \sqcup (a, b)$. Wie wir sehen, wird hier das Prädikat D mit Hilfe von Termini der Logik von Zusammenhängen definiert.

Nach der Einführung von Entwicklungsprädikaten lassen sich Subjekttermini der Entwicklung nach den allgemeinen logischen Regeln einführen. So läßt sich beispielsweise der Ausdruck „eine P-Entwicklung von a“ (wobei P der Typ der Entwicklung ist) als Abkürzung des Ausdrucks „eine Veränderung von a derart, daß A“ definieren, wobei A der Ausdruck $\exists P \exists a_1 \exists a_2 S^P(a)$ ist, während S^P ein Entwicklungsprädikat des entsprechenden Typs P darstellt. Und jetzt lassen sich für verschiedene Typen der Entwicklung die Bedingungen ihrer Prädikation angeben, insbesondere lassen sich für sie verschiedene Prädikate definieren („kontinuierlich“, „diskret“, „reversibel“, „irreversibel“ usw.). Beispielsweise kann man die Definitionen wählen:

Eine Entwicklung von a ist *reversibel* genau dann, wenn $Ms(R^{1P}(a) \wedge R^{2P}(a))$.
Eine Entwicklung von a ist *irreversibel* genau dann, wenn $\sim Ms(R^{1P}(a) \wedge R^{2P}(a))$.

M ist hier das Prädikat „möglich", und s ist der terminibildende Operator „der Sachverhalt, daß …". Aus einer hier angedeuteten Gesamtheit von Definitionen von Entwicklungstermini läßt sich eine Reihe von logischen Folgerungen ableiten. Insbesondere wird eine genaue Unterscheidung von solchen Aussagen über Entwicklungen möglich, die sich allein aus der gewählten Terminologie ergeben, und solchen, die echte empirische Feststellungen sind.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß solch ein Aufbau einer präzisen Entwicklungsterminologie nicht als Aufbau einer einzelwissenschaftlichen oder philosophischen Entwicklungstheorie mißverstanden werden darf. Vielmehr handelt es sich bei einer solchen logischen Explikation nur um eine Aufhellung und Präzisierung des Sinnes von Termini, die in einer Entwicklungstheorie verwendet werden können. Das Ziel einer solchen Explikation besteht darin, Ungenauigkeiten und Mehrdeutigkeiten der Terminologie auszuschließen, alle möglichen Varianten für die Definitionen der betreffenden Termini zu ermitteln und ihre logischen Eigenschaften und Beziehungen genau zu bestimmen. Es muß nicht betont werden, daß solche logischen Untersuchungen eine genauere und differenziertere Sprache für die Philosophie und die Methodologie der Wissenschaft liefern. Das ist offensichtlich. Doch als Folge wird dabei eine andere sehr wichtige Frage gelöst, die Frage nach dem Verhältnis der Logik zu anderen philosophischen Disziplinen. Diese Frage wird hier aus dem Bereich allgemeiner Erörterungen auf eine Ebene strenger Beweise in jedem konkreten Punkt überführt. Dabei zeigt sich auf der Ebene formaler Beweise einerseits, daß man viele philosophische Behauptungen im Rahmen der Logik weder beweisen noch widerlegen kann. Diese Behauptungen haben außerlogische Natur, hängen von der ganzen Geschichte der menschlichen Kultur ab und ergeben sich nicht allein aus der logischen Technik zur Bearbeitung einer Terminologie. So kann man im Rahmen der Logik den Beweis finden, daß die Behauptungen der Philosophie über die inneren Quellen der Entwicklung, über die prinzipielle Unendlichkeit der Entwicklung der Welt usw. nicht von den Postulaten und Regeln der Logik abhängen, obwohl sich diese Behauptungen bis zu einem gewissen Grade in der Sprache der Logik explizieren lassen. Die Nichtreduzierbarkeit der Philosophie auf die Logik erweist sich hier also als eine streng beweisbare These.

Andererseits lassen sich aus den Definitionen der Entwicklungstermini nach logischen Regeln Folgerungen ableiten, die rein logischer Natur sind, aber als philosophische oder naturwissenschaftliche (insbesondere physikalische) Hypothesen angesehen werden. Die Analyse solcher Folgerungen fördert also die Ermittlung genauerer Grenzen zwischen logischen und außerlogischen philosophischen Behauptungen. Durch den logisch korrekten Aufbau von Termini zur Beschreibung von Veränderungen und Entwicklungen wird nachgewiesen, daß die Entgegensetzung von Sein und Werden, die die Geschichte der Philosophie seit Heraklit und Parmenides durchzieht, ebenso unbegründet ist wie der Gegensatz von Logik und Dialektik.

16.10 Geordnete Zustände und empirische Zusammenhänge

Eine wichtige Rolle spielen in der Wissenschaft Aussagen, in denen die räumliche und zeitliche Ordnung von Zuständen fixiert werden. In solchen Aussagen werden Relationstermini wie „früher", „vorher", „nachher", „rechts von", „links von", „kurz danach", „3 Stunden später", „in der Umgebung von", „gleichzeitig mit" usw. verwendet. Beispiele für solche Aussagen sind etwa: „Der Donner ertönte fünf Sekunden, nachdem der Blitz aufleuchtete" oder „Das Geschoß explodierte 10 m von dem Ort entfernt, an dem die Aufklärer in Deckung gingen". Wir verwenden R, R^1, R^2, … als Ordnungszeichen und stellen Aussagen der oben angegebenen

Art durch Symbole der Form $(RsA)(sB)$ dar, die gelesen werden können als „Der Zustand sA steht in der Relation R zu dem Zustand sB". Der Kürze halber schreiben wir im weiteren anstelle von sA und sB kleine Buchstaben a und b. In dieser Schreibweise haben die oben angegebenen Aussagen die Form $(Ra)b$.

Man trifft Aussagen der Form „A und danach b", „A und vor diesem b", „A und links davon b" usw. Diese geordneten Konjunktionen werden häufig verwendet und oft mit der gewöhnlichen Konjunktion verwechselt. Analog verhält es sich mit den geordneten Adjunktionen. Unseres Erachtens beruht gerade auf dieser Verwechslung der Ausschluß gewisser Gesetze der klassischen Logik in der „Logik der Mikrophysik". Im allgemeinen Fall haben die erwähnten Konjunktionen und Adjunktionen die Form $A \wedge (Ra)b$ und $A \vee (Ra)b$, wobei R eine Ordnungsrelation ist („A und in der Relation R dazu b", „A oder in der Relation R dazu b").

Für die betrachteten Aussagen gelten Formeln der folgenden Form nicht:

$$A \wedge (Ra)b \vdash B \wedge (Rb)a, A \vee (Ra)b \vdash B \vee (Rb)a.$$

Ansonsten gelten für geordnete Konjunktionen und Adjunktionen Regeln, die denen der üblichen Konjunktion und Adjunktion analog sind, beispielsweise folgende:

$$\sim(A \wedge (Ra)b) \dashv\vdash \sim A \vee (Ra)\sim b,$$
$$\sim(A \vee (Ra)b) \dashv\vdash \sim A \wedge (Ra)\sim b.$$

Für geordnete Konjunktionen und Adjunktionen gelten zusätzliche logische Regeln:

$$(A \wedge (R^1a)b) \wedge (xR^1y \rightarrow yR^2x) \vdash B \wedge (R^2b)a,$$
$$(A \vee (R^1a)b) \wedge (xR^1y \rightarrow yR^2x) \vdash B \vee (R^2b)a.$$

Konditionalaussagen der Form $A \rightarrow (Ra)b$, in denen R eine zeitliche Relation ist, und ihre Negationen nennen wir *Aussagen über eine physische oder empirische Folgebeziehung.* Ein Beispiel für eine solche Aussage ist: „Wenn man durch eine Leitung elektrischen Strom fließen läßt, so bildet sich gleichzeitig damit (oder kurz danach) ein Magnetfeld um die Leitung." Für solche Aussagen gelten neben den allgemeinen Regeln für Konditionalaussagen noch zusätzliche logische Regeln (vgl. Sinowjew/Wessel 1975).

Konditionalaussagen der Form $A \rightarrow (Ra)b$, in denen A und B lokale Aussagen über empirische Gegenstände und R eine räumliche oder zeitliche Relation ist, sowie deren Negationen und zusammengesetzte Aussagekonstruktionen aus solchen Aussagen nennen wir *Aussagen über empirische Zusammenhänge.*

Wenn A eine Aussage über einen empirischen Zusammenhang ist, so ist sA *ein empirischer Zusammenhang.* Wir machen darauf aufmerksam, daß wir den Terminus „empirischer Zusammenhang" so eingeführt haben, daß wir zunächst eine Klasse von Aussagen einer bestimmten logischen Struktur als Aussagen über empirische Zusammenhänge bestimmt haben, und daran anschließend sagen, was ein empirischer Zusammenhang ist.

Eine Anhäufung von empirischen Zuständen bildet *ein empirisches System von Zusammenhängen* genau dann, wenn sich für einen beliebigen, in dieser Anhäufung vorkommenden Zustand sA ein anderer ihrer Zustände sB derart finden läßt, daß sich sA und sB in einem empirischen Zusammenhang befinden.

Für empirische Zusammenhänge als einem besonderen Typ von Gegenständen werden die bereits für andere Typen von Gegenständen bekannten Prädikate definiert und neue eingeführt. So ist ein empirischer Zusammenhang von sA und sB *unvermittelt* genau dann, wenn es keinen Zustand sC mit folgenden Eigenschaften gibt:

1) sA befindet sich in einem empirischen Zusammenhang mit sC;
2) sC befindet sich in einem empirischen Zusammenhang mit sB;
3) aus den Aussagen über die letzten beiden Zusammenhänge folgt eine Aussage über einen Zusammenhang von sA und sB.

Man trifft auf Aussagen über empirische Zusammenhänge

(1) $X \to (Ra)z$
(2) $Y \to (Ra)v$,

die auf den ersten Blick folgende Eigenschaft zu haben scheinen. Nach den Regeln der Logik erhält man aus ihnen

(3) $X \wedge Y \to (Ra)(z \wedge v)$,

dabei kann die Aussage $X \wedge Y$ wahr sein und $Z \wedge V$ nicht, d. h., $\sim(Z \wedge V)$ ist wahr. (1) möge etwa die Aussage sein „Wenn man auf den Körper A eine Kraft B einwirken läßt, so verrückt A in der Richtung α um den Abstand β“ und (2) die Aussage „Wenn man auf den Körper A eine Kraft C einwirken läßt, so verrückt A in der Richtung γ um den Abstand δ“; man kann nun beide Kräfte B und C auf A einwirken lassen; der Körper A kann sich aber nicht gleichzeitig in die Richtungen α und γ (z. B. nach links und nach rechts) bewegen. Die vorliegende Situation sieht man als paradox an (eine der Varianten der Paradoxe von Zusammenhängen).

Bei einer gründlichen logischen Analyse bleibt in der betrachteten Situation allerdings nichts Paradoxes übrig. In den Formulierungen (1), (2) und (3) ist der Hinweis auf die Bedingungen weggelassen worden, unter denen sie als wahr akzeptiert werden, obwohl diese Bedingungen verschieden sind. Angenommen, V^1 seien die Bedingungen für (1), V^2 die für (2) und V^3 die für (3). Die Bedingungen V^1 können $\sim Y$ oder ein solches Z einschließen, aus dem $\sim Y$ folgt, d. h., $V^1 \to \sim Y$. Die Bedingungen V^2 können $\sim X$ voraussetzen, d. h., $V^2 \to \sim X$. V^1 setzt beispielsweise voraus, daß auf A nicht die Kraft C einwirkt, und V^2 setzt voraus, daß auf A nicht die Kraft B einwirkt. Nehmen wir den einfachen Fall: V^1 ist $V^3 \wedge \sim Y$; V^2 ist $V^3 \wedge \sim X$. Das Vorhandensein von V^3 in V^1, V^2 und V^3 ist erforderlich, um die Problematik überhaupt erörtern zu können. In diesem Falle haben wir:

(1) $X \wedge \sim Y \to (Ra)z$
(2) $\sim X \wedge Y \to (Ra)v$
(3) $X \wedge \sim Y \wedge \sim X \wedge Y \to (Ra)(z \wedge v)$

unter der Bedingung V^3 für alle drei. Da $X \wedge \sim Y \wedge \sim X \wedge Y$ ein Widerspruch ist, enthält (3) nichts Paradoxes. Um jetzt festzustellen, welche Folge sich aus $X \wedge Y$ ergibt, (insbesondere, welche Lage der Körper A einnimmt, wenn auf ihn gleichzeitig die Kräfte B und C einwirken), muß man entweder weitere empirische Untersuchungen durchführen, die

(4) $X \wedge Y \to (Ra)w$

ergeben, oder eine besondere Regel zum Operieren mit Z und V anwenden, die es gestattet, deduktiv W zu erhalten (z. B. die Regel des Kräfteparallelogramms).

Häufig werden die Bedingungen, unter denen (1) und (2) akzeptiert werden, so formuliert, daß der Anschein ihrer Identität entsteht. Der Behauptung (1) gibt man etwa die Form „Wenn X, so bei im übrigen konstanten Bedingungen $(Ra)z$“, und (2) gibt man die Form „Wenn Y, so bei im übrigen konstanten Bedingungen $(Ra)v$“. In beiden Fällen werden die Bedingungen durch denselben Ausdruck „bei im übrigen konstanten Bedingungen angegeben“, obwohl sie schon deshalb verschieden sind, weil im Falle (1) $\sim Y$ vorausgesetzt wird und im Falle (2) $\sim X$.

Wenn man den paradoxen Charakter der betrachteten Situation zuläßt, so verwendet man eine besondere Form von Prädikaten, die implizit einen Verweis auf die Bedingungen enthalten. Dies geschieht insbesondere durch den Ausdruck „Tendenz" (deshalb nennen wir solche Prädikate *Tendenzprädikate*). So verwendet man anstelle des Ausdrucks „Wenn auf den Körper A die Kraft B einwirkt, so verrückt A in Richtung α um den Abstand β (unter der Bedingung, daß keine anderen Kräfte auf A einwirken)" den kürzeren Ausdruck „Wenn auf den Körper A die Kraft B einwirkt, so hat A die Tendenz, in Richtung α um den Abstand β zu verrücken". In diesem Falle fixiert unsere Aussage, ganz gleich, welche Kräfte auf A einwirken und wohin sich A bewegt, nicht die faktische Sachlage, sondern den Anteil der Kraft B in ihr. Dabei nehmen unsere Aussagen die Form an

(1) $X \to (Ra)z^*$
(2) $Y \to (Ra)v^*$,

wobei Z^* und V^* nichts über reale Situationen, sondern etwas über Tendenzen aussagen. In diesem Falle gilt

(3) $X \wedge Y \to (Ra)(z^* \wedge v^*)$,

da $Z^* \wedge V^*$ kein Widerspruch ist. Ein Vorhandensein widersprüchlicher Tendenzen ist kein Widerspruch. Wie sich die Tendenzen Z^* und V^*gemeinsam realisieren, muß wiederum durch die Erfahrung ermittelt werden oder durch eine besondere, auf Grund der Erfahrung aufgestellte Regel.

Ein analoges Bild erhält man, wenn man den Unterschied der Bedingungen im Falle von

(1) $X \to (Ra)y$
(2) $X \to (Ra)z$

wegläßt. Aus (1) und (2) erhält man nach den Regeln der Logik

(3) $X \to (Ra)(y \wedge z)$,

wobei Y und Z unverträglich sind, d. h., $\sim(Y \wedge Z)$.

Am einfachsten ist die folgende Lösung dieser Situation. Aus den Aussagen $X \to (Rc)v$ und $V \to (Rd)y$ erhält man unter der Bedingung $\sim W$

(1) $X \to (Ra)y$,

und aus den Aussagen $X \to (Rc)w$ und $W \to (Rd)z$ erhält man unter der Bedingung $\sim V$

(2) $X \to (Ra)z$.

Wenn man den Unterschied der Bedingungen berücksichtigt oder Tendenzprädikate einführt, so wird das Paradox beseitigt. Denn ein Ereignis kann zu entgegengesetzten Tendenzen führen. Das Resultat der Wechselwirkung der letzteren wird wiederum durch Erfahrung ermittelt. Einen wichtigen Typ von Zusammenhängen bilden Kausalzusammenhänge, die wir im folgenden Abschnitt kurz betrachten.

16.11 Kausalzusammenhänge

Der Ausdruck „A ist eine Ursache von B" wird in verschiedenen Bedeutungen verwendet. Wir führen einige von ihnen an.

Der Ausdruck „A ist eine Ursache von B" wird als Abkürzung für folgende Aussagengesamtheiten verwendet:

1) „Wenn nicht-A, so nicht-B“, „Es tritt A auf“, „Danach tritt B auf“;
2) „Wenn A auftritt, so tritt danach B auf“;
3) „Wenn A nicht wäre, so wäre B nicht“, „B ist vorhanden“;
4) „A und danach B“, „Wenn A nicht gewesen wäre, so wäre B nicht“.

Außerdem meint man, wenn man von einer Ursache spricht, auch eine Antwort auf Fragen des Typs „Was ist die Ursache von A?“. Und auf diese Frage sind unterschiedliche Antworten möglich, insbesondere sieht man als Ursache von A alles das an, was A hervorbringt (was zum Auftreten von A führt), alles das, ohne das A nicht existieren kann, oder die besonderen Bedingungen, die das Auftreten von A vom Auftreten anderer Zustände unterscheiden.

Verwendet man den Ausdruck „sA ist Ursache von sB“, so wird in einigen Fällen vorausgesetzt, daß aus A logisch B nicht folgt, während dies in anderen Fällen nicht vorausgesetzt wird; in den einen Fällen wird vorausgesetzt, daß aus den Aussagen „sA ist Ursache von sB“ und A logisch B folgt, in anderen nicht; in den einen Fällen wird die Transitivität der Kausalrelation vorausgesetzt, in anderen nicht usw.

Es ist also vollkommen aussichtslos, in diesen verschiedenen Verwendungsweisen irgendeine Invariante zu finden, die man als „echte“ („einzig richtige“) Auffassung einer Ursache ansehen könnte. Es ist vielmehr zweckmäßig, von Arten der Kausalbeziehung zu sprechen, unter denen es insbesondere folgende gibt:

$A \rightarrow (R^1 a)b$,
$B \rightarrow (R^2 b)a$,
$\sim A \rightarrow (R^1 \sim a) \sim b$,
$\sim B \rightarrow (R^2 \sim b) \sim a$,
$(A \rightarrow (R^1 a)b) \wedge B \wedge (R^2 b)a$,
$(B \rightarrow (R^2 b)a) \wedge A \wedge (R^1 a)b$,
$(\sim A \rightarrow (R^1 \sim a) \sim b) \wedge A \wedge (R^1 a)b$,
$(\sim B \rightarrow (R^2 \sim b) \sim a \wedge A \wedge (R^2 b)a$,

wobei R^1die Relation „nach diesem“ und R^2 die Relation „vor diesem“ ist.

16.12 Struktur

D1. Die Elemente einer Anhäufung A bilden eine **Struktur** bezüglich der Klasse von Feststellungsverfahren einer Ordnung B genau dann, wenn sich für ein beliebiges Element a dieser Anhäufung ein anderes Element b und ein solches zu B gehörendes Verfahren zur Feststellung einer Ordnung α finden läßt, daß $(a(>_\alpha)b)$ oder $(b(>_\alpha)a)$.

Wenn a und b Individuenvariablen sind und c eine Variable für Verfahren zur Feststellung einer Ordnung ist, so läßt sich das Definiens von *D1* folgendermaßen schreiben:

$$\forall a \exists b \exists c((a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (c \in B) \rightarrow ((a(>_c)b) \vee (b(>_c)a))).$$

Angenommen, eine Anhäufung A^1 bildet eine Struktur C bezüglich B, und A^2 sei eine Anhäufung, die eine Struktur D gleichfalls bezüglich B bildet.

D2. Wenn $A^1 \subset A^2$, so sagen wir, daß C eine **Teilstruktur** der Struktur D bezüglich B ist. Wenn dabei $\sim(A^2 \subset A^1)$, so ist C eine **echte Teilstruktur** der Struktur D.

Angenommen, die Anhäufung A^1 bildet eine Struktur C^1 und A^2 eine Struktur C^2 bezüglich B.

D3. Eine **Vereinigung** der Strukturen C^1 und C^2 nennen wir eine solche Struktur C, die aus den Elementen von A^1 und A^2 bezüglich B gebildet ist, wobei C^1 und C^2 Teilstrukturen von C sind.

Angenommen, B sei eine Klasse von Verfahren zur Feststellung einer Ordnung, in bezug auf die die Anhäufung A eine Struktur C bildet.

D4. Wir sagen, eine Anhäufung von Individuen D **befindet sich innerhalb** von C (ist in C **eingeschlossen**) bezüglich B genau dann, wenn sich alle Elemente von D zwischen Elementen von A bezüglich B befinden.

In Abhängigkeit vom Typ der Elemente einer Struktur unterscheidet man *empirische* und *abstrakte Strukturen.*

16.13 Raum- und Zeittermini

Die einfachsten Raum-Zeit-Termini sind Ordnungsprädikate wie „früher", „später", „gleichzeitig", „weiter", „näher" und „in dem und dem Abstand von". Ihre logischen Eigenschaften werden in der Logik der Ordnung betrachtet. Hier sei nur noch hervorgehoben, daß im Falle einer räumlichen Ordnung empirische Körper und im Falle einer zeitlichen Ordnung empirische Veränderungen (d. h. Veränderungen empirischer Gegenstände, Ereignisse) fixiert werden. Mit den Raum- und Zeit-Ordnungsprädikaten sind keine prinzipiellen Schwierigkeiten logischer Natur verknüpft. Schwierigkeiten hängen hingegen mit solchen Termini wie „der Raum A", „der Raum", „die Zeit B" und „die Zeit" zusammen, die als Subjekte verwendet werden und denen man Prädikate zuspricht, die gewöhnlich empirischen Gegenständen zugesprochen werden. Wir meinen die Verwendung von Ausdrücken wie „Der Raum ist im Bereich A gekrümmt", „Die Zeit für A verlangsamt sich", „Die Zeit für A beschleunigt sich", „Die Zeit verläuft umgekehrt", „Der Raum verengt sich" usw. Dabei werden solche Ausdrücke in letzter Zeit immer häufiger nicht als literarische Varianten oder Metaphern für Aussagen über Raum-Zeit-Beziehungen von Gegenständen, sondern im buchstäblichen Sinne verwendet. Wir wollen sehen, inwiefern dies berechtigt ist.

Termini, die einen gegebenen (konkreten, speziellen) Raum bezeichnen, können durch verschiedene Verfahren eingeführt werden, die sich wiederum in folgende Gruppen einteilen lassen (in der Umgangssprache sind solche Termini Wörter wie „Ort", „Bereich", „Territorium" usw. mit irgendwelchen Beschränkungen. Wir betrachten sie natürlich in verallgemeinerter Form).

Zur ersten Gruppe gehören die Verfahren, bei denen Subjekttermini des Raumes als Teile von Aussagen nach folgendem Schema eingeführt werden: $X \equiv_{Def} Y$ (oder „X genau dann, wenn Y"), wobei X den einzuführenden Raumterminus enthält. Beispielsweise wird der Ausdruck „a befindet sich im Raum A" als Abkürzung oder als Ersatz für den Ausdruck „a befindet sich innerhalb der Raumstruktur A" eingeführt. Hier ist der Terminus „Raumstruktur A" vorher definiert, insofern gegeben ist, welche Gegenstände bezüglich welcher Verfahren zur Feststellung der Ordnung die Raumstruktur A bilden. Das Prädikat „sich innerhalb von ... befinden" ist gleichfalls definiert, so daß der Sinn des Definiens bekannt ist. Der durch die gegebene Definition eingeführte Ausdruck „a befindet sich im Raum A" kann hingegen auf Grund der Regeln der deutschen Sprache als eine Aussage vom Typ $P(a, b)$ mit einem zweistelligen Prädikat dargestellt werden, wobei a das eine Subjekt ist, „der Raum A" das Subjekt b und „das erste befindet sich im zweiten" das Prädikat P ist. Ein anderes Beispiel: „a befindet sich im Raum A" wird als Ersatz für Ausdrücke vom Typ „a befindet sich nicht weit von A", „a befindet sich im Einflußbereich von A" usw. angesehen, deren Sinn als bekannt angenommen wird.

Wir machen auf folgenden Umstand aufmerksam. Bei den betrachteten Einführungsverfahren für Termini werden ganze Aussagen in den Gebrauch eingeführt, die danach nach den Sprachregeln so aufgegliedert werden, daß der Eindruck entsteht, als ob ein gesonderter Terminus für sich eingeführt worden wäre. Dabei wird gewöhnlich die logische Natur dieser Operation nicht erkannt, und der Terminus Raum wird als ein Terminus mit einem selbständigen Sinn angesehen, der irgendeinen Gegenstand bezeichnet.

Zur zweiten Gruppe von Verfahren zur Einführung von Termini gehören solche, die Abstraktionen oder Annahmen benutzen. Angenommen, die empirischen Gegenstände $a_1, \ldots, a_n$ bilden die Raumstruktur A bezüglich einer Menge von Verfahren zur Feststellung der Ordnung. Es sind zumindest folgende drei verschiedene Termini für einen gegebenen Raum A möglich.

Zur Bildung des Terminus, der den Raum A im ersten Sinne bezeichnet, geht man von der Raumstruktur A aus und abstrahiert von allen Gegenständen, die sich in ihr befinden, und gleichfalls davon, daß gerade die Gegenstände $a_1, \ldots, a_n$ sie bilden. Dieser Abstraktion kann man die Form von Annahmen geben, die vollkommen der gewöhnlichen Erfahrung entsprechen: Die innerhalb von A befindlichen Gegenstände können aus ihr herausgenommen werden (und ein Grenzfall dieser Annahme ist der leere oder reine Raum ohne Gegenstände), beliebige Gegenstände von passender Ausdehnung können in A angesiedelt werden, und die Gegenstände $a_1, \ldots, a_n$ können durch beliebige andere Gegenstände ersetzt werden, die geeignet sind, die Grenzpunkte der Struktur A zu fixieren. Als Ergebnis dieser Annahmen versteht man unter dem gegebenen Raum von A nur das, was zwischen irgendwelchen Gegenständen eingeschlossen ist, die so angeordnet sind, wie die Gegenstände $a_1, \ldots, a_n$ in der Struktur A. Die Individualität des gegebenen Raumes wird durch die Lage der Struktur A insgesamt bezüglich anderer Gegenstände bestimmt.

Bei der Bildung des Terminus, der den Raum A im zweiten Sinne bezeichnet, wird das gleiche wie im ersten Fall durchgeführt, mit Ausnahme der Annahmen bezüglich der Gegenstände $a_1, \ldots, a_n$. Sie werden als Grenzpunkte des gegebenen Raumes angesehen. Bei der Bildung eines Terminus für einen gegebenen Raum A im dritten Sinne wird zugelassen, daß die Raumstruktur A ihn mit irgendwelchen Gegenständen bildet, die sich innerhalb von ihr befinden. Hier sind verschiedene Möglichkeiten offen: Bei einer dieser Varianten werden in den Raum A alle Gegenstände eingeschlossen, die sich in A befinden, und in diesem Falle ist der gegebene Raum A das Stück Materie, das in der Raumstruktur A eingeschlossen ist; bei einer anderen Variante werden in ihn nur bestimmte Arten von „feiner“ Materie eingeschlossen (insbesondere solche, die man physisch prinzipiell unter keinen Umständen aus A entfernen kann).

Die Besonderheit der oben angewandten Abstraktionen besteht darin, daß die mit ihrer Hilfe eingeführten Termini keiner logischen Explikation fähig oder aber überflüssig sind. Dies wird deutlich, wenn wir etwa das Schema zur Einführung des ersten Terminus in Form einer Definition schreiben, denn dann erhalten wir: Das Recht, irgend etwas mit dem Terminus „Raum“ zu benennen, hängt vom Ausschluß aller Gegenstände aus einer Raumstruktur A ab; da letzteres aber unmöglich ist, darf der Terminus nicht verwendet werden. Analog verhält es sich für den zweiten Terminus. Im dritten Fall versteht man unter dem Raum A einfach eine Anhäufung von Gegenständen überhaupt oder von Gegenständen einer bestimmten Art, die sich innerhalb der Raumstruktur A befinden.

Zur dritten Gruppe gehören Operationen zur Einführung von Termini durch Einschränkung allgemeinerer Termini. So ist etwa der Terminus „Raum in Bezirk A“ ein Ergebnis einer Einschränkung des Terminus „Raum“. Dabei müssen aber die allgemeinen Termini nach den Verallgemeinerungsregeln für Termini, die spezielle Räume bezeichnen, eingeführt werden.

Der Terminus „Raum“ wird in zwei Bedeutungen verwendet: 1) als Gattungsterminus in bezug auf Termini, die konkrete Räume bezeichnen; 2) als Terminus, der die Vereinigung oder

Summe aller speziellen Räume bezeichnet. In der zweiten Bedeutung bezieht sich auf den Terminus alles, was oben gesagt wurde, mit einer Ergänzung. Bei der Einführung des Terminus „Raum insgesamt“ nimmt man (explizit oder implizit) eine hypothetische Raumstruktur an, die eine Vereinigung aller Raumstrukturen ist, und in bezug auf diese Struktur werden die oben angegebenen Abstraktionen durchgeführt. Dabei verliert die Unterscheidung des ersten und zweiten Terminus ihren Sinn, und der Unterschied zwischen dem ersten und dritten nimmt folgende Form an:

1) der Raum ist das Behältnis aller Dinge;
2) der Raum ist die Welt aller (oder ausgewählter) Dinge.

Analog verhält es sich mit den Zeittermini. Bei Termini der zweiten Gruppe wählt man eine Zeitstruktur B, die durch die Ereignisse $b_1, \ldots, b_n$ gebildet wird (im einfachsten Fall ist dies das Intervall zwischen den Ereignissen b_1 und b_2), und trifft Annahmen bezüglich der Ereignisse $b_1, \ldots, b_n$ und der Ereignisse innerhalb von B, ähnlich den Annahmen für Termini eines gegebenen Raumes A. Wir heben hervor, daß auch diese Annahmen ihren Grund in der Erfahrung der Menschen haben (es gibt Raumbereiche, in denen scheinbar nichts vor sich geht; die Menschen können ihrem Willen gemäß bestimmte Veränderungen hervorrufen oder ihr Auftreten verhindern usw.). Die Zeit überhaupt (insgesamt) tritt dabei als Vereinigung aller konkreten Zeiten oder (in einem anderen Sinne) als deren Verallgemeinerung auf. Im Falle der Vereinigung der Zeit insgesamt bleiben immer noch zwei Auffassungen: 1) die Zeit ist die reine Dauer; 2) die Zeit ist die Welt aller oder ausgewählter Ereignisse. Wie wir sehen, offenbart sich eine Vielzahl von Bedeutungen von Raum-Zeit-Termini.

Nebenbei sei vermerkt, daß das Schicksal vieler Aussagen mit Raum-Zeit-Termini vollkommen davon abhängt, welche (expliziten oder impliziten) Definitionen für sie gewählt werden. Wenn beispielsweise behauptet wird, daß der Raum im Bereich irgendeines Sternes gekrümmt ist, so bedeutet diese Behauptung solange nichts, bis gesagt ist, in welchem Sinne hier der Terminus „Raum“ verwendet wird. Wenn er im ersten Sinne verwendet wird, so ist diese Behauptung sinnlos, denn gekrümmt sein kann nur eine Reihe von Gegenständen bezüglich einer anderen Reihe; und bei dem ersten Raumbegriff ist dies alles ausgeschlossen. Der Terminus „Raum“ wird hier also im dritten Sinne der Termini der zweiten Gruppe verwendet.

Die Bearbeitung der Raum-Zeit-Terminologie ist mit der Einführung der entsprechenden Subjekte nicht beendet. Wenn die letzteren eingeführt sind, bedeutet das nicht, daß wir sinnvolle Aussagen erhalten, indem wir sie mit beliebigen Prädikaten vereinigen. Die Bedingungen der Prädikation von Raum und Zeit müssen für eine ganze Reihe von Prädikaten erst noch festgelegt werden. Betrachten wir z. B. die Behauptung von der Unendlichkeit des Raumes. Sie hat nur Sinn als Abkürzung für folgende Situation: Es gibt ein Verfahren zur Feststellung der Ordnung, nach dem Raumstrukturen geordnet werden; und diese geordnete Reihe ist unendlich. Anderenfalls hat die Behauptung keinen Sinn.

Die Problematik der Bedingungen, unter denen Raum- oder Zeitsubjekten Prädikate zugeschrieben werden können, betrachten wir am Beispiel des Existenzprädikates und der Veränderungsprädikate. In welchem Sinne spricht man von der Existenz des Raumes und der Zeit? Wir lassen den oben betrachteten Unterschied in der Terminologie außer acht und heben das Gemeinsame hervor: 1) fragt man nach der Existenz eines gegebenen Raumes und einer gegebenen Zeit und des Raumes und der Zeit überhaupt; 2) fragt man nach der Existenz von Raum- und Zeitstrukturen.

Die erste Frage bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten: Die Frage nach der Existenz eines beliebigen Raumes (und einer beliebigen Zeit) und die Frage nach der Existenz des Raumes (und der Zeit) überhaupt fallen zusammen und lassen sich auf die Frage nach der Existenz eines gegebenen Raumes (einer gegebenen Zeit) zurückführen, ähnlich, wie sich die Frage nach der Existenz eines Tisches im allgemeinen auf die Frage nach der Existenz irgendeines konkreten Tisches zurückführen läßt.

Die Problematik der Existenz von Strukturen wird auf die Frage der Existenz von Ordnungsrelationen $a\alpha Rb$ zurückgeführt, und die Existenz der letzteren wird in Abhängigkeit von der Existenz von a und b definiert: Die Relation $a\alpha Rb$ existiert genau dann, wenn a und b existieren und dabei die Beziehungen zwischen ihnen gerade so beschaffen sind, wie in „$a\alpha Rb$" behauptet wird.

Da Raumstrukturen empirische Gegenstände bilden, so folgt aus der Definition des Existenzprädikates selbst, daß der Raum nicht ohne empirische Gegenstände existiert. Dies ist keine Erfahrungstatsache, sondern gerade eine logische Folgerung aus den Definitionen. Da man sich nicht nur in der Umgangssprache, sondern auch in der Wissenschaft mit impliziten Definitionen begnügt, bleibt dieser Umstand unbemerkt, und die These von der Unmöglichkeit der Existenz des Raumes ohne Gegenstände wird als Beobachtungsergebnis oder als Postulat angesehen. Analog verhält es sich mit der Zeit: Die Zeit existiert nicht ohne empirische Veränderungen, und dies ist eine Folgerung aus den Definitionen und kein Beobachtungsergebnis oder Postulat.

Ein gegebener Raum A existiert für uns genau dann, wenn die gegebene Raumstruktur A für uns existiert (oder wenn die Gegenstände existieren, die die Raumstruktur A bilden, im Falle des ersten Sinnes des Terminus). Und die letztere existiert für uns genau dann, wenn die Gegenstände $a_1, \ldots, a_n$ (oder irgendwelche Gegenstände an entsprechenden Orten) existieren und ihre Ordnung gerade so wie in der Definition von A ist. Der Raum überhaupt existiert genau dann, wenn irgendein gegebener Raum existiert. Es sei hervorgehoben, daß hier die Existenz der Gegenstände, die die gegebene Raumstruktur bilden, zu einer gegebenen Zeit vorausgesetzt wird, d. h., es wird die „Gleichzeitigkeit" der Gegenstände vorausgesetzt.

Die Definitionen der Existenz für die Zeit sind analog, doch es sei daran erinnert, daß nicht beständige empirische Gegenstände, sondern Veränderungen von Gegenständen zeitliche Strukturen bilden. Und hier ist die „Verschiedenzeitlichkeit" der Veränderungen wichtig. Die Veränderungen, die eine gegebene Zeitstruktur bilden, werden von uns beobachtet und existieren für uns folglich zu verschiedenen Zeiten, doch die betreffende Zeitstruktur selbst existiert für uns gerade dann, wenn sie von uns fixiert wird.

Es hat also keinen Sinn, von der Zeit der Existenz einer gegebenen Zeit zu reden, sondern nur von einem Raumbereich, in dem wir die Veränderungen beobachten, die die gegebene Zeitstruktur bilden. Man könnte sagen, diese Veränderungen seien „gleichräumig". Auch die Behauptung, daß Raum und Zeit nicht unabhängig voneinander existieren, ist also eine Folgerung aus der Definition der Existenz.

Wenn man von der Veränderung eines Gegenstandes a spricht, so wird vorausgesetzt, daß seine Zustände zu einer Zeit t^1 und zu einer Zeit t^2 fixiert sind, wobei eines von t^1 und t^2 das andere in der Ordnung übertrifft. Dabei meint man ein und denselben (den gleichen) Gegenstand a. Obwohl der Ausdruck „ein und derselbe" („der gleiche") klar und verständlich zu sein scheint, verdient er unsere Aufmerksamkeit, denn von ihm hängt das Schicksal vieler Behauptungen und sogar mancher Konzeptionen ab.

Um empirische Gegenstände a und b als ein und denselben (den gleichen) Gegenstand ansehen zu können, müssen für sie folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) zu einer beliebigen Zeit ist der Gegenstand a mit dem Gegenstand b in einer beliebigen räumlichen Ordnung bezüglich eines beliebigen Verfahrens zur Feststellung der Ordnung identisch;
2) immer, wenn einer von a und b existiert, existiert auch der andere von ihnen (hieraus

erhalten wir nach der Kontrapositionsregel: wenn der eine von ihnen nicht existiert, so existiert auch der andere nicht).

Wenn wir behaupten, daß a und b ein und derselbselbe Gegenstand sind, so sind die angegebenen Behauptungen 1 und 2 erfüllt.

Wir wenden uns Strukturen zu und betrachten eine Struktur A, die von den Gegenständen $a_1, \ldots, a_n$ gebildet wird, und eine Struktur B, die von den Gegenständen $b_1, \ldots, b_m$ gebildet wird. Eine Definition des Ausdrucks „ein und dieselbe“ in bezug auf Strukturen muß offenbar vor allem die Beziehungen der Gegenstände, die die Strukturen bilden, berücksichtigen. Um A und B als ein und dieselbe Struktur ansehen zu können, muß gelten:

1) $m = n$;
2) a_i und b_i sind ein und derselbe Gegenstand.

Es bleiben noch die Beziehungen zwischen den Gegenständen, die die Struktur bilden. Soll man nun die Identität der Beziehungen in A und B in die Definition des Ausdrucks „ein und dieselbe“ in bezug auf Strukturen einbeziehen oder nicht? In der Natur gibt es nichts, was uns zu dieser oder jener Entscheidung zwingen würde. Bei einer Analyse der Verwendung des betrachteten Ausdrucks trifft man sowohl die eine als auch die andere Variante.

Wir betrachten eine Raumstruktur A, die von den Gegenständen $a_1, \ldots, a_n$ gebildet wird. Um A zur Zeit t^1 und A zur Zeit t^2 als ein und dieselbe Struktur anzusehen, ist es notwendig, daß für jedes a_i folgendes gilt: a_i zur Zeit t^1 und zur Zeit t^2 sind ein und derselbe Gegenstand. Genügt nun diese Bedingung oder nicht? Muß man in der Definition noch angeben, daß alle Beziehungen zwischen den a_i zur Zeit t^2 die gleichen bleiben wie zur Zeit t^1?

Wenn man eine solche zweite Bedingung nicht in die Definition mit aufnimmt (als nicht nötig ansieht), so haben Raumstrukturen auf Grund der Definitionen die Möglichkeit, sich zu verändern (d. h., die Behauptung „A hat sich verändert“ und andere abgeleitete Behauptungen über die Größe der Veränderungen, über die Geschwindigkeit usw. können wahr sein). Wenn man diese Bedingung hingegen als unumgänglich ansieht und in die Definition einschließt, so sind Raumstrukturen definitionsgemäß unveränderlich: Wenn sich die Beziehungen der a_i zur Zeit t^2 im Vergleich zu t^1 nicht verändert haben, so hat sich die Struktur A nicht verändert; wenn sie sich hingegen verändert haben, so haben wir nicht das Recht zu sagen, daß A zur Zeit t^1 und A zur Zeit t^2 ein und dieselbe Struktur ist, und es fehlen die Bedingungen zur Verwendung der Veränderungsprädikate.

Den Raumstrukturen selbst passiert durch ein Akzeptieren der zweiten Bedingung nichts Schreckliches, es hindert nicht daran, daß ein Wechsel der einen Strukturen durch andere vor sich geht. Und alles, was sich ohne ein Akzeptieren der zweiten Bedingung sagen läßt, kann man auch mit ihr sagen, nur etwas anders ausgedrückt (in einer anderen Variante der Sprache). Wir wollen hier deutlich machen, daß der Sinn von Behauptungen vom Sinn der in ihnen vorkommenden Termini abhängt.

Wir machen noch auf einen anderen interessanten Umstand aufmerksam. Ein Gegenstand a ist zu einer beliebigen Zeit ein und derselbe Gegenstand a. Hier geht kein Verweis auf die Zeit in den Bestand des Terminus ein. Wenn wir hingegen einen Verweis auf die Zeit in den Terminus einführen, d. h., die Termini „a, genommen zur Zeit t^1“ („a, der zur Zeit t^1 existiert“) und „a, genommen zur Zeit t^2“ („a, der zur Zeit t^2 existiert“) bilden, und wenn dabei eines von t^1 und t^2 das andere übertrifft, so kann man die durch sie bezeichneten Gegenstände auf Grund des zweiten Punktes der Definition nicht als ein und denselben Gegenstand ansehen. Sie sind nur Repräsentanten von ein und derselben Klasse von Gegenständen a. Wenn also bei der Angabe einer Raumstruktur A Bezeichnungen der sie bildenden Gegenstände von der eben betrachteten Art auftreten, so können wir die Veränderungsprädikate nicht anwenden, und alle Aussagen über Veränderungen von Raumstrukturen erweisen sich als unüberprüfbar. Man kann sie in beliebiger Form und Quantität und in der vollständigen Gewißheit äußern, daß sie nicht widerlegt werden. Sie werden jedoch auch nicht bestätigt - das ist der Preis für jeden Unsinn, wie interessant er auf den ersten Blick auch scheinen mag.

Wir wenden uns nun Zeitstrukturen zu. Um hier „ein und dieselbe Zeitstruktur“ sagen zu können, ist erforderlich, daß ein und dieselben Ereignisse sie bilden. Wir wählen den einfachsten Fall - eine Struktur B von zwei Ereignissen a und b. Die Zeit der Existenz von B ist die Zeit, die von ihr selber gebildet wird. Angenommen, a vollzog sich in t^1 und b in t^2. Angenommen, das Intervall zwischen t^1 und t^2 ist die Zeit t_1. Um über eine Veränderung urteilen zu können, muß man die gleiche Struktur B zu einer anderen Zeit t_2 wählen. Dabei sind t^1 und t_1 wie auch t^2 und t_2 verschiedene Zeiten. Der Definition der Existenz von Ereignissen gemäß existieren die Ereignisse a und b aber nicht in t_2. Wenn wir Ereignisse nehmen, die a und b analog sind, aber in t_2 existieren, so existieren sie definitionsgemänicht in t_1. Hier ist also sogar unabhängig von einer Bedingung, die der zweiten Bedingung für Raumstrukturen analog wäre, keine der Aussagen über Veränderungen von Zeitstrukturen überprüfbar. Hier kann man nicht sagen, daß eine Zeitstruktur sich verändert hat. Man kann aber auch nicht sagen, daß sie sich nicht verändert hat: Um zu akzeptieren, daß sich B nicht verändert hat, müßte man dieselben Ereignisse a und b in t_2 reproduzieren, was auf Grund der Definition unmöglich ist. Alle Aussagen über Veränderungen der Zeit (über die Beschleunigung, Verlangsamung usw.) sind also ebenso wie die Aussagen über ihre Unveränderlichkeit unüberprüfbar.

Ist ein Akzeptieren solcher Aussagen harmlos? Keineswegs. Wenn wir die Behauptung akzeptieren, daß Zeitstrukturen sich verändern, so kommen wir auf Grund des Sinnes der entsprechenden Termini zu Folgerungen, die den gewählten Definitionen widersprechen (z. B., daß ein und dasselbe Ereignis sich zu verschiedenen Zeiten vollzieht). Ein Akzeptieren solcher Aussagen bedeutet den Verzicht auf Definitionen, eine Veränderung des Sinnes der Terminologie usw. Dabei handelt es sich nicht um physikalische Annahmen, sondern nur um einen nachlässigen Umgang mit Wörtern. Man kann nur von einer Veränderung eines Zeitintervalls zwischen verschiedenen Repräsentanten einer Klasse von Ereignissen usw. sprechen. Das hat aber nichts mit einer Veränderung von Zeitstrukturen und der Zeit zu tun. Ist es möglich, daß an einem Ort der Welt die Zeit anders (schneller, langsamer, umgekehrt) verläuft als an einem anderen? Ungeachtet dessen, daß es schon sinnlos ist, von einer Bewegung der Zeit zu sprechen, wenn man sich streng zu den Wörtern verhält und die Bewegung als eine Form der Veränderung betrachtet, werden hier Wörter hinzugefügt, die das Ergebnis eines Vergleichs sind (z. B. das Wort „schneller“). Wir beachten die erwähnte Sinnlosigkeit nicht und formulieren das Problem auf akzeptable Weise: Angenommen, die Ereignisse a_1 und a_2 sind Elemente einer Klasse von Ereignissen Ka (d. h. gleichartige Ereignisse) und b_1 und b_2 der Klasse Kb. Wir nehmen weiter an, die Messung der Zeit zwischen a_1 und b_1 führte zu dem Ergebnis $a_1(R^1\alpha)b_1$ und die der Zeit zwischen a_2 und b_2 zu $a_2(R^2\beta)b_2$. Um diese Zeiten zu vergleichen, ist ein einheitliches Verfahren zur Feststellung der zeitlichen Beziehung γ sowohl für das Ereignispaar a_1 und b_1 als auch für das Paar a_2 und b_2 erforderlich. Erst nachdem wir $a_1(R^3\gamma)b_1$ und $a_2(R^4\gamma)b_2$ erhalten haben, können wir unser Urteil über die Zeitbeziehungen von a_1 und b_1 einerseits und a_2 und b_2 andererseits bezüglich γ äußern.

Literaturverzeichnis

Ackermann, W., 1956, Begründung einer strengen Implikation, in: Journal of Symbolic Logic, vol. 21, Nr. 2.

Ackermann, W., 1958, Über die Beziehung zwischen strikter und strenger Implikation, in: Dialectica, vol. 12, Nr. 47/48.

Ackermann, W., 1971, Solvable Cases of the Decision Problem, Amsterdam.

Ajdukiewicz, K., 1958, Abriß der Logik, Berlin.

Ajdukiewicz, K. (Ed.), 1965, The Foundation of Statements and Decisions, Proceedings of the International Colloquium on Methodology of Sciences held in Warsaw 18-23 September 1961, Warsawa.

Ajdukiewicz, K., 1966, Z metodologii nauk dedukcyjnych, Lwów 1921. Englische Übersetzung: From the Methodology of Deductive Sciences, in: Studia Logica, Bd. XIX.

Ajdukiewicz, K., 1974, Pragmatic Logic, Dordrecht/Boston/Warzaw.

Ajdukiewicz, K., 1978, The Scientific World-Perspective and other Essays, 1931-1963, Dordrecht/Boston.

Anderson, A. R., 1957, Review of Wilhelm Ackermann „Begründung einer strengen Implikation“, in: Journal of Symbolic Logic, vol. 22.

Anderson, A. R./Belnap, N. D., 1958, A modification of Ackermann's „rigorous implication“, in: Journal of Symbolic Logic, vol. 23.

Anderson, A. R., 1960, Completeness theorems for the systems E of entailment and EQ of entailment with quantification, in: Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Bd. 6.

Anderson, A. R./Belnap, N. D., 1962, The pure calculus of entailment, in: Journal of Symbolic Logic, vol. 27.

Anderson, A. R./Belnap, N. D., 1963, First Degree Entailments, in: Mathematische Annalen, vol. 249.

Anderson, A. R./Belnap, N. D., 1975, Entailment, vol. 1, Princeton.

Aristoteles, 1948, Organon, Bd. II, Leipzig.

Asser, G., 1959, Einführung in die mathematische Logik, Teil I, Aussagenkalkül, Leipzig.

Asser, G., 1972, Einführung in die mathematische Logik, Teil II, Prädikatenkalkül der ersten Stufe, Leipzig.

Asser, G., 1981, Einführung in die mathematische Logik, Teil III, Prädikatenlogik höherer Stufe, Leipzig.

Assing, H., 1979, Das konditionallogische System K. Ein Beitrag zur logischen Analyse der Umgangssprache, unveröff. Dissertation B, Berlin.

Assing, H., 1980, Neue Überlegungen zur Konditionallogik, in: Deutsche Zeischrift für Philosophie, H. 12.

Ayer, A. J., 1970, Sprache, Wahrheit und Logik, Stuttgart.

Bacon, F., 1962, Das Neue Organon, Berlin.

Baumgarten, A./Bloch, E./Harich, W./Schröter, K. (Hrsg.), 1953, Protokoll der philosophischen Konferenz über Fragen der Logik am 17. und 18. November 1951 in Jena, in: 1. Beiheft zur Deutschen Zeitschrift für Philosophie, Berlin.

Becker, O., 1952, Untersuchungen über den Modalkalkül, Meisenheim.

Becker, O., 1964, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg/München.

Berka, K./Kreiser, L., 1971, Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Berlin.

Bernays, P., 1926, Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der ‚Principia Mathematica', in: Mathematische Zeitschrift, Bd. XXV.

Bernays, P./Myhill, J., 1955, On the interpretation of the sign ‚$\supset$', in: Journal of Symbolic Logic, vol. 20.

Beth, E. W., 1955, Semantic entailment and formal derivability, in: Mededelingen der Koninklije Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, ns. 18.

Beth, E. W., 1959, The foundations of mathematics, Amsterdam.

Beth, E. W., 1962a, Formal Methods, Dordrecht.

Beth, E. W., 1962b, Umformung einer abgeschlossenen Ableitung oder semantischen Tafel in eine natürliche Ableitung auf Grund der derivativen bzw. klassischen Implikationslogik, in: M. Käsbauer/F. v. Kutschera (Hrsg.), Logik und Logikkalkül, München.

Black, M., 1983, The Prevalence of Humbug and other Essays, Ithaca/London.

Bocheński, J. M., 1956, Formale Logik, Freiburg/München.

Bocheński, J. M., 1968, Logik der Religion, Köln.

Bocheński, J. M., 1974, Was ist Autorität? Einführung in die Logik der Autorität, Freiburg.

Bolck, F. (Hrsg.), 1979, „Begriffsschrift". Jenaer Frege-Konferenz, Wissenschaftliche Beiträge der Friedrich-Schiller-Universität Jena, Jena.

Bolzano, B., 1929-31, Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter, Leipzig Bd. I-II, Bd. III, Bd. IV.

Boole, G., 1951, Collected logical works, 2 Bde., Chicago/New York.

Borkowski, L., 1961, Dydaktyczne ujecie zerojedynkowej methody sprawdzania wyrazen wezszego jednoargumentowego rechunku predykatów, in: Studia Logica, Nr.XI.

Borkowski, L., 1976, Formale Logik, Berlin.

Brouwer, L. E. J., 1924, Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig/Berlin/Stuttgart, Bd. 33.

Brouwer, L. E. J., 1925, Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, in: Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 154, H. 1.

Brouwer, L. E. J., 1975, Collected Works, vol. 1. Philosophy and Foundations of Mathematics, ed. by A. Heyting, Amsterdam/New York/Oxford.

Bucher, T., 1987, Einführung in die angewandte Logik, Berlin/New York.

Bühler, K., 1934, Sprachtheorie. Die Darstellungsfunktion der Sprache, Jena.

Bueno, E., 1972, Logica modal, Habana.

Bunge, M., 1955, Causality, The place of the causal principle in modern science, Cambridge (Mass.).

Bunge, M., 1962, Intuition and Science, New York.

Bunge, M., 1967, Scientific Research, 2 Bde., Berlin/Heidelberg/New York.

Burks, A. W., 1951, The logic of causal propositions, in: Mind, vol. 60.

Burks, A. W., 1955, Dispositional statements, in: Philosophy of Science, vol. 22.

Cantor, G., 1966, Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Hildesheim.

Carnap, R., 1934, Logische Syntax der Sprache, Wien, Neuaufl.: 1968, Wien/new York.

Carnap, R., 1950, Testability and Meaning, New Haven.

Carnap, R., 1966, Philosophical foundations of physics, New York/London.

Carnap, R., 1968a, Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Wien/New York.

Carnap, R., 1968b, s. Carnap 1934.

Carnap, R., 1971, Scheinprobleme in der Philosophie, Frankfurt a. M.

Carnap, R., 1972, Bedeutung und Notwendigkeit, Wien/New York.

Celiščev, V. V., 1976, Logika suščestvovanija, Novosibirsk.

Celiščev, V. V., 1977, Filosofskie problemy semantiki vozmožnych mirov, Novosibirsk.

Celiščev, V. V., 1978, Ponjatie ob-ekta v modal'noj logike, Novosibirsk.

Chellas, B. F., 1980, Modal Logic: An Introduction, Cambridge/London/New York/New Rochelle/Melbourne/Sydney.

Chisholm, R. M., 1946, The Contrary-to-Fact Conditional, in: Mind, vol. 55.

Chomsky, N., 1970, Aspekte der Syntax-Theorie, Berlin.

Church, A., 1936, A note on the Entscheidungsproblem, in: Journal of Symbolic Logic, vol. 1.

Church, A., 1956, Introduction to mathematical logic, vol. I, Princeton/New Jersey.

Condillac, E. B. de, 1977, Essai über den Ursprung der menschlichen Erkenntnisse, Leipzig.

Cooper, W., 1968, The propositional logic of ordinary discourse, Inquiry, 11.

Cresswell, M. J., 1979, Die Sprachen der Logik und die Logik der Sprache, Berlin/New York.

Čupin, P. P. (Hrsg.), 1975, Logika i fizika, Sverdlovsk.

Curry, H. B., 1963, Foundation of Mathematical Logic, New York/San Francisco/Toronto/London.

Dalen, D. van, 1973, Lectures on intuitionism, in: Lecture notes in mathematics, Berlin/Heidelberg.

Dalla Chiara, M. L./Franchia, G. T. di, 1991, Identity questions from quantum theorie, in: Abstracts, Vol. I, Logic. 9th International Congress of Logic, Methodologie and Philosophy of Science, Uppsala.

Danneberg, L./Kamlah, A./Schäfer, L. (Hrsg.), 1994, Hans Reichenbach und die Berliner Gruppe, Braunschweig/Wiesbaden.

Dölling, E. (Hrsg.), 1987, Logik in der Semantik - Semantik in der Logik, Akademie der Wissenschaften der DDR, Berlin.

Dragalin, A. G., 1979, Mathematiceskij intuicionism. Vvedenie v teoriju dokazatel'stv, Moskva.

Dubislav, W., 1927, Über die Definitionen, Berlin.

Dunn, J. M., 1972, A modification of Parry's analytic implication, in: Notre Dame Journal of Formal Logic, vol 13, Nr. 2.

Dunn, J. M., 1980, A sieve for Entailments, in: Journal of Philosophical Logic, Nr. 9.

Eberle, R. A., 1970, Nominalistic systems, Dordrecht.

Enzensberger, H. M. (Hrsg.), 1967, Neue Mathematik, Grundlagenforschung, Theorie der Automaten, Kursbuch, Frankfurt a. M.

Faye, J./Scheffler, U./Urchs, M. (Eds.), 1994, Logic and Causal Reasoning, Berlin.

Faye, J./Scheffler, U./Urchs, M. (Eds.), 1997, Perspectives on Time, Dordrecht/Boston/London.

Feys, R., 1965, Modal Logics, Louvain/Paris.

Fraenkel, A. A./Bar-Hillel, Y., 1958, Foundation of Set Theory, Amsterdam.

Frege, G., 1879, Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle, Wiederabdruck in Berka/Kreiser 1971.

Frege, G., 1893/1903, Grundgesetze der Arithmetik, Bd. I/Bd. II, Jena.

Frege, G., 1962, Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien, Göttingen.

Frege, G., 1966, Logische Untersuchungen, Göttingen.

Frege, G., 1973, Schriften zur Logik. Aus dem Nachlaß, Berlin.

Frege, G., 1975, Funktion, Begriff, Bedeutung, Göttingen.

Freudenthal, H., 1968, Einführung in die Sprache der Logik, München.

Gentzen, G., 1934-35, Untersuchungen über das logische Schließen, in: Mathematische Zeitschrift 39, Wiederabdruck in Berka/Kreiser 1971.

Gethmann, C. F., 1979, Protologik. Untersuchungen zur formalen Pragmatik von Begründungsdiskursen, Frankfurt a. M.

Gethmann, C. F. (Hrsg.), 1980, Theorie des wissenschaftlichen Argumentierens, Frankfurt a. M.

Gethmann, C. F., 1984, Formale Logik und Dialektik. Die Logikdiskussion in der DDR 1951-1958, in: Burrichter, C. (Hrsg.), Ein kurzer Frühling der Philosophie. DDR-Philosophie in der ‚Aufbauphase', Paderborn/München/Wien/Zürich.

Glivenko, V. M., 1928, Sur la logique de M. Brouwer, in: Academie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe de Sciences, Bruxelles, serie 5, vol. XIV.

Glivenko, V. M., 1929, Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, in: Ibid., vol. XV.

Gödel, K., 1930, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, in: Monatshefte für Mathematik und Physik, 37.

Gödel, K., 1931, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, in: Monatshefte für Mathematik und Physik, 38.

Gödel, K., 1932, Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, in: Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 69, Wiederabdruck in Berka/Kreiser 1971.

Gödel, K., 1933a, Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, in: Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 4, Wiederabdruck in Berka/Kreiser 1971.

Gödel, K., 1933b, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, in: Ergebnisse eines mathemtatischen Kolloquiums, 4, gekürzter Nachdruck in Berka/Kreiser 1971.

Goodman, N., 1947, The Problem of Counterfactual Conditions, in: The Journal of Philosophy, vol. 44.

Goodman, N., 1951, The structure of appearance, Cambridge (Mass.).

Goodman, N., 1975, Tatsache, Fiktion, Voraussage, Frankfurt a. M.

Goodman, N., 1988, Ways of Worldmaking, Indianapolis.

Griffin, N., 1977, Relative Identity, Oxford.

Griss, G. F. C., 1955, La mathématique intuitioniste sans négation, in: Nieuw Archief voor wiskunde, H. 3.

Haas, G., 1984, Konstruktive Einführung in die formale Logik, Mannheim/Wien/Zürich.

Hasenjaeger, G., 1962, Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik, Freiburg/München.

Hegel, G. W. F., 1951, Wissenschaft der Logik, Bd. 2, Leipzig.

Hegel, G. W. F., 1968, Jenenser Logik. Metaphysik und Naturphilosophie, Berlin.

Heinekamp, A./Schupp, F. (Hrsg.), 1979, Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart, Wiesbaden.

Hempel, C. G., 1960, Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science, Chicago.

Henkin, L., 1949, The completeness of the first-order functional calculus, in: Journal of Symbolic Logic, vol. 14, p. 159-166.

Heyting, A., 1930, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, Berlin.

Heyting, A., 1956, Intuitionism, Amsterdam.

Hilbert, D./Bernays, P., 1939, Grundlagen der Mathematik, Berlin, Bd. I, Bd. II.

Hilbert, D./Ackermann, W., 1959, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Hughes, G. E./Cresswell, M. J., 1978, Einführung in die Modallogik, Berlin/New York.

Husserl, E., 1901, Logische Untersuchungen, Halle.

Ivin, A. A., 1973, Logika norm, Moskva.

Iwin, A. A., 1967, Deontische Logik, in: Sowjetwissenschaft, Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge, H. 6.

Iwin, A. A., 1969, Zur Bewertungslogik, in: Sowjetwissenschaft, Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge, H. 7.

Iwin, A. A., 1975, Grundlagen der Logik der Wertungen, Berlin.

Jackson, F. (Hrsg.), 1991, Conditionals, Oxford.

Janovskaja, S. A., 1972, Methodologiceskie problemy nauki, Moskva.

Jaśkowski, St., 1934, On the Rules of Suppositions in Formal Logic, in: Studia Logica, vol. 1, H. 1.

Jaśkovski, St., 1936, Recherches sur le systéme de la logique intuitioniste, in: Actes du Congrès International de philosophie Scientifique, VI. Philosophie des matématiques, Paris, engl. Übers. in: McCall 1967.

Johansson, I., 1936, Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, in: Compositio Mathematica, H. 1.

Kalmár, L., 1935, Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, in: Acta Scientiarum Mathematicarum, Nr. 4.

Kambartel, F./Mittelstraß, J. (Hrsg.), 1973, Zum normativen Fundament der Wissenschaft, Frankfurt a. M.

Kamlah, W./Lorenzen, P., 1967, Logische Propädeutik, Mannheim.

Kauppi, R., 1967, Einführung in die Theorie der Begriffssysteme, Tampere.

Kauppi, R., 1968, Der Begriff der Veränderung im Lichte der Inhaltslogik, Akten des XIV. Internationalen Kongresses für Philosophie, Wien.

Klaus, G., 1964, Moderne Logik, Berlin.

Klaus, G./Buhr, M. (Hrsg.), 1969, Philosophisches Wörterbuch, Leipzig.

Kleene, S. C., 1952, Introduction to Metamathematics, New York/Amsterdam/Groningen.

Kneale, W./Kneale, M., 1986, The Development of Logic, Oxford.

Kol'man, E./Povarov, G. N./Tavanec, P. V./Janovskaja, S. A. (Hrsg.), 1959, Logiceskie issledovanija, Moskva.

Kolmogoroff, A., 1932, Zur Deutung der intuitionistischen Logik, in: Mathematische Zeitschrift, Bd. 35, Nr. 1.

Kotarbiński, T., 1968, Reism: Issnes and Prospects, in: Logique et Analyse, 11.

Krampitz, K.-H., 1978, Das Begründungsproblem in der Logik, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 3.

Krampitz, K.-H., 1980, Überlegungen zu einer nichttraditionellen Quantorentheorie, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 12.

Krampitz, K.-H./Wuttich, K. (Hrsg.), 1986, Termini, Existenz, Modalitäten. Philosophische Beiträge, Humboldt-Universität zu Berlin, Heft 4, Berlin.

Krampitz, K.-H., 1988, Existenzaussagen und Existenzdefinition, in: Wessel 1988.

Krampitz, K.-H., 1990, On Logical Analyses of Ordinary Sentences, in: Logic Counts, Dordrecht/Boston/London.

Kripke, S. A., 1959, A Completeness Theorem in Modal Logic, in: Journal of Symbolic Logic, vol. 24, Nr. 2.

Kröber, G. (Hrsg.), 1967, Studien zur Logik der wissenschaftlichen Erkenntnis, Berlin.

Kubiński, T., 1980, An Outline of the Logical Theory of Questions, Berlin.

Kuczynski, J./Steinitz, W., 1952, (Hrsg.), Über formale Logik und Dialektik, in: 29. Beiheft zur „Sowjetwissenschaft“, Berlin.

Küng, G., 1963, Ontologie und logistische Analyse der Sprache, Wien.

Kutschera, F. v., 1964, Die Antinomien der Logik, Freiburg.

Kutschera, F. v., 1967, Elementare Logik, Wien/New York.

Kutschera, F. v., 1973, Einführung in die Logik der Normen, Werte und Entscheidungen, Freiburg/München.

Kutschera, F. v., 1976, Einführung in die intensionale Semantik, Berlin/New York.

Lazerowitz, M., 1977, The Language of Philosophy, Dordrecht/Boston.

Leibniz, G. W., 1960, Fragmente zur Logik, Berlin.

Lejewski, C., 1957/58, Zu Leśniewskis Ontologie, in: Ratio 1.

Leśniewski, S., 1929, Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, in: Fundamenta Mathematicae, 14.

Lewis, C. I., 1914, The Calculus of strict Implication, in: Mind, vol. 23.

Lewis, C. I., 1918, A Survey of Symbolic Logic, Berkeley.

Lewis, C. I./Langford, C. H., 1959, Symbolic Logic, New York.

Lewy, C., 1958, Entailment, Aristotelean Society, Supplementary Volume 32.

Lewy, C., 1976, Meaning and Modality, Cambridge.

Lorenz, K., 1968, Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen, in: Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung, H. 11.

Lorenz, K. (Hrsg.), 1982, Identität und Individuation, Bd. 1 und 2, Stuttgart/Bad Cannstatt.

Lorenzen, P., 1955, Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Lorenzen, P., 1962, Metamathematik, Mannheim.

Lorenzen, P., 1967, Formale Logik, Berlin.

Lorenzen, P., 1969, Normative Logic and Ethics, Mannheim.

Lorenzen, P./Schwemmer, O., 1973, Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie, Mannheim/Wien/Zürich.

Lorenzen, P., 1974, Konstruktive Wissenschaftstheorie, Frankfurt a. M.

Lorenzen, P., 1978, Theorie der technischen und politischen Vernunft, Stuttgart.

Lorenzen, P., 1987, Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie, Mannheim/Wien/Zürich.

Łukasiewicz, J., 1951, Aristotele's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic, Oxford.

Łukasiewicz, J., 1952, On the intuitionistic Theory of Deduction, in: Proceedings Series A, No. 3, Wiederabdruck in: Borkowski 1970.

Łukasiewicz, J., 1966, Elements of Mathematical Logic, Warszawa.

Łukasiewicz, J., 1970, Selected Works, ed. by L. Borkowski, Amsterdam/London/Warzawa.

Luschei, E. C., 1962, The logical systems of Leśniewski, Amsterdam.

Mally, E., 1971, Logische Schriften, Dordrecht.

Markow, A. A., 1975, Was ist konstruktive Logik? Urania-Referentenmaterial, H. 3.

Martin, R. M., 1983, Mind, Modality, Meaning and Method, New York.

Mates, B., 1969, Elementare Logik, Göttingen.

McCall, St. (Hrsg.), 1967, Polish Logic 1920-1939, Oxford.

McLaughlin, R. N., 1990, On the Logic of Ordinary Conditionals, Albany.

Meggle, G./Wessels, U. (Eds.), 1994, Analyomen 1. Proceedings of the 1st Conference "Perspectives in Analytical Philosophy", Berlin/New York.

Meggle, G. (Ed.), 1997, Analyomen 2. Proceedings of the 2nd Conference "Perspectives in Analytical Philosophy", Berlin/New York.

Mendelson, E., 1963, Introduction to Mathematical Logic, Princeton/New Jersey/Toronto/New York/London.

Menger, K., 1933, Die neue Logik, in: Menger 1979.

Menger, K., 1979, Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics, Dordrecht/Boston/London.

Meschkowski, H., 1967, Probleme des Unendlichen, Werk und Leben Georg Cantors, Braunschweig.

Mill, J. St., 1862, System der deductiven und inductiven Logik, Braunschweig.

Müller, A., 1967, Ontologie in Wittgensteins „Tractatus“, Bonn.

Narski, I. S., 1968, (Hrsg.), Problemy logiki i teorii poznanija, Moskva.

Novikov, P. S., 1973, Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin.

Novikov, P. S., 1977, Konstruktivnaja matematiceskaja logika s tocki zrenija klassiceskoj, Moskva.

Nute, D., 1980, Topics in Conditional Logic, Dordrecht/Boston/London.

Omel'janovski, M. E. (Hrsg.), 1967, Logika i metodologija nauki, Moskva.

Pap, A., 1955, Strict implication, entailment and modal iteration, in: The Philosophical Review, Ithaca, vol. 64.

Pardey, U., 1994, Identität, Existenz und Reflexivität, Weinheim.

Parry, W. T., 1933, Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation), Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Bd. 4.

Parry, W. T., 1939, Modalities in the ‚Survey‘-system of strict implication, in: Journal of Symbolic Logic, Nr. 4.

Patzig, G., 1969, Die Aristotelische Syllogistik, Göttingen.

Peirce, Ch. S., 1931-35, Collected papers of Charles Sanders Peirce, hrsg. v. Ch. Hartshorne und P. Weiss, 6 Bde., Cambridge (Mass.).

Pelc, J., (Hrsg.), 1979, Semiotics in Poland 1894-1969, Warszawa/Dordrecht/Boston.

Peschel, K., 1979, Möglichkeiten einer formallogischen Darstellung kommunikativer Situationen, in: Nichtklassische Logik, H. 3.

Petrov, J. A., 1971, Logische Probleme der Realisierbarkeits- und Unendlichkeitsbegriffe, Berlin.

Philipp, P., 1977, Logische Aspekte zweckmäßigen Verhaltens, in: Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Halle, H. 6.

Philipp, P., 1979, Zum praktischen Schließen, in: Nichtklassische Logik, H.3.

Pietruszczak, A., Zur Axiomatisierung der strikten logischen Folgebeziehung Horst Wessels, in: Scheffler/Wuttich 1998.

Poincaré, H., 1913, Letzte Gedanken, Leipzig.

Popper, K. R., 1948, On the Theory of Deduction, Proceedings of the Royal Dutch Academy, Teil I: Nr. 2, Teil II: Nr. 3.

Popper, K. R., 1965, Was ist Dialektik?, in: Logik der Sozialwissenschaften, Köln/Berlin.

Post, E. L., 1921, Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, in: American Journal of Mathematics, vol. 43, Nr. 3.

Prior, A., 1957, Time and Modality, Oxford.

Prior, A., 1967, Past, Present and Future, Oxford.

Przełecki, M./Wójcicki, R. (Hrsg.), 1977, Twenty-five Years of Logical Methodology in Poland, Warszawa/Dordrecht/Boston.

Quine, W. v. O., 1961, From a logical point of view. Logico-philosophical essays, New York.

Quine, W. v. O., 1969, Grundzüge der Logik, Frankfurt a. M.

Quine, W. v. O., 1973, Philosophie der Logik, Stuttgart/Berlin/Köln/Mainz.

Quine, W. v. O., 1975, Ontologische Relativität und andere Schriften, Stuttgart.

Quine, W. v. O., 1980, Wort und Gegenstand, Stuttgart.

Read, S., 1988, Relevant Logic. A Philosophical Examination of Inference, Oxford/New York.

Reichenbach, H., 1947, Elements of Symbolic Logic, New York.

Reichenbach, H., 1949, Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik, Zürich.

Reichenbach, H., 1954, Nomological statements and admissible operations, Amsterdam.

Rescher, N., 1968, Topics in Philosophical Logic, Dordrecht.

Russell, B., 1906, The theory of implication, in: American Journal of Mathematics, vol 27.

Russell, B., 1969, Probleme der Philosophie, Frankfurt a. M.

Russell, B., 1979, Die Philosophie des Logischen Atomismus - Aufsätze zur Logik und Erkenntnistheorie 1908-1918, München.

Ruzavin, G. I., 1978, Naucnaja, teorija, Moskva.

Ruzsa, I., 1981, Modal Logic with Descriptions, Budapest.

Ryle, G., 1969, Der Begriff des Geistes, Stuttgart.

Saarnio, U., 1935, Untersuchungen zur symbolischen Logik, Helsinki.

Savigny, E. v., 1970, Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren, München.

Schächter, J., 1978, Prolegomena zu einer kritischen Grammatik, Stuttgart.

Scheffler, U., 1986, Ein konditionallogischer Aufbau einer Theorie der logischen Notwendigkeit, in: Krampitz/Wuttich 1986.

Scheffler, U., 1987a, Eine logische Analyse irrealer Konditionalaussagen, in: Wessel 1987.

Scheffler, U./Wessel, H., 1987b, Ein System der strikten logischen Folgebeziehung für Konditionalaussagen mit Semantik, in: Dölling 1987.

Scheffler, U., 1990, A system of strict entailment F^K with conditionals, in: Polish Academy of Sciences, Institut of Philosophy and Sociology, Bulletin of the section of logic, 19/2.

Scheffler, U., 1991, Conditionals between strict entailment and relevant implication, in: Svoboda, V./Zapletal, I. (Eds.), Logica '91. Proceedings of the Symposium, Czechoslovak Academy of Sciences, Prague.

Scheffler, U., 1994, Token versus Type Causation, in: Faye/Scheffler/Urchs 1994.

Scheffler, U./Wuttich, K., 1998, Terminigebrauch und Folgebeziehung.

Schenk, G., 1973, Zur Geschichte der logischen Form, Bd. 1, Berlin.

Schilpp, P. A. (Hrsg.), 1963, The Philosophy of Rudolf Carnap, La Salle/London.

Schirn, M., 1975, Identität und Synonymie. Logisch-semantische Untersuchungen unter Berücksichtigung der sprachlichen Verständigungspraxis, Stuttgart/Bad Cannstatt.

Schmidt, A., 1938, Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen, in: Mathematische Annalen, 115.

Schmidt, H. A., 1954, Ein rein aussagenlogischer Zugang zu den Modalitäten der strikten Logik, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam.

Schmidt, H. A., 1960, Mathematische Gesetze der Logik I, Vorlesungen über Aussagenlogik, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Scholz, H., 1941, Metaphysik als strenge Wissenschaft, Köln.

Scholz, H., 1947, Logik, Grammatik, Metaphysik, in: Archiv für Philosophie, 1.

Scholz, H./Hasenjaeger, G., 1961, Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Schröter, K., 1943, Was ist eine mathematische Theorie? Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig/Berlin/Stuttgart, 53.

Schröter, K., 1957, Eine Umformung des Heytingschen Axiomensystems für den intuitionistischen Aussagenkalkül, in: Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 3.

Schröter, K., 1955 u. 1958, Theorie des logischen Schließens I - II, in: Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1 u. 4.

Schütte, K., 1960, Beweistheorie, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Schütte, K., 1963, Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik, Berlin/Heidelberg/New York.

Seebohm, T. M., 1984, Philosophie der Logik, Freiburg/München.

Seebohm, T. M., 1991, Elementare formalisierte Logik, Freiburg/München.

Serebrjannikov, O. F., 1974, Heuristische Prinzipien und logische Kalküle, Berlin.

Shiraishi, S., 1954, The Structur of the Continuity of Psychological Experiences and the Physical World, in: The Science of Thought, 1.

Sigwart, Ch., 1873, Logik, Tübingen.

Sikorski, R., 1960, Boolean Algebras, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Sinowjew, A. A., 1968, Über mehrwertige Logik. Ein Abriß, Berlin/Braunschweig/Basel.

Sinowjew, A. A., 1970, Komplexe Logik. Grundlagen einer logischen Theorie des Wissens, Berlin.

Sinowjew, A. A., 1975, Logik und Sprache der Physik, Berlin.

Sinowjew, A./Wessel, H., 1975, Logische Sprachregeln. Eine Einführung in die Logik, Berlin.

Słupecki, J., 1959, Towards and Generalised Mereology of Leśniewski, in: Studia Logica, 8.

Słupecki, J./Borkowski, L., 1967, Elements of mathematical logic and set theory, Warszawa.

Starčenko, A. A. (Hrsg.), 1974, Logika i metodologija naucnogo poznanija, Moskva.

Stegmüller, W., 1958/1959, Conditio irrealis, Dispositionen, Naturgesetze und Induktion, in: Kant-Studien, Bd. 50, H. 3.

Stegmüller, W., 1969, Der Phänomenalismus und seine Schwierigkeiten. Sprache und Logik, Darmstadt.

Steins, E., 1947, Natural implication and material implication, in: Theoria, vol. 13.

Stelzner, W., 1974, Eine formale Lösung epistemologischer Antinomien, in: Reports on Mathematical Logic, vol. 2.

Stelzner, W., 1978, Diskussion und Logik, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 2.

Stelzner, W., 1980, Parameterbezogenheit in der epistemischen Logik, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 12.

Stelzner, W., 1984, Epistemische Logik. Zur logischen Analyse von Akzeptationsformen, Berlin.

Stelzner, W. (Hrsg.), 1993, Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien Jena 1989/1991, Berlin/New York.

Stirner, M., 1924, Der Einzige und sein Eigentum, Berlin.

Strawson, P. F., 1972, Einzelding und logisches Subjekt (Individuals), Stuttgart.

Suppes, P., 1957, Introduction to logic, Princeton/New York/Toronto.

Suppes, P., 1970, A Probabilistic Theory of Causality, Amsterdam.

Surányi, J., 1959, Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe, Berlin.

Surma, St., 1971, Jaśkowski's matrix criterion for the intuitionistic propositional calculus, in: Prace z logiki, H. 6.

Tarski, A., 1930, Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik, in: Comptes Rendus des Séance de la Société des sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 23.

Tarski, A., 1935, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, in: Studia Philosophica Commentarii Societatis philosophicae Polonorum, vol. I, Wiederabdruck in: Berka/Kreiser 1971.

Tarski, A., 1935/1936, Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe, in: Erkenntnis, 5.

Tarski, A., 1936, Über den Begriff der logischen Folgerung, in: Actes du congrès International de Philosophic Scientifique 1935, Bd. VII, Paris, Wiederabdruck in: Berka/Kreiser 1971.

Tarski, A., 1938, Der Aussagenkalkül und die Topologie, in: Fundamenta Mathematicae, 31.

Tarski, A., 1956, Logic, semantics, metamathematics, Oxford.

Tarski, A., 1966, Einführung in die mathematische Logik, Göttingen.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1955, Voprosy logiki, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1960, Primenenie logiki v nauke i technike, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1962, Filosofskie voprosy sovremennoj formal'noj logiki, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1963, Problemy logiki, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1964a, Problemy logiki naucnogo poznanija, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1964b, Formal'naja logika i metodologija nauki, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1965, Logiceskaja struktura naucnogo znanija, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1967, Logiceskaja semantika i modal'naja logika, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1970, Neklassiceskaja logika, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1972, Logika i empiriceskoe poznanie, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1973, Teorija logiceskogo vyvoda, Moskva.

Tavanec, P. V. (Hrsg.), 1977, Metody logiceskogo analiza, Moskva.

Tavanec, P. V./Smirnov, V. A. (Hrsg.), 1974, Filosofija i logika, Moskva.

Thiel, Ch., 1972, Grundlagenkrise und Grundlagenstreit: Studie über das normative Fundament der Wissenschaften am Beispiel von Mathematik und Sozialwissenschaften, Meisenheim am Glan.

Thiel, Ch., 1995, Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik, Darmstadt.

Urchs, M., 1993, Klassische Logik. Eine Einführung, Berlin.

Uspenski, W., 1960, Abstrakcija aktual'noj beskonecnosti, in: Filosofskaja enziklopedija, t. 1.

Venn, J., 1881, Symbolic Logic, London.

Voltaire, F. M., 1959, Der Mann mit den vierzig Talern, in: Sämtliche Romane und Erzählungen in zwei Bänden, Bd. I, Leipzig.

Waisberg, M., 1977, Logical Works, Wrocław/Warszawa/Kraków/Gdańsk.

Waismann, F., 1976, Logik, Sprache, Philosophie, Stuttgart.

Waismann, F., 1977, Philosophical Papers, Dordrecht/Boston.

Wessel, H. (Hrsg.), 1972, Quantoren, Modalitäten, Paradoxien. Beiträge zur Logik, Berlin.

Wessel, H., 1976, Logik und Philosophie, Berlin.

Wessel, H. (Hrsg.), 1977, Logik und empirische Wissenschaften. Beiträge deutscher und sowjetischer Philosophen und Logiker, Berlin.

Wessel, H., 1978, Definition des Existenzprädikates als Voraussetzung zur Lösung des zeitgenössischen Universalienstreites, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 3.

Wessel, H., 1979, Ein System der strikten logischen Folgebeziehung, in: Bolck 1979.

Wessel, H., 1980, Aussagenlogische Theorie der logischen Folgebeziehung, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 12.

Wessel, H., 1982, Vollständigkeit der nichttraditionellen Prädikationstheorie, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 12.

Wessel, H., 1983, Nichttraditionelle Prädikationstheorie und intuitionistische Aussagenlogik, in: VII. Internationaler Kongreß für Logik, Methodologie und Philosophie der Wissenschaften, 11.-16.07.1983 Salzburg - DDR-Beiträge -, Akademie der Wissenschaften, Heft 32, Berlin.

Wessel, H., 1984, Kritische Bemerkungen zur intuitionistischen Logikkonzeption, in: G. Wechsung (Ed.), Frege Conference 1984, Berlin.

Wessel, H. (Hrsg.), 1987, Philosophische Logik. Aus dem philosophischen Leben der DDR. Informationsbulletin, Jahrgang 23, Heft 11, Berlin.

Wessel, H. (Hrsg.), 1988, Logische Philosophie, Thematische Information Philosophie, Jahrgang 12, Heft 2, Berlin.

Wessel, H. (Hrsg.), 1989, Wissen, Wertung, Wirkung. „Philosophische Logik“, Philosophische Beiträge, Humboldt-Universität zu Berlin, Heft 2, Berlin.

Wessel, H. (Hrsg.), 1992, Komplexe Logik. Symposium zu Ehren von Alexander Sinowjew. Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Reihe Geistes- und Sozialwissenschaften 41, 9.

Wessel, H., 1993, Zur Lösung einiger Paradoxien, in: Stelzner 1993.

Wessel, H., 1994a, Alternative Logiken und empirische Wissenschaften, in: Meggle/Wessels 1994.

Wessel, H., 1994b, The Identity of Strong Indiscernibility, in: Logic and Logical Philosophy, No. 2.

Wessel, H., 1995a, Grundlagen einer Terminitheorie, in: Zeitschrift für Semiotik, Band 17, Heft 3-4.

Wessel, H., 1995b, Wider den Mythos intensionaler Kontexte, in: Meggle 1997.

Wessel, H., 1995c, Kripkes Puzzle ist kein Puzzle, in: Ruch Filozoficzny, Tom LII, Nr. 3-4.

Weyl, H., 1966, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, Wien.

Whitehead, A. N./Russell, B., 1962, Principia Mathematica, Cambridge.

Wittgenstein, L., 1967, Philosophische Untersuchungen, Frankfurt a. M.

Wittgenstein, L., 1969, Tractatus logico-philosophicus, Frankfurt a. M.

Wittgenstein, L., 1978, Philosophische Grammatik, Frankfurt a. M.

Wójcicki, R., 1979, Topics in the formal methodology of empirical sciences, Dordrecht/Boston/Wroclaw.

Wright, G. H. v., 1951, An Essay in modal logic, Amsterdam.

Wright, G. H. v., 1965, And next, in: Acta Philosophica Fennica, Helsinki, f. 18.

Wright, G. H. v., 1966, And then, in: Societes Scientiarum Fennica, Commentationes Physico-Mathematicae, vol. 32, Nr. 7.

Wright, G. H. v., 1968, An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action, Amsterdam.

Wuttich, K., 1976, Epistemische Logik, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 7.

Wuttich, K., 1980, Zur Analyse der intuitiven Grundlagen der epistemischen Logik, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, H. 12.

Wuttich, K., 1991, Glaube, Zweifel, Wissen, Berlin.

Wuttich, K., 1993, Eine Wertlückensemantik für die nichttraditionelle Prädikationstheorie, in: Neue Realitäten. Herausforderung der Philosophie. XVI. Deutscher Kongreß für Philosophie. Sektionsbeiträge I, Berlin.

Zaslavskij, I. D., 1978, Simmetriceskaja konstruktivnaja logika, Erevan.

Zinov'ev, A. A., 1971, Logika nauki, Moskva.

Zinov'ev, A. A., 1975, Ocerk epistemiceskoj logiki, in: Teorie a metoda, VII/4.

Zinov'ev, A. A., 1983a, Logical Physics, Dordrecht.

Zinov'ev, A. A., 1983b, Non-Standard Logic and its Applications (several Lectures in Oxford), Oxford.

Symbolverzeichnis

$\sim$	- äußere Negation
$\neg$	- innere Negation
$\wedge$	- Konjunktion
$\vee$	- Adjunktion
$\supset$	- Subjunktion
$\equiv$	- Bisubjunktion
$\mid$	- Negatadjunktion
$\dagger$	- Negatkonjunktion
$\not\equiv$	- Disjunktion
$\leftarrow$	- Prädikationsoperator des Zusprechens
$\not\leftarrow$	- Prädikationsoperator des Absprechens
?	- Unbestimmtheitszeichen
$\rightarrow$	- Konditionaloperator oder Implikationsoperator
$\leftrightarrow$	- Bikonditionaloperator
$\Rightarrow$ $\Rrightarrow$	- irreale Konditionaloperatoren
$\longrightarrow$	- Sequenzenzeichen
$\vdash$	- Symbol für Beweisbarkeit, Ableitbarkeit oder für die logische Folgebeziehung
$\dashv\vdash$	- gegenseitige Folgebeziehung
$\models$	- semantische Folgebeziehung
$\rightleftharpoons_{Def}$	- Definitionsgleichheit von Termini
$\equiv_{Def}$	- Definitionsgleichheit von Aussagen
$A\{a/B\}$	- Symbol für eine Einsetzung
$A[B/C]$	- Symbol für eine Ersetzung
$\approx$	- semantische Äquivalenz
$\forall$	- Allquantor
$\exists$	- Einsquantor
$\rightharpoonup$	- Bedeutungseinschluß
$\underline{\rightharpoonup}$	- strenger Bedeutungseinschluß
$\rightleftharpoons$	- Bedeutungsgleichheit
$\triangle$	- Bedeutungsüberschneidung
$\triangledown$	- echte Bedeutungsüberschneidung
$\underline{\rightleftharpoons}$	- Sinngleichheit
t	- Metaterminusoperator
l	- terminibildender Operator „das, was ... bedeutet“
s	- terminibildender Operator „der Sachverhalt“
e	- terminibildender Operator „der Wahrheitswert von“
$\uparrow$	- terminibildender Operator „die Untatsache, daß“
$\downarrow$	- terminibildender Operator „die Tatsache, daß“
$\in$	- Elementbeziehung
$\cap$	- Klassendurchschnittsoperator
$\cup$	- Klassenvereinigungsoperator
$\overline{}$	- Klassennegationsoperator
$\subset$	- Inklusionsbeziehung von Klassen
$>$	- Übertreffensrelation
$<$	- Untertreffensrelation
$=$	- Identitätsrelation
E	- Existenzprädikat
M	- möglich
N	- notwendig
C	- zufällig
v	- wahr
f	- falsch

Personenregister

Sachregister

Bereits erschienene und geplante Bände der Reihe

Logische Philosophie

Hrsg.: H. Wessel, U. Scheffler, Y. Shramko, M. Urchs

ISSN: 1435–3415

In der Reihe „Logische Philosophie“ werden philosophisch relevante Ergebnisse der Logik vorgestellt. Dazu gehören insbesondere Arbeiten, in denen philosophische Probleme mit logischen Methoden gelöst werden.

Uwe Scheffler/Klaus Wuttich (Hrsg.)

Terminigebrauch und Folgebeziehung

ISBN: 978-3-89722-050-8 Preis: 30,- €

Regeln für den Gebrauch von Termini und Regeln für das logische Schließen sind traditionell der Gegenstand der Logik. Ein zentrales Thema der vorliegenden Arbeiten ist die umstrittene Forderung nach speziellen Logiken für bestimmte Aufgabengebiete - etwa für Folgern aus widersprüchlichen Satzmengen, für Ersetzen in gewissen Wahrnehmungs- oder Behauptungssätzen, für die Analyse von epistemischen, kausalen oder mehrdeutigen Termini. Es zeigt sich in mehreren Arbeiten, daß die nichttraditionelle Prädikationstheorie eine verläßliche und fruchtbare Basis für die Bearbeitung solcher Probleme bietet. Den Beiträgen zu diesem Problemkreis folgen vier diese Thematik erweiternde Beiträge. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Theorie der logischen Folgebeziehungen. Die meisten der diesem Themenkreis zugehörenden Arbeiten sind explizit den Systemen F^S bzw. S^S gewidmet.

Horst Wessel

Logik

ISBN: 978-3-89722-057-7 Preis: 37,- €

Das Buch ist eine philosophisch orientierte Einführung in die Logik. Ihm liegt eine Konzeption zugrunde, die sich von mathematischen Einführungen in die Logik unterscheidet, logische Regeln als universelle Sprachregeln versteht und sich bemüht, die Logik den Bedürfnissen der empirischen Wissenschaften besser anzupassen.

Ausführlich wird die klassische Aussagen- und Quantorenlogik behandelt. Philosophische Probleme der Logik, die Problematik der logischen Folgebeziehung, eine nichttraditionelle Prädikationstheorie, die intuitionistische Logik, die Konditionallogik, Grundlagen der Terminitheorie, die Behandlung modaler Prädikate und ausgewählte Probleme der Wissenschaftslogik gehen über die üblichen Einführungen in die Logik hinaus.

Das Buch setzt keine mathematischen Vorkenntnisse voraus, kann als Grundlage für einen einjährigen Logikkurs, aber auch zum Selbststudium genutzt werden.

Yaroslav Shramko

Intuitionismus und Relevanz

ISBN: 978-3-89722-205-2 Preis: 25,- €

Die intuitionistische Logik und die Relevanzlogik gehören zu den bedeutendsten Rivalen der klassischen Logik. Der Verfasser unternimmt den Versuch, die jeweiligen Grundideen der Konstruktivität und der Paradoxienfreiheit durch eine „Relevantisierung der intuitionistischen Logik“ zusammenzuführen. Die auf diesem Weg erreichten Ergebnisse sind auf hohem technischen Niveau und werden über die gesamte Abhandlung hinweg sachkundig philosophisch diskutiert. Das Buch wendet sich an einen logisch gebildeten philosophisch interessierten Leserkreis.

Horst Wessel

Logik und Philosophie

ISBN: 978-3-89722-249-6 Preis: 15,30 €

Nach einer Skizze der Logik wird ihr Nutzen für andere philosophische Disziplinen herausgearbeitet. Mit minimalen logisch-technischen Mitteln werden philosophische Termini, Theoreme und Konzeptionen analysiert. Insbesondere bei der Untersuchung von philosophischer Terminologie zeigt sich, daß logische Standards für jede wissenschaftliche Philosophie unabdingbar sind. Das Buch wendet sich an einen breiten philosophisch interessierten Leserkreis und setzt keine logischen Kenntnisse voraus.

S. Wölfl

Kombinierte Zeit- und Modallogik. Vollständigkeitsresultate für prädikatenlogische Sprachen

ISBN: 978-3-89722-310-3 Preis: 40,- €

Zeitlogiken thematisieren „nicht-ewige“ Sätze, d. h. Sätze, deren Wahrheitswert sich in der Zeit verändern kann. Modallogiken (im engeren Sinne des Wortes) zielen auf eine Logik alethischer Modalbegriffe ab. Kombinierte Zeit- und Modallogiken verknüpfen nun Zeit- mit Modallogik, in ihnen geht es also um eine Analyse und logische Theorie zeitabhängiger Modalaussagen.

Kombinierte Zeit- und Modallogiken stellen eine ausgezeichnete Basistheorie für Konditionallogiken, Handlungs- und Bewirkenstheorien sowie Kausalanalysen dar. Hinsichtlich dieser Anwendungsgebiete sind vor allem prädikatenlogische Sprachen aufgrund ihrer Ausdrucksstärke von Interesse. Die vorliegende Arbeit entwickelt nun kombinierte Zeit- und Modallogiken für prädikatenlogische Sprachen und erörtert die solchen logischen Systemen eigentümlichen Problemstellungen. Dazu werden im ersten Teil ganz allgemein multimodale Logiken für prädikatenlogische Sprachen diskutiert, im zweiten dann Kalküle der kombinierten Zeit- und Modallogik vorgestellt und deren semantische Vollständigkeit bewiesen.

Das Buch richtet sich an Leser, die mit den Methoden der Modal- und Zeitlogik bereits etwas vertraut sind.

H. Franzen, U. Scheffler

Logik. Kommentierte Aufgaben und Lösungen

ISBN: 978-3-89722-400-1 Preis: 15,- €

Üblicherweise wird in der Logik-Ausbildung viel Zeit auf die Vermittlung metatheoretischer Zusammenhänge verwendet. Das Lösen von Übungsaufgaben — unerläßlich für das Verständnis der Theorie — ist zumeist Teil der erwarteten selbständigen Arbeit der Studierenden. Insbesondere Logik-Lehrbücher für Philosophen bieten jedoch häufig wenige oder keine Aufgaben. Wenn Aufgaben vorhanden sind, fehlen oft die Lösungen oder sind schwer nachzuvollziehen.

Das vorliegende Trainingsbuch enthält Aufgaben mit Lösungen, die aus Klausur- und Tutoriumsaufgaben in einem 2-semestrigen Grundkurs Logik für Philosophen entstanden sind. Ausführliche Kommentare machen die Lösungswege leicht verständlich. So übt der Leser, Entscheidungsverfahren anzuwenden, Theoreme zu beweisen u. ä., und erwirbt damit elementare logische Fertigkeiten. Erwartungsgemäß beziehen sich die meisten Aufgaben auf die Aussagen- und Quantorenlogik, aber auch andere logische Gebiete werden in kurzen Abschnitten behandelt.

Diese Aufgabensammlung ist kein weiteres Lehrbuch, sondern soll die vielen vorhandenen Logik-Lehrbücher ergänzen.

U. Scheffler

Ereignis und Zeit. Ontologische Grundlagen der Kausalrelationen

ISBN: 978-3-89722-657-9 Preis: 40,50 €

Das Hauptergebnis der vorliegenden Abhandlung ist eine philosophische Ereignistheorie, die Ereignisse über konstituierende Sätze einführt. In ihrem Rahmen sind die wesentlichen in der Literatur diskutierten Fragen (nach der Existenz und der Individuation von Ereignissen, nach dem Verhältnis von Token und Typen, nach der Struktur von Ereignissen und andere) lösbar. In weiteren Kapiteln werden das Verhältnis von kausaler und temporaler Ordnung sowie die Existenz von Ereignissen in der Zeit besprochen und es wird auf der Grundlage der Token-Typ-Unterscheidung für die Priorität der singulären Kausalität gegenüber genereller Verursachung argumentiert.

Horst Wessel

Antiirrationalismus

Logisch-philosophische Aufsätze

ISBN: 978-3-8325-0266-9 Preis: 45,- €

Horst Wessel ist seit 1976 Professor für Logik am Institut für Philosophie der Humboldt-Universität zu Berlin. Nach seiner Promotion in Moskau 1967 arbeitete er eng mit seinem Doktorvater, dem russischen Logiker A. A. Sinowjew, zusammen. Wessel hat großen Anteil daran, daß am Berliner Institut für Philosophie in der Logik auf beachtlichem Niveau gelehrt und geforscht wurde.

Im vorliegenden Band hat er Artikel aus einer 30-jährigen Publikationstätigkeit ausgewählt, die zum Teil nur noch schwer zugänglich sind. Es handelt sich dabei um logische, philosophische und logisch-philosophische Arbeiten. Von Kants Antinomien der reinen Vernunft bis zur logischen Terminitheorie, von Modalitäten bis zur logischen Folgebeziehung, von Entwicklungstermini bis zu intensionalen Kontexten reicht das Themenspektrum.

Antiirrationalismus ist der einzige -ismus, dem Wessel zustimmen kann.

Horst Wessel, Klaus Wuttich

daß-Termini

Intensionaliät und Ersetzbarkeit

ISBN: 978-3-89722-754-5 Preis: 34,- €

Von vielen Autoren werden solche Kontexte als intensional angesehen, in denen die üblichen Ersetzbarkeitsregeln der Logik nicht gelten. Eine besondere Rolle spielen dabei *daß*-Konstruktionen.

Im vorliegenden Buch wird gezeigt, daß diese Auffassungen fehlerhaft sind. Nach einer kritischen Sichtung der Arbeiten anderer Logiker zu der Problematik von *daß*-Termini wird ein logischer Apparat bereitgestellt, der es ermöglicht, *daß*-Konstruktionen ohne Einschränkungen von Ersetzbarkeitsregeln und ohne Zuflucht zu Intensionalitäten logisch korrekt zu behandeln.

Fabian Neuhaus

Naive Prädikatenlogik

Eine logische Theorie der Prädikation

ISBN: 978-3-8325-0556-1 Preis: 41,- €

Die logischen Regeln, die unseren naiven Redeweisen über Eigenschaften zugrunde liegen, scheinen evident und sind für sich alleine betrachtet völlig harmlos - zusammen sind sie jedoch widersprüchlich. Das entstehende Paradox, das Russell-Paradox, löste die sogenannte Grundlagenkrise der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts aus. Der klassische Weg, mit dem Russell-Paradox umzugehen, ist eine Vermeidungsstrategie: Die logische Analysesprache wird so beschränkt, daß das Russell-Paradox nicht formulierbar ist.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Weg aufgezeigt, wie man das Russell-Paradox und das verwandte Grelling-Paradox lösen kann. Dazu werden die relevanten linguistischen Daten anhand von Beispielen analysiert und ein angemessenes formales System aufgebaut, die Naive Prädikatenlogik.

Bente Christiansen, Uwe Scheffler (Hrsg.)

Was folgt

Themen zu Wessel

ISBN: 978-3-8325-0500-4 Preis: 42,- €

Die vorliegenden Arbeiten sind Beiträge zu aktuellen philosophischen Diskussionen – zu Themen wie Existenz und Referenz, Paradoxien, Prädikation und dem Funktionieren von Sprache überhaupt. Gemeinsam ist ihnen der Bezug auf das philosophische Denken Horst Wessels, ein Vierteljahrhundert Logikprofessor an der Humboldt-Universität zu Berlin, und der Anspruch, mit formalen Mitteln nachvollziehbare Ergebnisse zu erzielen.

Vincent Hendricks, Fabian Neuhaus, Stig Andur Pedersen, Uwe Scheffler, Heinrich Wansing (Eds.)

First-Order Logic Revisited

ISBN: 978-3-8325-0475-5 Preis: 75,- €

Die vorliegenden Beiträge sind für die Tagung „75 Jahre Prädikatenlogik erster Stufe“ im Herbst 2003 in Berlin geschrieben worden. Mit der Tagung wurde der 75. Jahrestag des Erscheinens von Hilberts und Ackermanns wegweisendem Werk „Grundzüge der theoretischen Logik“ begangen.

Im Ergebnis entstand ein Band, der eine Reflexion über die klassische Logik, eine Diskussion ihrer Grundlagen und Geschichte, ihrer vielfältigen Anwendungen, Erweiterungen und Alternativen enthält.

Der Band enthalt Beiträge von Andréka, Avron, Ben-Yami, Brünnler, Englebretsen, Ewald, Guglielmi, Hajek, Hintikka, Hodges, Kracht, Lanzet, Madarasz, Nemeti, Odintsov, Robinson, Rossberg, Thielscher, Toke, Wansing, Willard, Wolenski

Pavel Materna

Conceptual Systems

ISBN: 978-3-8325-0636-0 Preis: 34,- €

We all frequently use the word “concept”. Yet do we know what we mean using this word in sundry contexts? Can we say, for example, that there can be several concepts of an object? Or: can we state that some concepts develop? What relation connects concepts with expressions of a natural language? What is the meaning of an expression? Is Quine’s ‘stimulus meaning’ the only possibility of defining meaning? The author of the present publication (and of “Concepts and Objects”, 1998) offers some answers to these (and many other) questions from the viewpoint of transparent intensional logic founded by the late Czech logician Pavel Tichý (†1994 Dunedin).

Johannes Emrich

Die Logik des Unendlichen

Rechtfertigungsversuche des *tertium non datur* in der Theorie des mathematischen Kontinuums

ISBN: 978-3-8325-0747-3 Preis: 39,- €

Im Grundlagenstreit der Mathematik geht es um die Frage, ob gewisse in der modernen Mathematik gängige Beweismethoden zulässig sind oder nicht. Der Verlauf der Debatte – von den 1920er Jahren bis heute – zeigt, dass die Argumente auf verschiedenen Ebenen gelagert sind: die der meist konstruktivistisch eingestellten Kritiker sind erkenntnistheoretischer oder logischer Natur, die der Verteidiger ontologisch oder pragmatisch. Die Einschätzung liegt nahe, der Streit sei gar nicht beizulegen, es handele sich um grundlegend unterschiedliche Auffassungen von Mathematik. Angesichts der immer wieder auftretenden Erfahrung ihrer Unverträglichkeit wäre es aber praktisch wie philosophisch unbefriedigend, schlicht zur Toleranz aufzurufen. Streiten heißt nach Einigung streben. In der Philosophie manifestiert sich dieses Streben in der Überzeugung einer objektiven Einheit oder Einheitlichkeit, insbesondere geistiger Sphären. Im Sinne dieser Überzeugung unternimmt die vorliegende Arbeit einen Vermittlungsversuch, der sich auf den logischen Kern der Debatte konzentriert.

Christopher von Bülow

Beweisbarkeitslogik

– Gödel, Rosser, Solovay –

ISBN: 978-3-8325-1295-8 Preis: 29,- €

Kurt Gödel erschütterte 1931 die mathematische Welt mit seinem Unvollständigkeitssatz. Gödel zeigte, wie für jedes noch so starke formale System der Arithmetik ein Satz konstruiert werden kann, der besagt: „Ich bin nicht beweisbar." Würde das System diesen Satz beweisen, so würde es sich damit selbst Lügen strafen. Also ist dies ein wahrer Satz, den es nicht beweisen kann: Es ist unvollständig. John Barkley Rosser verstärkte später Gödels Ergebnisse, wobei er die Reihenfolge miteinbezog, in der Sätze bewiesen werden, gegeben irgendeine Auffassung von „Beweis". In der Beweisbarkeitslogik werden die formalen Eigenschaften der Begriffe „beweisbar" und „wird früher bewiesen als" mit modallogischen Mitteln untersucht: Man liest den notwendig - Operator als beweisbar und gibt formale Systeme an, die die Modallogik der Beweisbarkeit erfassen.

Diese Arbeit richtet sich sowohl an Logik-Experten wie an durchschnittlich vorgebildete Leser. Ihr Ziel ist es, in die Beweisbarkeitslogik einzuführen und deren wesentliche Resultate, insbesondere die Solovayschen Vollständigkeitssätze, präzise, aber leicht zugänglich zu präsentieren.

Niko Strobach

Alternativen in der Raumzeit

Eine Studie zur philosophischen Anwendung multidimensionaler Aussagenlogiken

ISBN: 978-3-8325-1400-6 Preis: 46.50 €

Ist der Indeterminismus mit der Relativitätstheorie und ihrer Konzeption der Gegenwart vereinbar? Diese Frage lässt sich beantworten, indem man die für das alte Problem der futura contingentia entwickelten Ansätze auf Aussagen über das Raumartige überträgt. Die dazu hier Schritt für Schritt aufgebaute relativistische indeterministische Raumzeitlogik ist eine erste philosophische Anwendung der multidimensionalen Modallogiken.

Neben den üblichen Zeitoperatoren kommen dabei die Operatoren „überall" und „irgendwo" sowie „für jedes Bezugssystem" und „für manches Bezugssystem" zum Einsatz. Der aus der kombinierten Zeit- und Modallogik bekannte Operator für die historische Notwendigkeit wird in drei verschiedene Operatoren („wissbar", „feststehend", „beeinflussbar") ausdifferenziert. Sie unterscheiden sich bezüglich des Gebiets, in dem mögliche Raumzeiten inhaltlich koinzidieren müssen, um als Alternativen zueinander gelten zu können. Die Interaktion zwischen den verschiedenen Operatoren wird umfassend untersucht.

Die Ergebnisse erlauben es erstmals, die Standpunkt-gebundene Notwendigkeit konsequent auf Raumzeitpunkte zu relativieren. Dies lässt auf einen metaphysisch bedeutsamen Unterschied zwischen deiktischer und narrativer Determiniertheit aufmerksam werden. Dieses Buch ergänzt das viel diskutierte Paradigma der verzweigten Raumzeit („branching spacetime") um eine neue These: Der Raum ist eine Erzählform der Entscheidungen der Natur.

Erich Herrmann Rast

Reference and Indexicality

ISBN: 978-3-8325-1724-3 Preis: 43.00 €

Reference and indexicality are two central topics in the Philosophy of Language that are closely tied together. In the first part of this book, a description theory of reference is developed and contrasted with the prevailing direct reference view with the goal of laying out their advantages and disadvantages. The author defends his version of indirect reference against well-known objections raised by Kripke in Naming and Necessity and his successors, and also addresses linguistic aspects like compositionality. In the second part, a detailed survey on indexical expressions is given based on a variety of typological data. Topics addressed are, among others: Kaplan's logic of demonstratives, conversational versus utterance context, context-shifting indexicals, the deictic center, token-reflexivity, vagueness of spatial and temporal indexicals, reference rules, and the epistemic and cognitive role of indexicals. From a descriptivist perspective on reference, various examples of simple and complex indexicals are analyzed in first-order predicate logic with reified contexts. A critical discussion of essential indexicality, de se readings of attitudes and accompanying puzzles rounds up the investigation.

Magdalena Roguska

Exklamation und Negation

ISBN: 978-3-8325-1917-9 Preis: 39.00 €

Im Deutschen, aber auch in vielen anderen Sprachen gibt es umstrittene Negationsausdrücke, die keine negierende Kraft haben, wenn sie in bestimmten Satztypen vorkommen. Für das Deutsche handelt sich u.a. um die exklamativ interpretierten Sätze vom Typ:

Was macht sie nicht alles! Was der nicht schafft!

Die Arbeit fokussiert sich auf solchen Exklamationen. Ihre wichtigsten Thesen lauten:

- Es gibt keine Exklamativsätze aber es gibt Exklamationen.
- *Alles* und *nicht alles* in solchen Sätzen, haben semantische und nicht pragmatische Funktionen.
- Das „nicht-negierende“ *nicht* ohne *alles* in einer Exklamation ist doch eine Negation. Die Exklamation bezieht sich aber trotzdem auf denselben Wert, wie die entsprechende Exklamation ohne Negation.
- In skalaren Exklamationen besteht der Unterschied zwischen Standard- und „nicht-negierenden“ Negation im Skopus von *nicht.*

Die Analyse erfolgt auf der Schnittstelle zwischen Semantik und Pragmatik.

August W. Sladek

Aus Sand bauen. Tropentheorie auf schmaler relationaler Basis

Ontologische, epistemologische, darstellungstechnische Möglichkeiten und Grenzen der Tropenanalyse

ISBN: 978-3-8325-2506-4 (4 Bände) Preis: 198.00 €

Warum braucht eine Tropentheorie zweieinhalbtausend Seiten Text, wenn zweieinhalb Seiten ausreichen, um ihre Grundidee vorzustellen? Weil der Verfasser zuerst sich und dann seine Leser, auf deren Geduld er baut, überzeugen will, dass die ontologische Grundidee von Tropen als den Bausteinen der Welt wirklich trägt und sich mit ihnen die Gegenstände nachbilden lassen, die der eine oder andere glaubt haben zu müssen. Um metaphysischen, epistemologischen Dilemmata zu entgehen, sie wenigstens einigermaßen zu meistern, preisen viele Philosophen Tropen als „Patentbausteine“ an. Die vorliegende Arbeit will Tropen weniger empfehlen als zeigen, wie sie sich anwenden lassen. Dies ist weit mühseliger als sich mit Andeutungen zu begnügen, wie brauchbar sich doch Tropen erweisen werden, machte man sich die Mühe sie einzusetzen. Lohnt sich die Mühe wirklich? Der Verfasser wollte zunächst nachweisen, dass sie sich nicht lohnt. Das Gegenteil ist ihm gelungen. Zwar sind Tropen wie Sandkörner. Was lässt sich schon aus Sand bauen, das Bestand hat? Wenn man nur genug „Zement“ nimmt, gelingen gewiss stabile Bauten, doch wie viel und welcher „Zement“ ist erlaubt? Nur schwache Bindemittel dürfen es sein; sonst gibt man sich mit einer hybriden Tropenontologie zufrieden, die Bausteine aus fremden, konkurrierenden Ontologien hinzunimmt. Die vier Bände bieten eine schwächstmögliche und damit unvermischte, allerdings mit Varianten und Alternativen behaftete Tropentheorie an samt ihren Wegen, Nebenwegen, Anwendungstests.

Mireille Staschok

Existenz und die Folgen

Logische Konzeptionen von Quantifikation und Prädikation

ISBN: 978-3-8325-2191-2 Preis: 39.00 €

Existenz hat einen eigenwilligen Sonderstatus in der Philosophie und der modernen Logik. Dieser Sonderstatus erscheint in der klassischen Prädikatenlogik – übereinstimmend mit Kants Diktum, dass Existenz kein Prädikat sei – darin, dass „Existenz" nicht als Prädikat erster Stufe, sondern als Quantor behandelt wird. In der natürlichen Sprache wird „existieren" dagegen prädikativ verwendet.

Diese andauernde und philosophisch fruchtbare Diskrepanz von Existenz bietet einen guten Zugang, um die Funktionsweisen von Prädikation und Quantifikation zu beleuchten. Ausgangspunkt der Untersuchungen und Bezugssystem aller Vergleiche ist die klassische Prädikatenlogik erster Stufe. Als Alternativen zur klassischen Prädikatenlogik werden logische Systeme, die sich an den Ansichten Meinongs orientieren, logische Systeme, die in der Tradition der aristotelischen Termlogik stehen und eine nichttraditionelle Prädikationstheorie untersucht.

Sebastian Bab, Klaus Robering (Eds.)

Judgements and Propositions

Logical, Linguistic, and Cognitive Issues

ISBN: 978-3-8325-2370-1 Preis: 39.00 €

Frege and Russell in their logico-semantic theories distinguished between a proposition, the judgement that it is true, and the assertion of this judgement. Their distinction, however, fell into oblivion in the course of later developments and was replaced by the formalistic notion of an expression derivable by means of pureley syntactical rules of inference. Recently, however, Frege and Russell's original distinction has received renewed interest due to the work of logicians and philosophers such as, for example, Michael Dummett, Per Martin-Lf, and Dag Prawitz, who have pointed to the central importance of o both the act of assertion and its justification to logic itself as well as to an adequate theory of meaning and understanding.

The contributions to the present volume deal with central issues raised by these authors and their classical predecessors: What kind of propositions are there and how do they relate to truth? How are propositions grasped by human subjects? And how do these subjects judge those propositions according to various dimensions (such as that of truth and falsehood)? How are those judgements encoded into natural language, communicated to other subjects, and decoded by them? What does it mean to procede by inference from premiss assertions to a new judgement?

Marius Thomann

Die Logik des Könnens

ISBN: 978-3-8325-2672-6 Preis: 41.50 €

Was bedeutet es, einer Person eine praktische Fähigkeit zu attestieren? Und unter welchen Umständen sind derartige Fähigkeitszuschreibungen wahr, etwa die Behauptung, Max könne Gitarre spielen? Diese Fragen stehen im Zentrum der vorliegenden Untersuchung. Ihr Gegenstand ist die philosophisch-logische Analyse des Fähigkeitsbegriffs. Als Leitfaden dient eine Analyse normalsprachlicher Fähigkeitszuschreibungen, gemäß der Max genau dann Gitarre spielen kann, wenn er dies unter dafür angemessenen Bedingungen normalerweise erfolgreich tut. Drei in der Forschungsliteratur vorgeschlagene Systeme werden diskutiert, die zwar wertvolle Impulse für die formale Modellierung geben, als Vertreter des so genannten modalen Ansatzes aber von der Diagnose ontologischer Inadäquatheit betroffen sind: Die Entitäten, die als Fähigkeiten attribuiert werden, lassen sich nicht über Propositionen individuieren; ohne die explizite Referenz auf Handlungstypen, die eben gekonnt oder nicht gekonnt werden, bleibt Max' Fähigkeit, Gitarre zu spielen, unterbestimmt. Um diesen Einwand zu vermeiden, liegt demgemäß der hier vorgestellten Logik des Könnens ein Gegenstandsbereich zugrunde, dessen Struktur an der Ontologie von Handlungen orientiert ist.

Christof Dobieß

Kausale Relata

Eine Untersuchung zur Wechselbeziehung zwischen der Beschaffenheit kausaler Relata und der Natur der Kausalbeziehung

ISBN: 978-3-8325-5083-7 Preis: 57.00 €

Dieses Buch macht nachdrücklich klar, daß die Thematik „Kausale Relata“ kein Nebenschauplatz der Kausalitätsdiskussion ist und sich die Analyse von Kausalität nicht auf die bloße Betrachtung der Kausalrelation selbst beschränken darf. Zwischen der Metaphysik der kausalen Relata und der Natur der Kausalbeziehung, so die Hauptthese dieses Werks, besteht eine enge theoretische Wechselbeziehung.

Untersucht wird diese These anhand zentraler kausaler Problembereiche: (1) der kausalen Präemption, (2) der Transitivität der Kausalität, (3) der dispositionalen Verursachung, (4) der negativen Verursachung und (5) der Konzeption von Verursachung als „qualitativem Fortbestand“ („qualitative persistence“).

Während die Probleme der Präemption und des qualitativen Fortbestands in der Auseinandersetzung zwischen kontrafaktischen Kausalkonzeptionen und Transfertheorien Bedeutung entfalten, betreffen die Transitivität der Kausalität sowie negative und dispositionale Verursachung nahezu alle Kausaltheorien. Der Forderung nach der Transitivität der Kausalität kann nur durch eine hinreichend präzise und eindeutig gefaßte Konzeption der kausalen Beziehungsträger entsprochen werden. Ob Dispositionen oder Negativereignisse in kausale Beziehungen treten können, hängt entscheidend davon ab, inwiefern Entitäten dieser Art ein ontologisches Bleiberecht zugestanden wird.

Logische Philosophie

Hrsg.: H. Wessel, U. Scheffler, Y. Shramko und M. Urchs

In der Reihe „Logische Philosophie" werden philosophisch relevante Ergebnisse der Logik vorgestellt. Dazu gehören insbesondere Arbeiten, in denen philosophische Probleme mit logischen Methoden gelöst werden.

Das Buch ist eine philosophisch orientierte Einführung in die Logik. Ihm liegt eine Konzeption zugrunde, die sich von mathematischen Einführungen in die Logik unterscheidet, logische Regeln als universelle Sprachregeln versteht und sich bemüht, die Logik den Bedürfnissen der empirischen Wissenschaften besser anzupassen.
Ausführlich wird die klassische Aussagen- und Quantorenlogik behandelt. Philosophische Probleme der Logik, die Problematik der logischen Folgebeziehung, eine nichttraditionelle Prädikationstheorie, die intuitionistische Logik, die Konditionallogik, Grundlagen der Terminitheorie, modale Prädikate und ausgewählte Probleme der Wissenschaftslogik gehen über die üblichen Einführungen in die Logik hinaus.
Das Buch setzt keine mathematischen Vorkenntnisse voraus, kann als Grundlage für einen einjährigen Logikkurs, aber auch zum Selbststudium genutzt werden.
Der Autor des Buches ist seit 1976 Professor für Logik am Institut für Philosophie der Humboldt-Universität zu Berlin.

Logos Verlag Berlin

ISBN 3–89722–057–1